

KEGELSNEDES AS INTEGRERENDE FAKTOR IN SKOOLWISKUNDE

deur

GERT HENDRIKUS STOLS

voorgelê luidens die vereistes
vir die graad

DOCTOR PHILOSOPHIAE

in die vak

WISKUNDEONDERWYS

aan die

UNIVERSITEIT VAN SUID-AFRIKA

PROMOTOR: PROF J HEIDEMA

MEDEPROMOTOR: PROF D C J WESSELS

NOVEMBER 2003

DANKBETUIGING

Hiermee my oopregte dank en waardering aan:

- my vrou, Jacobien en kinders, Gerdi en Marisa, vir hulle ondersteuning, belangstelling en opofferings
- my ouers en skoonouers vir hulle ondersteuning, hulp en gebede
- prof. J. Heidema, my promotor, vir sy waardevolle raad en leiding
- prof D.C.J. Wessels, my medepromotor vir toegewyde en waardevolle raad, kontakte en geleenthede
- prof J. Olive (The University of Georgia, VSA) vir nuwe insigte oor navorsingsmetodes en sy bereidwilligheid om as mentor in die VSA op te tree
- prof J. Wilson (The University of Georgia, VSA) vir inspirasie, idees en hulp in die gebruik van Geometer's Sketchpad in die ondersoek na kegelsnedes
- die National Research Foundation (NRF) van Suid-Afrika en die National Science Foundation (NSF) van die VSA vir die geleentheid om by The University of Georgia in die VSA aan my studie te werk.
- die National Research Foundation (NRF) van Suid-Afrika vir finansiële ondersteuning (GUN 2053491)
- my Skepper vir die geleentheid, krag en insig.

Titel: Kegelsnedes as integrerende faktor in skoolwiskunde.

OPSOMMING

As ons skoolleerders wil voorberei vir die toekoms moet ons hulle gereed maak vir die tegnologiese eeu. Dit kan gedoen word deur die leerders se hoërordedenke te ontwikkel. Dit is duidelik die doel van die nuut voorgestelde Suid-Afrikaanse Graad 10 tot 12 Nasionale Hersiene Kurrikulumdoelstellings. Hierdie navorsing toon aan dat 'n geïntegreerde kurrikulumbenadering 'n wyse is waarop die ontwikkeling hoërordedenke bevorder kan word. Hierdie navorsing is gebaseer op die veronderstelling dat 'n geïntegreerde kurrikulumbenadering leerders sal help om 'n beter verbinde kennisstruktuur op te bou en dat hierdie geïntegreerde kennisstruktuur leerders in staat sal stel om probleme wat van hoërordedenke vereis op te los. Hierdie aanname is geldig aangesien empiriese resultate van verskillende projekte toon dat 'n geïntegreerde kurrikulumbenadering leerders se vermoë om nie-roetine probleme op te los verbeter. Die nuut voorgestelde kurrikulum verwys na vier vorme van integrasie, naamlik integrasie oor verskillende vakke heen, integrasie met die leefwêreld, integrasie van meetkunde met algebra en integrasie van tegnologie, in hierdie geval dinamiese meetkundesagteware, met die onderrig van meetkunde. Hierdie navorsing toon vanuit psigologiese, pedagogiese en historiese perspektiewe dat kegelsnedes as 'n integrerende faktor in die nuut voorgestelde Graad 10- tot 12-kurrikulum gebruik kan word in al vier bogenoemde integrasiewyses. Kegelsnedes kan integrasie van leerders se wiskundekennis oor verskillende onderwerpe aan mekaar verbind. Dit kan ook leerders se informele kennis en skoolwiskundekennis by mekaar laat aansluit. Dit kan gebeur in die konteks van probleemoplossing terwyl leerders aan probleme oor kegelsnedes in hulle leefwêreld werk.

Sleutel terme: kegelsnedes; kegel; parabool; hiperbool; ellips; kwadratiese vergelyking; geïntegreerde kurrikulum; projektiewe meetkunde; hoërordedenke; dinamiese meetkundesagteware

Title: Conics as an integrating factor in school mathematics.**SUMMARY**

Real empowerment of school learners requires preparing them for the age of technology. This empowerment can be achieved by developing their higher-order thinking skills. This is clearly the intention of the proposed South African FET National Curriculum Statements Grades 10 to 12 (Schools). This research shows that one method of developing higher-order thinking skills is to adopt an integrated curriculum approach. The research is based on the assumption that an integrated curriculum approach will produce learners with a more integrated knowledge structure which will help them to solve problems requiring higher-order thinking skills. These assumptions are realistic because the empirical results of several comparative research studies show that an integrated curriculum helps to improve learners' ability to use higher-order thinking skills in solving nonroutine problems. The curriculum mentions four kinds of integration, namely integration across different subject areas, integration of mathematics with the real world, integration of algebraic and geometric concepts, and integration into and the use of dynamic geometry software in the learning and teaching of geometry. This research shows that from a psychological, pedagogical, mathematical and historical perspective, the theme conic sections can be used as an integrating factor in the new proposed FET mathematics curriculum. Conics are a powerful tool for making the new proposed curriculum more integrated. Conics can be used as an integrating factor in the FET band by means of mathematical exploration, visualisation, relating learners' experiences of various parts of mathematics to one another, relating mathematics to the rest of the learners' experiences and also applying conics to solve real-life problems.

Key terms: cones; conics; conic sections; parabola; hyperbola; ellipse; quadratic equation; integrated curriculum; projective geometry; higher-order thinking skills; dynamic geometry software

INHOUDSOPGawe

Hoofstuk 1: Agtergrond en Oorsig 1

1.1	Motivering van studie	1
1.2	Probleemstelling	7
1.3	Doelstelling	8
1.4	Doelwitte	8
1.5	Metode van ondersoek	8
1.6	Begripsomskrywing	10
1.6.1	Kurrikulum.....	10
1.6.2	Integrasie.....	10
1.6.3	Kegel en kegelsnedes.....	11
1.7	Verloop van die ondersoek	12

Hoofstuk 2: Psigologiese en pedagogiese fokus op geïntegreerde kurrikulums. 14

2.1	Konstruktivisme en integrasie	14
2.2	Meetkundige kognitiewe ontwikkeling	18
2.3	Integrering in die kurrikulum.....	20
2.3.1	Integrering van meetkunde en algebra.....	20
2.3.2	Probleemoplossing en geïntegreerde onderrig.....	22
2.3.3	Integrasie van wiskunde met ander vakke	24
2.4	Geïntegreerde kurrikulumprojekte.....	24
2.4.1	Kurrikulumintegrering in die VSA	24
2.4.2	Fokus op die Connected Mathematics Project (CMP).....	26
2.4.3	Mathematics in Context (MiC) projek.....	28
2.5	Samevatting.....	29

Hoofstuk 3: Euklidiese benadering tot kegelsnedes..... 31

3.1	Historiese agtergrond	31
3.2	Meetkundige beskrywing van kegelsnedes.....	33
3.3	Die oppervlakte en volume van kegels en kegelsnedes	35
3.4	Algebraïesering van die kegelsnedes	37
3.5	Identifisering van kegelsnedes uit die standaardvorm	40
3.6	Beskrywing van kegelsnedes	42
3.6.1	Brandpunt en riglyn	42
3.6.2	Toppunt en asse.....	43
3.6.3	Eksentrisiteit	44
3.7	Vergelykings van kegelsnedes	47
3.7.1	Rotasie en translasie.....	47
3.7.2	Bepaling van die soort kegelsnede	49
3.7.3	Eenvoudigste vorme van die kegelsnedes.....	49
3.8	Eienskappe van kegelsnedes	53
3.9	Konstruksie van kegelsnedes	57
3.9.1	Konstruksie met behulp van 'n tou	58
3.9.2	Konstruksie vanuit algebraïese vergelykings	59

3.9.3	Konstruksie met behulp van optelling van ordinate	63
3.9.4	Meetkundige prosedure vir die konstruering van kegelsnedes	64
3.9.5	Konstruksie met behulp van loodregte verdelers.....	72
3.9.6	Meganiese tegnieke.....	73
3.10	Samevatting.....	73

Hoofstuk 4: Die rol van kegelsnedes in projektiewe meetkunde 75

4.1	Oorsprong van projektiewe meetkunde	75
4.2	Skaduwees.....	78
4.3	Die projektiewe vlak	79
4.4	Kegelsnedes en skadumeetkunde.....	83
4.5	Projektiwiteit.....	84
4.6	Die vergelyking van puntkegelsnedes	87
4.6.1	Koördinate vir die projektiewe vlak	87
4.6.2	Projektiwiteit tussen twee bundels.....	89
4.7	Eienskappe van kegelsnedes	90
4.7.1	Kegelsnedes, harmoniese en polêre verwantskappe	90
4.7.2	Polariteit.....	91
4.7.3	Kruisverhoudings.....	92
4.7.4	Harmoniese verwantskap	92
4.7.5	Heksagoon.....	96
4.8	Klassifisering van meetkundes	98
4.8.1	Die absolute kegelsnede.....	98
4.8.2	Affiene meetkunde ($c = 0$)	100
4.8.3	Hiperboliese meetkunde.....	100
4.8.4	Elliptiese meetkunde	101
4.8.5	Benaming	101
4.9	Konstruksies met behulp van omhulsels.....	104
4.9.1	Bepaling van die vergelyking van 'n omhulsel	104
4.9.2	Konstruksies met behulp van gevoude papier	106
4.10	Samevatting.....	109

Hoofstuk 5: Kegelsnedes as integrerende faktor in die SA kurrikulum..... 111

5.1	Ontleding van die kurrikulum.....	112
5.1.1	Integrasie in die kurrikulum.....	113
5.1.2	Kegelsnedes in die kurrikulum	117
5.2	Kegelsnedes as integrerende faktor in die kurrikulum	118
5.2.1	Kegelsnedes in ons leefwêreld.....	119
5.2.2	Integrasie van meetkunde en algebra	121
5.2.3	Integrasie met ander vakke	122
5.2.4	Integrasie van dinamiese meetkundesagteware	131
5.3	Die rol van kegelsnedes in Leeruitkomste 2 en 3	139
5.4	Onderrig van kegelsnedes	144
5.5	Samevatting.....	155

Hoofstuk 6: Samevatting en gevolgtrekking.....	157
6.1 Oorsig van die studie	157
6.1.1 Psigologiese perspektief	159
6.1.2 Pedagogiese perspektief.....	159
6.1.3 Wiskundige perspektief	160
6.1.4 Historiese perspektief	162
6.2 Kegelsnedes as integrerende faktor in die kurrikulum	163
6.3 Verdere navorsing	166
6.4 Samevatting.....	168
6.5 Gevolgtrekking	168
Bibliografie	170

Indeed, the separation of mathematics into artificial, watertight compartments, so characteristic of the standard curriculum in the U.S. and in some other countries, is highly disadvantageous for development of creative mathematical thinking and leads to a gross overemphasis of the acquisition of manipulative skills at the expense of genuine understanding.

– Hilton (1990: 15)

Perhaps most importantly in today's information age, thinking skills are viewed as crucial for educated persons to cope with a rapidly changing world. Many educators believe that specific knowledge will not be as important to tomorrow's workers and citizens as the ability to learn and make sense of new information.

– Gough (1991)

Many of the stunning results obtained by Gauss came from his ability to think of the same thing from several different points of view.

– Cuoco, Goldenberg & Mark (1996: 386)

Hoofstuk 1: Agtergrond en Oorsig

1.1 Motivering van studie

Die huidige Suid-Afrikaanse kurrikulum is 'n versplinterde kurrikulum wat op 'n versameling losstaande onderwerpe fokus. Die fokus is meer op wat leerders *weet en onthou* as wat hulle kan *doen*. Daar word onderskei tussen die weet en doen van wiskunde. Hierdie onderskeid tussen die verkryging van kennis en die gebruik daarvan is volgens Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, Murray, Olivier en Human (1996: 14) 'n gevolg van "the distinction in philosophy between knowing and doing". Kulm (1990: 2) beskryf dit as die onderskeid tussen suiwer en toegepaste wiskunde. Voorheen is geglo dat wiskunde eers geleer en dan toegepas word:

One unintended legacy of the modern math movement of the 1960s is the notion that one should first learn the underlying mathematics, then apply the principles (Kulm 1990: 2).

Hierdie siening het geleid tot 'n onderwerpgedrewe kurrikulum waar die vraag gevra is: "Watter wiskundeonderwerpe is belangrik vir die leerders om te ken?" Nuwe onderwerpe is bygevoeg en ander is uitgelaat. In hierdie proses het die verwantskappe en die kohesie binne die kurrikulum verlore gegaan. Meetkunde en algebra is as twee onafhanklike en losstaande onderwerpe behandel en geëksamineer. Schoenfeld (1994: 57) dui op die gevvaar van so 'n onderwerpgedrewe kurrikulum:

The danger in this kind of "content inventory" point of view comes from what it leaves out: The critically important point that mathematical thinking consists of a lot more than knowing facts, theorems, techniques, etc.

Hilton (1990: 15) waarsku as volg oor die negatiewe impak van hierdie benadering op die ontwikkeling van hoërordedenke:

Indeed, the separation of mathematics into artificial, watertight compartments, so characteristic of the standard curriculum in the U.S. and in some other countries, is highly disadvantageous for development of creative mathematical thinking and leads to a gross overemphasis on the acquisition of manipulative skills at the expense of genuine understanding.

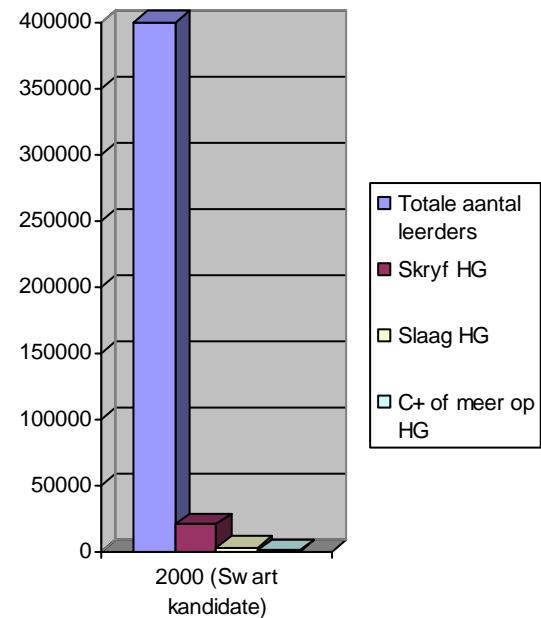
Die gevolge van die huidige versplinterde kurrikulum op die ontwikkeling van hoërordedenke in Suid-Afrika is, onder andere, duidelik in die Graad 12-Seniorsertifikaatskamern se uitslae sigbaar. 'n Variasie van Bloom se taksonomie is gebruik in die opstel van dié eksamenvraestelle. Die vroeë in hierdie vraestel is soos

volg geklassifiseer ([Suid-Afrikaanse Nasionale] Departement van Onderwys 2001b: 2):

- Kennis en vaardighede (40% van die vraestel)
- Begrip (40% van die vraestel)
- Toepassing en kreatiewe denke (20% van die vraestel)

Volgens bogenoemde klassifikasie is dit redelik om te aanvaar dat leerders wat minder as 65% behaal, nie die vermoë het om vroe te beantwoord wat hoërordedenke vereis nie. Volgens statistieke van die Departement van Onderwys toon ISASA (The Independent School Association of South Africa) en Kahn se analise, wat handel oor die prestasie van swart leerders in staatskole in die 2000 Graad 12-Seniorsertifikaatskamert, dat by benadering 880 leerders (sien Figuur 1-1) uit 'n totale populasi van 400 000 leerders Wiskunde op hoër graad met meer as 65% geslaag het (Departement van Onderwys 2001a: 12; Maths Centre & Zenex Foundation 2002: 5). Hiervolgens voldoen nie meer as 0.22% van hierdie leerders aan die kritieke uitkoms van die nuwe kurrikulum nie. Dit behels dat leerders probleme moet oplos deur die toepassing van kritiese en kreatiewe denke. Die feit dat so min leerders vroe kan beantwoord wat hoërordedenke vereis, word ook bevestig deur 'n studie deur Stols (2003) waarin bevind is dat leerders in agt swart plattelandse skole se gemiddelde prestasie vir wiskundevrae wat hoërordedenke vereis, 10% is.

Suid-Afrika is tans besig met die implementering van 'n uitkomsgebaseerde kurrikulum, dit staan bekend as Kurrikulum 2005. Die tweede voorlopige weergawe van die Graad 10- tot 12-Nasjonale Kurrikulumdoelstellings is in Augustus 2002 vir openbare kommentaar vrygestel (Departement van Onderwys 2002a: 2). Hierdie kurrikulum fokus, onder ander, op die gebruik en ontwikkeling van hoërordedenke. Een van die kritieke uitkomste van die voorgestelde kurrikulum is:



Figuur 1-1

Mathematics enables learners to use mathematical process skills to identify, pose and solve problems creatively and critically (Departement van Onderwys 2002a).

Alhoewel daar verskeie definisies bestaan vir kreatiewe denke, kritiese denke en hoërordedenke is daar in die literatuur geen ooreenstemming hieroor nie: “there are no universal agreements as to their precise meanings” (Cotton 1991). Hoërordedenke in Bloom se taksonomie, as een voorbeeld, fokus op die analise, sintese en evaluering van kennis. Die vaardighede wat op hierdie vlak gedemonstreer word, sluit in die gebruik van kennis in nuwe situasies, probleemoplossing, patroonerkennung, veralgemening, spesialisering en voorspelling. Eenvoudig gestel beteken hoërordedenke die volgende:

Higher-order thinking essentially means thinking that takes place in the higher-levels of the hierarchy of cognitive processing (Manzo 1998).

Hoërordedenke behels meer as die memorisering van feite. Dit vereis oorspronklike denke en die skep van nuwe idees:

In simplest terms, higher order thinking measures includes all intellectual tasks that call for more than information retrieval (Baker 1990: 7).

Die ontwikkeling van hoërordedenke is volgens Yelland (1997: 1) ’n internasionale tendens: “...educational programmes that support the development of higher order thinking skills are in evidence around the globe”. Hoërordedenke word gesien as basiese vaardighede wat benodig word in die 21ste eeu. Confrey en Lachance (2000: 232) verduidelik hierdie stelling:

These skills (computational skills) allowed students to secure jobs and to become informed citizens in an industrial society. However, with advances in technology, such computational skills are no longer as important. Instead, students need to develop critical-thinking skills to interpret data appropriately and to use technology to solve more complex problems. Thus, changes in our society have led to a change in what we value in mathematical skills.

Ons kry die gedagte ook by Saskatchewan Education (1988):

The importance of having students develop good critical and creative thinking abilities has to do with the foundations needed for a democracy and with the tools needed for independent and life-long learning.

Die vraag is hoe die kurrikulum moet lyk of gestructureer moet word om hoërordedenke te bevorder. Om hierdie vraag te antwoord is dit nodig om te kyk wat wiskunde en die leer van wiskunde behels.

Om te bepaal hoe die kurrikulum gestructureer moet word om hoërordedenke te bevorder het ons duidelikheid nodig oor wat wiskunde is en oor hoe dit geleer word. Die uitgangspunt van hierdie navorsing oor die vraag “Wat is wiskunde?”, is dat wiskunde deur mense geskep of gekonstrueer word (Departement van Onderwys 2002a: 9). Hierdie konstruksies behels verstandsvoorstellings wat met mekaar verbind

kan word. In die konstruering van nuwe kennis speel reeds verworwe kennis 'n belangrike rol. Dis nie alleen die voorkennis wat 'n rol speel nie, maar ook die wyse waarop hierdie voorkennis onderling verbind is. Hiebert en Carpenter (1992: 66-67) gebruik dieselfde gedagte om te verduidelik wat 'verstaan' beteken:

A mathematical idea or procedure or fact is understood if it is part of an internal network The degree of understanding is determined by the number and the strength of the connections. A mathematical idea or procedure or fact is understood thoroughly if it is linked to existing networks with stronger or more numerous connections.

Die verwantskappe en verbindingen tussen konsepte word gebou en versterk as dieselfde idee van verskillende hoeke benader word. Die gebruik van kennis kan beperk word deur 'n swak gestruktureerde kennisstruktuur. 'n Goed verbinde kennisstruktuur kan die gebruik en ontwikkeling van hoërordedenke bevorder. Om so 'n geïntegreerde kennisstruktuur te bevorder moet die temas in 'n kurrikulum geïntegreer word. In 'n voorgestelde wysiging tot Kurrikulum 2005 word klem op die begrip "integrasie" geplaas. Hierdie dokument vorm 'n deel van die Nasionale Kurrikulumbeleid vir Algemene Onderwys en Opleiding. Integrasie word soos volg in hierdie dokument verduidelik (Departement van Onderwys 2002a: 143):

(Integration is) A key design principle of the National Curriculum Statement, that requires learners to use their knowledge and skills from other Learning Areas, or from different parts of the same Learning Area, to carry out tasks and activities.

Geïntegreerde kurrikulums kom wêreldwyd voor, onder andere in lande soos die VSA en Nederland. Die invloedrykste formulering van die breë bedoelde kurrikulum is seker die Amerikaanse National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) se 'Principles and Standards for School Mathematics' waarin 'connections' 'n sentrale tema is. Die belangrikheid van 'n geïntegreerde wiskundekurrikulum word in hierdie dokument beklemtoon (NCTM 2000a: 354):

When students can see the connections across different mathematical content areas, they develop a view of mathematics as an integrated whole. As they build on their previous mathematical understandings while learning new concepts, students become increasingly aware of the connections among various mathematical topics. As students' knowledge of mathematics, their ability to use a wide range of mathematical representations, and their access to sophisticated technology and software increase, the connections they make with other academic disciplines, especially the sciences and social sciences, give them greater mathematical power.

Hierdie integrasiegedagte het in die VSA neerslag gevind in verskeie projekte. Voorbeeld van sulke projekte is *Mathematics in Context* (MiC) Project, *Connected Geometry Project*, die *Connected Mathematics Project* (CMP) en die *Integrated*

Mathematics Project (IMP). Die meerderheid van hierdie projekte fokus egter op graad 7 tot 9.

In Suid-Afrika word ook meer klem op die integrering van kennis geplaas. Die tweede voorlopige weergawe van die nuut voorgestelde Graad 10- tot 12- Nasionale Kurrikulumdoelstellings (daar word in hierdie studie slegs na *die kurrikulum* verwys) wys op die belangrikheid van integrasie (Departement van Onderwys 2002a: 4). Die kurrikulum word in vier uitkomste verdeel:

- Leeruitkoms 1: Getal en getalverwantskappe
- Leeruitkoms 2: Patrone, funksies en algebra
- Leeruitkoms 3: Vorm, ruimte en meting
- Leeruitkoms 4: Datahantering en waarskynlikheid

Integrasie word op verskillende wyses vermeld:

Integration is achieved within and across subjects and fields of learning. The integration of knowledge and skills across subjects and terrains of practice is crucial for achieving applied competence as defined in the NQF (Departement van Onderwys 2002b: 4).

A central purpose of Mathematics in the FET band is establishing an authentic connection between mathematics as a discipline and the application of mathematics in real-world contexts (Departement van Onderwys 2002a: 9).

The study of Shape, Space and Measurement enables the learner to link algebraic and geometric concepts through analytic geometry (Departement van Onderwys 2002a: 13).

Investigations are to be carried out with the assistance of whatever technology is available and assessed in accordance with the technology used. Dynamic geometry software assists considerably in carrying out investigations (Departement van Onderwys 2002a: 13).

Hierdie vorme van integrasie kan in vier kategorieë ingedeel word:

- 1) Die integrering van leeruitkomste.
- 2) Die integrering van wiskunde in die algemeen met probleme en toepassings uit die leerders se leefwêreld.
- 3) Die integrering van wiskunde met ander vakke.
- 4) Die integrering van tegnologie in wiskundeonderrig.

Alhoewel die kurrikulum na vier vorme van integrasie verwys, is die vraag hoe dit kan plaasvind. Die vraag is of daar 'n tema is wat as integrerende faktor kan dien sodat wiskunde, die toepassing daarvan, en die gebruik van tegnologie bymekaar gebring kan word. Hierdie tema moet sodanig wees dat die leeruitkomste van die kurrikulum nog steeds bereik word en moet van so aard wees dat dit verskillende afdelings van wiskunde saam trek tot 'n groter geheel en nie verdeel soos die tradisionele

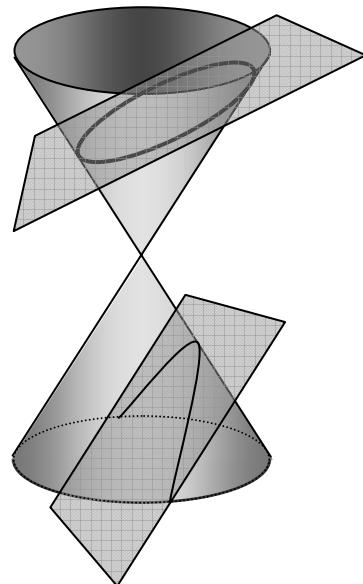
onderwerpgedrewe kurrikulum nie. Een so 'n moontlike tema is kegelsnedes. Daar is verskeie redes waarom die gebruik van kegelsnedes gekies is. Een van die redes is omdat kegelsnedes so 'n kragtige onderwerp is dat dit integrasie op al vier wyses moontlik maak. Kegelsnedes kan gebruik word om meetkunde en algebra te integreer. Die belangrikheid van hierdie vorm van integrasie kan in die volgende opmerking van Goldenberg (1999: 194) gesien word:

Geometry's deep connections to other mathematical topics and to nonmathematical interests could help connect a larger and more diverse group of students with rich mathematics.

'n Ander rede waarom kegelsnedes as integrerende faktor gekies is, is omdat koniese funksies, dit is die parabool, ellips en hiperbool alreeds deel van die assesseringsstandaarde in die kurrikulum is:

We know this when the learner analyses, describes and represents the properties of and relationships between geometric solids by investigating the effect of a plane cutting a right circular cone in various ways (Departement van Onderwys 2002a: 27).

Kegelsnedes is ook as integrerende faktor gekies weens die belangrike rol daarvan in wiskunde, asook in die historiese ontwikkeling van die vakgebied. Die hiperbool, parabool en ellips (wat die sirkel insluit), wat bekend staan as kegelsnedes, het langer as 2000 jaar 'n belangrike rol in die ontwikkeling van wiskunde gespeel. Die Griekse wiskundiges het kegelsnedes volgens die snyding van 'n plat vlak en 'n kegel gedefinieer. Die hiperbool, parabool en ellips kan dus uit een figuur gekonstrueer word (sien Figuur 1-2). Apollonius van Perga, 'n Griekse wiskundige, het ongeveer 200 jaar v.C. 'n reeks van agt boeke oor kegelsnedes geskryf. Hierdie werk het langer as 'n duisend jaar die hoeksteen vir denke oor kegelsnedes gevorm (Fuller & Tarwater 1986: 95). Agtien eeue het verloop voordat Descartes met sy werk *La Géométrie*, nuwe lig op die onderwerp gewerpt het (Ball 1908). Dit was eers in die 16de en die 17de eeu dat wiskundiges opnuut belangstelling in kegelsnedes getoon het. Die Renaissance-skilders het na 'n manier gesoek waarop die driedimensionele wêreld op 'n plat vlak, of tweedimensionele oppervlak voorgestel kon word (Serra 1997: 27). Dit het geleid tot die ontwikkeling van projektiewe meetkunde, waarin kegelsnedes 'n



Figuur 1-2

sentrale rol speel. Die hiperbool, parabool en ellips se nie-onderskeibaarheid is in die projektiwevlak aangetoon (Smart 1989: 322). Pastoll (1996b: 3) sien dit soos volg:

... the real nature and essence of this family of curves, viz. that they are fundamentally one and the same curve in different stages of metamorphosis.

Kegelsnedes is nie net van historiese en akademiese belang nie; dit het ander interessante en belangrike toepassings. Ons vind kegelsnedes in projektielbeweging, in fluistergalerye, satellietskottels, Moiré-patrone, radar, motorligte, flitsligte en planetêre beweging. Kegelsnedes kom dus algemeen in ons leefwêreld voor. Sibley (1998: 65) wys daarop dat hierdie toepassings nie dadelik uit die teorie gebore is nie:

The Greeks studied three types of conics: ellipses, parabolas, and hyperbolas. However, nearly two thousand years passed before the first of many applications of conics outside mathematics appeared.

Volgens Fuller en Tarwater (1986: 95) behoort kegelsnedes in die toekoms ook 'n rol te speel:

..., we have faith that new applications will be uncovered in the future, just as they have for the past twenty-two centuries. Many of today's applications could not have been imagined just fifty or one hundred years ago.

Met die ontwikkeling van die rekenaar, en veral rekenaargrafika (byvoorbeeld virtuele werklikheid), is daar hernude belangstelling in projektiwe meetkunde waarin kegelsnedes 'n belangrike rol speel (Birchfield 1998: 1). Cederberg (1989: 127) verduidelik dit soos volg:

The relevance of projective geometry to achieving realistic planar representations of three-dimensional objects is currently making the study of projective geometry a prerequisite to the study of computer graphics.

Behalwe vir hierdie praktiese toepassings word kegelsnedes ook gebruik in die klassifisering van meetkundes. Deelmeetkundes van projektiwe meetkunde staan byvoorbeeld ook bekend as hiperboliese en elliptiese meetkunde.

1.2 **Probleemstelling**

Suid-Afrika is tans besig met die implementering van 'n uitkomsgbaseerde kurrikulum wat fokus op die gebruik en ontwikkeling van hoërordedenke. 'n Geïntegreerde kennisstruktuur kan die gebruik en ontwikkeling van hoërordedenke bevorder. Om so 'n geïntegreerde kennisstruktuur te bevorder moet die temas in 'n kurrikulum geïntegreer word. Die tweede voorlopige weergawe van die nuut voorgestelde Graad 10- tot 12- Nasionale Kurrikulumdoelstellings wys op die belangrikheid van integrasie en dui vier vorme van integrasie aan. Die vraag is of kegelsnedes as 'n integrerende faktor kan dien.

1.3 Doelstelling

Die doel van hierdie studie is om die integrerende rol wat kegelsnedes kan speel in die nuut voorgestelde graad 10- tot 12-wiskundekurrikulum van Suid-Afrika te ondersoek en aan te toon.

1.4 Doelwitte

Bogenoemde doelstelling behels drie aspekte, naamlik integrasie, kegelsnedes en die nuut voorgestelde graad 10- tot 12-wiskundekurrikulum. Dié doelstelling word vir die doeleindes van die studie in sewe doelwitte verdeel. Die eerste twee doelwitte handel oor integrasie:

Doelwit 1: Die verband tussen 'n geïntegreerde kennisstruktuur en hoërordedenke word teoreties bepaal.

Doelwit 2: Die impak van 'n geïntegreerde benadering op die ontwikkeling van hoërordedenke word bepaal deur bestaande navorsingsprojekte te analyseer.

Die wiskundige ondersoek na kegelsnedes maak gebruik van Euklidiese en projektiewe benaderings. In elk van die volgende doelwitte word van beide benaderings gebruik gemaak.

Doelwit 3: Kegelsnedes se voorstellings word gedefinieer, hulle eienskappe wiskundig ondersoek en vereenvoudig.

Doelwit 4: Verskillende wyses waarop die kegelsnedes gekonstrueer kan word, word ondersoek.

Die derde aspek van die doelstelling handel oor die nuut voorgestelde graad 10- tot 12-wiskundekurrikulum:

Doelwit 5: Dié kurrikulum word ontleed om die rol van integrasie te bepaal.

Doelwit 6: Die rol van kegelsnedes in dié kurrikulum word bepaal.

Doelwit 7: Die rol wat kegelsnedes as integrerende faktor in dié kurrikulum speel, word bepaal.

1.5 Metode van ondersoek

Hierdie studie ondersoek die rol van kegelsnedes as integrerende faktor in die kurrikulum. Dit kan beskryf word as kurrikulumontwikkelingnavorsing. Kurrikulumontwikkeling is 'n wetenskaplike proses wat gebaseer is op *opvoedkundige aanvraag* asook op *perspektiewe op onderrig en leer* (Kelly & Lesh 2000: 733). Die

opvoedkundige aanvraag in hierdie navorsing handel oor die dringende behoefte aan die ontwikkeling van hoërordedenke in Suid-Afrika, soos wat in afdeling 1.1 beskryf is. In plaas van die onderrig- en leerperspektief, maak Dennis (2000: 799) melding van die psigologiese en pedagogiese perspektiewe. Behalwe hierdie twee perspektiewe benadruk hy ook die feit dat die kurrikulum wiskundig en histories benader moet word. In hierdie studie word die gebruik van kegelsnedes as integrerende rol in die kurrikulum, soos deur Dennis voorgestel, soos volg benader en begrond:

- 'n *Psigologiese perspektief* wat verduidelik hoe fundamentele konsepte by leerders ontwikkel.
- 'n *Pedagogiese perspektief* wat handel oor verskillende wyses waarop die onderrig en kurrikulum benader kan word.
- 'n *Wiskundige perspektief* wat handel oor die logiese ontwikkeling van idees.
- 'n *Historiese perspektief* wat handel oor die wyse waarop idees histories ontwikkel het.

Die studie behels 'n literatuurstudie wat eerstens handel oor die wyse waarop leer plaasvind en die invloed daarvan in geïntegreerde kurrikulumprogramme. Tweedens handel dit oor die logiese en historiese ontwikkeling van kegelsnedes in wiskunde. Die literatuurstudie sluit die versameling van gegewens oor die wiskundige opbou van kegelsnedes en projektiwe meetkunde in. Deur die teoretiese deurdenking en sistematisering van hierdie inligting word sowel die meetkundige en historiese oorsprong as die logiese wiskundige opbou van kegelsnedes, ondersoek. Die integrerende rol wat kegelsnedes in meetkunde, algebra en analitiese meetkunde kan speel spruit hieruit voort. Praktiese probleme, waarin die eienskappe van kegelsnedes 'n rol speel, word dan geïdentifiseer.

In hierdie studie mag dit lyk of daar 'n gaping tussen navorsing en onderrigpraktyk is omdat die navorsing los van 'n klaskamersituasie gedoen is. Hierdie navorsing moet as 'n belangrike stap in 'n groter projek gesien word. Confrey en Lechance (2000: 231) stel 'n navorsingontwerp voor wat 'n kragtige wyse is waarop positiewe veranderings in die kurrikulum aangebring kan word omdat dit die brug tussen onderrig en navorsing vernou. Dit staan bekend as "transformative teaching experiments through conjecture-driven research". 'n Belangrike komponent van hierdie navorsing is die bewering ('conjecture') wat gemaak word. Die bewering handel oor *inhoud* en *pedagogie*. In hierdie navorsing handel die inhoud oor die

gebruik van kegelsnedes en die pedagogie oor 'n geïntegreerde wyse van onderrig.

Confrey en Lechance verduidelik verder (2000: 235):

At points in its evolution, the conjecture should feel like a grand scheme beginning to emerge from many, previously disparate pieces, making them more cohesive.

Die doel van hierdie navorsing is die ontwikkeling van dié bewering. 'n Vereiste van "transformative teaching experiments through conjecture-driven research" is dat die bewering gegrond moet wees op 'n teoretiese raamwerk wat bestaan uit die ontleding van bestaande literatuur.

Usually it comes from a thoughtful and critical review of the literature to discern an anomaly that has been overlooked, unsolved, or addressed inadequately by one's colleagues. As a result, a theoretical discussion should funnel one from a broad set of theoretical claims to the specifics of the content to be imparted and how the conjecture is situated in that literature (Confrey & Lechance 2000: 236).

Die volgende stap van 'n groter navorsingsprojek (wat nie deel van hierdie studie is nie) is om die onderrig-eksperiment (teaching experiment) vir die bewering te ontwikkel. Die rede waarom hierdie onderrig-eksperiment nie deel van hierdie studie vorm nie is omdat dit volgens Confrey en Lechance (2000: 240) komplekse navorsing is wat 'n span navorsers vereis:

It should be noted that this form of complex research requires a team of researchers working on the project. This is not merely a response to the need for multiple data collectors, rather because of the need to discuss and refine our interpretations and plans continuously. Identifying the appropriate roles of the team's members and their foci of attention are important parts of the project. We found it useful to have individuals who would concentrate on the design and analysis of separate segments of the curriculum, whereas the project director was continuously responsible to guide the overall directions and work for the elaboration of the conjecture. Within a university where graduate students are in different stages of their studies, this design works very well.

1.6 **Begripsomskrywing**

1.6.1 **Kurrikulum**

In hierdie studie word die woord kurrikulum gebruik met betrekking tot die tweede hersiene uitgawe van die National Curriculum Statements Grades 10 – 12 (Schools): Mathematics. Die dokument is op 28 Oktober 2002 deur die Departement van Onderwys gepubliseer.

1.6.2 **Integrasie**

Integrasie is 'n woord wat wyd in die wiskundeonderrigveld gebruik word. Kurrikulumintegrasie kan verskillende vorme aanneem, van interdissiplinêre projekte tot saamgestelde kursusse (byvoorbeeld wiskunde vir biologieonderwysers), van

toegepaste algebra in die praktyk tot verskillende vakke in een kursus. Daarom onderskei ons in hierdie studie tussen verskillende vorme en vlakke van integrasie.

1.6.2.1 Vertikale integrasie

Vertikale integrasie (ook bekend as die spiraalbenadering) behels die gebruik van dieselfde temas oor verskillende leerfases heen. In die Suid-Afrikaanse kurrikulum is dit 'n bekende verskynsel. Faktorisering word byvoorbeeld in graad 9 en in graad 10 behandel. In graad 10 word voortgebou op die kennis wat in graad 9 verwerf is.

1.6.2.2 Horizontale integrasie

Met horizontale integrasie word bedoel die integrasie van meetkunde en algebra, of wiskunde en fisika, wiskunde met die leefwêreld, of selfs wiskunde met die werkpraktyk. Integrasie binne die dissipline van wiskunde op skoolvlak kan byvoorbeeld daartoe lei dat algebra meetkundig benader word. Met ander woorde, dat daar in die onderrig nie noodwendig onderskei word tussen meetkunde en algebra nie. Hierdie gedagte kom byvoorbeeld voor in die NCTM se Connection Standards (NCTM 2000a: 37):

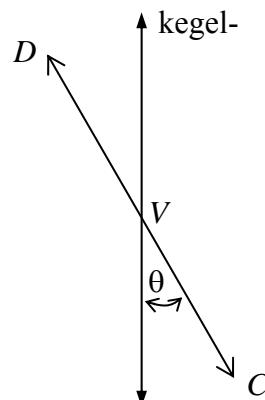
The Standards for grades 6 - 8 include a significant emphasis on algebra, along with much more geometry than has normally been offered in the middle grades, and call for the integration of these two areas.

Interdissiplinêre integrasie kan beteken dat 'n kursus soos wiskunde vir bioloë ontwikkel word, maar dit kan ook beteken dat wiskunde bloot gebruik word om probleme in 'n ander vakgebied (soos fisika) op te los. Met die klem wat die kurrikulum op probleemoplossing lê, is laasgenoemde vorm van integrasie baie relevant. Dit gee leerders die geleentheid om probleme in konteks op te los. Dit is 'n wyse waarop onderrig meer prakties gemaak kan word.

Hierdie studie konsentreer slegs op die graad 10- tot 12-wiskundekurrikulum soos in afdeling 1.6.1 genoem is. Dit handel oor die integrering van meetkunde en algebra, die integrering van wiskunde met toepassings, wiskunde met ander vakke en laastens die integrering van tegnologie (in hierdie geval Geometer's Sketchpad) met onderrig en leer van wiskunde.

1.6.3 Kegel en kegelsnedes

Die oppervlak wat gegenereer word deur 'n lyn DC om 'n as met 'n hoek θ te roeteer word 'n *kegel* genoem (sien Figuur 1-3). DC word die *kegelgenereerder*



genoem, die as word die kegel-as en θ word die semi-vertikale hoek van die kegel genoem.

Kegelsnede verwys na 'n parabool, 'n hiperbool of 'n ellips wat verkry kan word deur 'n dubbelkantige kegel met 'n platvlak te sny. 'n *Sirkel* word beskou as 'n spesiale geval van 'n ellips, daarom word slegs verwys na 'n ellips. Dit is egter ook moontlik vir die vlak om die kegel so te sny dat 'n punt, twee lyne of slegs een lyn verkry word, ons noem dit *gedegenereerde kegelsnedes*. Dit gebeur as die snyvlak die punt V bevat.

1.7 Verloop van die ondersoek

Afdeling 1.5 bevat 'n bespreking van die vier perspektiewe wat die voorgestelde kurrikulumbenadering in ag moet neem. In hierdie studie word die gebruik van kegelsnedes as integrerende faktor vanuit hierdie perspektiewe benader en geëvalueer. Hoofstuk 2 handel oor die psigologiese en pedagogiese perspektief van hierdie studie. In hierdie hoofstuk word die invloed van 'n geïntegreerde kennisstruktuur op die ontwikkeling van hoërordedenke ondersoek.

Hoofstukke 3 en 4 toon twee verskillende wyses waarop kegelsnedes benader kan word. Die historiese ontwikkeling van kegelsnedes is in hierdie twee hoofstukke verweef. In hoofstuk 3 word kegelsnedes gebruik deur van afstande gebruik te maak, met ander woorde 'n Euklidiese benadering. Ons kan by benadering dit beskryf as 'n moderne (analitiese) weergawe van die werk van Apollonius en die ou Griekse ongeveer 250 jaar voor Christus se geboorte. In hoofstuk 3 word 'n wyse getoon waarop die hiperbool, parabool en ellips vanuit een lokusdefinisie verkry kan word. Hierdie grafiese word dan ondersoek en meetkundig en algebraïes gedefinieer. Die eienskappe van die kegelsnedes word dan geïdentifiseer en die wyses waarop hierdie eienskappe gebruik kan word om kegelsnedes te konstrueer, word ook ondersoek.

In hoofstuk 4 word die kegelsnedes benader sonder om van enige afstand gebruik te maak, dit is 'n projektiewe benadering. Hier word kegelsnedes beskryf deur middel van lyne en punte. Hierdie benadering dateer grootliks uit die 16de en 17de eeu toe daar 'n herlewing in die ondersoeke na kegelsnedes was. Die werk handel oor die proses om die eenheid van die kegelsnedes (hyperbool, parabool en ellips) met behulp van projektiewe meetkunde te ondersoek. Die eienskappe van die kegelsnedes wat vanuit hierdie projektiewe benadering na vore kom, word dan gebruik om kegelsnedes

te konstreeer. Deur gebruik te maak van kegelsnedes kan sekere deelmeetkundes van projektiewe meetkunde geklassifiseer word as hiperbolies of ellipties. In hierdie hoofstuk word so 'n klassifisering van meetkundes ook ondersoek.

Hoofstuk 5 is gebaseer op die navorsing in hoofstuk 1 tot 4. In hierdie hoofstuk word die voorgestelde kurrikulum ontleed. Die ontleding handel meer spesifiek oor die volgende integrasiemoontlikhede van kegelsnedes in die kurrikulum:

- die integrering van leeruitkomste
- die integrering van wiskunde met probleme en toepassings uit die leerders se leefwêreld
- die integrering van wiskunde met ander vakke
- die integrering van tegnologie in wiskundeonderrig

Hoofstuk 6 is 'n samevatting van die studie en bespreek die resultate. 'n Belangrike komponent van hierdie hoofstuk handel oor verdere navorsing wat gedoen moet word om sodoende die gaping tussen die onderig-leer-praktyk en navorsing te oorbrug.

Hoofstuk 2: Psigologiese en pedagogiese fokus op geïntegreerde kurrikulum

Hierdie hoofstuk handel oor die psigologiese en pedagogiese onderbou van 'n geïntegreerde kurrikulum. Die *psigologiese perspektief* handel oor die wyse waarop fundamentele konsepte by leerders ontwikkel, terwyl 'n *pedagogiese perspektief* oor onderrig- en leeraangeleenthede handel (Dennis 2000: 799). In hierdie hoofstuk word die invloed van 'n geïntegreerde kennisstruktuur op die ontwikkeling van hoërordedenke ondersoek.

2.1 Konstruktivisme en integrasie

Oor die afgelope drie tot vier dekades het toenemende kennis van die kognitiewe wetenskappe die gedagte bevestig dat leerders verantwoordelik is vir die ontwikkeling van hulle eie verstaan en leer. Kurrikulumveranderings het noodsaaklik geword as gevolg van hierdie skuif na 'n meer konstruktivistiese siening oor leer:

This shift concerns the characterization of individual students' mathematical activity. The central metaphor of students as processors of information has been displaced by that of students acting purposefully in an evolving mathematical reality of their own making (Cobb 2000: 307).

Konstruktivisme is tans die hoofstroombenadering: "Currently much research in mathematics education is guided by, or consistent with, a constructivist perspective" (Seldon & Seldon 1998: 2). Piaget, wat eksperimenteel aangetoon het dat kennis aktief gekonstrueer word deur 'n leerder en nie passief oorgedra kan word deur die onderwyser nie, is een van die bekendste konstruktiviste (Boudourides 1998: 1). Volgens Piaget vind menslike intellektuele ontwikkeling plaas deur *aanpassings* en *herorganisasie*. Met die term *aanpassings* beskryf Piaget 'n proses van *assimilasie* waar eksterne ervarings verwerk of geassimileer word tot interne verstandstrukture. *Akkommodasie* handel oor die proses waar die interne verstandstruktuur aangepas word as 'n reaksie op die eksterne ervaring (Flavell, Miller & Miller 1993: 4). Menslike verstand dupliseer dus nie die leefwêreld nie, maar aan die ander kant ignoreer dit ook nie die leefwêreld nie. Die verstand bou sy eie kennisstrukture deur eksterne inligting te interpreteer, te transformeer en die bestaande kennis te herorganiseer. Alhoewel

hierdie twee prosesse onderskei word, kan hulle nie geskei word nie (Flavell *et al* 1993: 3):

..., it must be kept in mind that they are two in dissociable aspects of the same basic adaptational process – two sides of the same cognitive coin.

Skemp (1982: 19-22) verduidelik dat die vorming van wiskundige konsepte in twee stappe, naamlik abstraksie en klassifikasie, plaasvind. *Abstraksie* is die handeling om die kernooreenkoms tussen groepe van objekte te identifiseer, terwyl *klassifikasie* handel oor die gebruik van hierdie ooreenkoms om sodoende te bepaal of 'n sekere objek aan 'n sekere klas behoort. Die produk van hierdie proses is die vorming van 'n konsep en 'n konsepstruktuur. Die totale konseptuele struktuur staan as die *schema* bekend. Die begrip schema is alreeds deur Piaget gebruik.

Oor die afgelope dekades is baie navorsing oor 'verstaan' in die algemeen, en dan ook in die besonder oor 'verstaan in wiskunde' gedoen. Uit die werk van Skemp kan drie vorme van verstaan onderskei word. Dit is *instrumentele verstaan*, wat handel oor die vermoë om 'n wiskundige bewerking of algoritme uit te voer, *verwante verstaan*, wat die konstruksie en gebruik van verstandskonseptuele skemas behels, en *formeile of logiese verstaan*, wat die vermoë is om wiskundige simbole en notasies met die relevante wiskundige idees te verbind. Hiebert en Carpenter (1992: 65-71) het 'n teorie vir die verstaan van wiskunde ontwikkel, wat op die ou sowel as op nuwe leerpsigologie gebou is en wat in groot mate dié van Skemp insluit. Hiebert en Carpenter (1992: 65) gaan van die veronderstelling uit dat kennis intern voorgestel word en dat interne voorstelling gestructureer is en dat voorstellings op 'n sinvolle wyse aan mekaar verbind word. Vanuit hierdie perspektief definieer hulle verstaan soos volg: 'n wiskundige idee, feit of metode word verstaan as sy verstandelike voorstelling 'n deel van 'n interne netwerk vorm. Die gedagte kry ons alreeds in die agtiende eeu by Augustus De Morgan (soos aangehaal deur Arcavi en Bruckheimer 1989: 35):

There is much truth in the assertion that new knowledge hooks on easily to a little of the old, thoroughly mastered.

Die graad van verstaan word deur die sterkte en aantal verbindings bepaal:

The degree of understanding is determined by the number and strength of the connections. A mathematical idea, procedure, or fact is understood thoroughly if it is linked to existing networks with stronger and more numerous connections.

Die implikasie hiervan is dat die onderrig eerstens moet aansluit by die leerder se reeds bekende leefwêreld en tweedens dat dieselfde wiskundige begrip vanuit verskillende

velde van wiskunde hanteer moet word, om sodoende die verstandsvoorstellings te ‘verryk’ en te integreer. Ons sien dieselfde beginsel in die werk van Seldon en Seldon (1998) waar hulle verduidelik dat ’n kennisstruktur metafories gesien kan word as grafiese waarin die nodes konsepte voorstel en die verbindinglyne die verwantskappe wat tussen die konsepte bestaan. Davis (1992: 228) stel dit soos volg: “one gets the feeling of ‘understanding’ when a new idea can be fitted into a larger framework of previously-assembled ideas.” Netwerke van verstandelike voorstellings word stadig gebou soos wat nuwe inligting aan reeds bestaande inligting verbind word, of soos wat nuwe verwantskappe tussen vorige onverbinde voorstellings gekonstrueer word. Verstaan groei namate netwerke groter en meer gestructureer raak en nuwe netwerke ontstaan. Die groei van netwerke word gekarakteriseer deur sowel die verandering as die toevoeging tot netwerke. Piaget se teorie oor die oorgang van een verstand-toestand na ’n ander sluit hierby aan. Tall (1991: 11) noem hierdie prosesse *veralgemening* en *abstraksie*. *Veralgemening* behels ’n uitbreiding van bekende prosesse terwyl *abstraksie* ’n massiewe verstandelike herorganisasie behels en ’n verstandelike entiteit tot gevolg het. Voorstellings word herrangskik, nuwe verbinding word gevorm, en ou verbinding kan verander of verwyder word. Herorganisasie manifesteer as nuwe insigte of as tydelike verwarrings. Die vlak waarop leerders wiskundige aktiwiteite kan bemeester hang af van die wyse waarop kennis intern gekonstrueer word. Volgens hierdie teorie hang die mate van verstaan van die aantal en gehalte van verbinding (verwantskappe) tussen konsepte af (Hiebert & Carpenter 1991: 67). Tall (1991: 12) waarsku dat die praktyk van leerders wat wiskundige konsepte memoriseer, sonder om dit te verstaan, tot rampsspoedige gevolge kan lei! Die gevolg hiervan is dat kennis wat bloot gememoriseer is, beperk is en nie gemaklikerwys op nuwe situasies toegepas kan word nie omdat dit nie met die reeds bestaande kennisstrukture geïntegreer word nie. Om ’n probleem op te los, wat hoërordedenke vereis, is dit vir ’n leerder nodig om relevante kennis op te roep, die probleem te interpreteer en dan relevante konsepte vir die oplossing op te roep. Die blote onthou van feite is nie genoeg nie. Wat nodig is, is verstandstrukture wat die leerder help om met nuwe idees na vore te kom deur nuwe wiskundige verwantskappe te ontdek en raak te sien (Seldon & Seldon 1998: 2). Die wyse waarop kennis intern verbind is, en die rykdom van hierdie kennis en verbinding, sal bepaal of verwantskappe ‘raakgesien’ word. Dit beteken dat konseptuele ryk kennis, dit is kennis wat ryk is aan verwantskappe,

probleemoplossingsvaardighede sal verbeter. Dit is onder ander om hierdie rede dat die NCTM (National Counsel of Teachers of Mathematics) 'n geïntegreerde kurrikulum propageer (NCTM 2000a: 354):

When students can see the connections across different mathematical content areas, they develop a view of mathematics as an integrated whole. As they build on their previous mathematical understandings while learning new concepts, students become increasingly aware of the connections among various mathematical topics. As students' knowledge of mathematics, their ability to use a wide range of mathematical representations, and their access to sophisticated technology and software increase, the connections they make with other academic disciplines, especially the sciences and social sciences, give them greater mathematical power.

Om suksesvol in wiskunde te wees is dit wenslik om ryk verstandelike voorstellings van konsepte te hê aangesien verskillende wiskundige situasies op verskillende wyses benader word. 'n Goed gestruktureerde kennisstruktuur is 'n voorvereiste vir hoërordedenke.

Onderrig wat lei tot veelvuldige verbindings tussen konsepte sal dus gevolglik lei tot 'n hoër graad van verstaan (Dreyfus 1991: 32):

In more favourable cases, several mental representations for the same concept may complement each other and eventually may be integrated into a single representation of that concept.

'n Wyse waarop leerders gehelp kan word om ryk verstandelike voorstellings te ontwikkel, is deur onderrigmateriaal te gebruik wat spesifiek fokus op die verwantskappe tussen wiskundige konsepte (NCTM 2000a: 288):

One way to have students see mathematics in this way is to use instructional materials that are intentionally designed to weave together different content strands. Another means of achieving content integration is to make sure that courses oriented toward any particular content area (such as algebra or geometry) contain many integrative problems - problems that draw on a variety of aspects of mathematics, that are solvable using a variety of methods, and that students can access in different ways.

Die belangrikheid van 'n geïntegreerde materiaal kan gesien word in 'n projek wat deur die National Science Foundation befonds word, naamlik die 'Connected Geometry' projek (Education Development Center 1995):

The overarching goal of Connected Mathematics is to help students and teachers develop mathematical knowledge, understanding, and skill, as well as awareness and appreciation of the rich connections among mathematical strands and between mathematics and other disciplines.

Die Connected Mathematics Project sluit ook aan by die integreringsgedagte van die National Council of Teachers of Mathematics se Standards vir skoolwiskunde vir K-12 (NCTM 2000a: 354). In 'n geïntegreerde kurrikulum word wiskundige idees verbind om sodende die leerders se verstaan te verdiep en daar mee saam ook hulle vermoë om wiskunde toe te pas.

2.2 Meetkundige kognitiewe ontwikkeling

In die vorige afdeling is die belangrikheid om onderrig by die leerder se kennis aan te sluit benadruk. In die Connected Geometry projek is meetkunde as voertuig gebruik om by die leerders se informele kennis aan te sluit. Die rede hiervoor is omdat meetkunde handel oor mense se praktiese en visuele aktiwiteite in die wêreld rondom hulle:

Geometry is grasping space ...that space in which the child lives, breathes and moves.
The space that the child must learn to know, explore, conquer, in order to live, breathe, and move better in it (Freudenthal 1973: 403).

Meetkunde handel oor die ruimtelike wat deur die sintuie ondersoek kan word, maar meer nog, ook die wyse waarop die ruimtelike in die verstand voorgestel word. Visualisering behels dus begrip van dit wat gesien word:

If mathematics is the science of patterns, it is natural to try to find the most effective ways to visualize these patterns and to learn to use visualization creatively as a tool for understanding. This is the essence of mathematical visualization (Zimmerman & Cunningham 1991: 3).

Piaget onderskei tussen perceptuele en representatiewe vlakke. Die *perceptuele vlak* handel oor die kennis wat uit direkte kontak met 'n voorwerp volg, terwyl die *representatiewe vlak* handel oor die vermoë om nuwe situasies te visualiseer en voorspellings te maak. Tall, Gray, Bin, Crowley, DeMarois, McGowen, Pitta, Pinto, Thomas en Yusof (2001: 81) wys daarop dat die ontwikkeling van abstrakte konsepte begin met "... the ability to perceive things, to act on them and to reflect upon these actions to build theories". Hierdie konseptualiseringsproses is 'n stadige proses (Clements & Battista 1992: 442). In meetkunde sal konsepte soos vierkant, reghoek, parallelogram en veelhoek oor 'n lang tyd in 'n konseptuele hiërargie ontwikkel. Piaget was 'n voorstander van direkte hiërargies verstandelike ontwikkeling wat deur fisiese ontwikkeling voorafgegaan is. Piaget en Inhelder (1971: 10) het 'n invloedryke teorie oor kinders se konsepsuele ruimtelike ontwikkeling geformuleer. Die twee pilare waarop hulle teorie gebou is, is dié van konstruktivisme en 'topological primacy'. Piaget en Inhelder (1971: 10) glo dat die progressiewe organisasie van meetkundige idees in 'n definitiewe volgorde plaasvind, eers word topologiese, dan projektiewe en daarna Euklidiese verwantskappe gevorm. Freudenthal (1979: 57) was gekant teen hierdie siening en het hom soos volg daarteen uitgespreek:

Piaget's stelling, die betrekking heeft zowel op de apperceptieve en representatieve als op de cognitieve ontwikkeling, getuigt van groot vertrouwen in wiskunde hierarchieën, maar lijkt a priori uiterst onwaarsschijnlijk. De bewijsmiddelen, zoals in aandragen, zijn ten dele absurd en ten dele geheel niet relevant, en waar dit wel het geval is, bewijzen de proeven net het tegendeel.

Die algemene siening vandag is dat die ontwikkeling van 'n hiërargie nie van bo na onder, of van onder na bo geskied nie:

It is interesting to note that these classifications do not begin from the bottom up, or from the top down, but in terms of centrally typical levels of recognition" (Tall *et al* 2001: 83).

Die ontwikkeling van so 'n hiërargiese struktuur behels dus kognitiewe konstruksies en rekonstruksies van afsonderlike meetkundige kategorieë. Hierdie rekonstruksies om 'n hiërargiese struktuur te vorm eindig nie hier nie:

Further re-constructions are necessary to see a shape not as a physical object, but as a mental object with perfect properties, and then to imagine geometry not just in terms of two and three dimensional Euclidean geometry, but as a variety of different geometries (affine, projective, elliptic, hyperbolic, differential, etc.) (Tall *et al* 2001: 83)

In die werk van die Van Hieles word hierdie kognitiewe ontwikkeling verder ondersoek. Die Van Hiele teorie (1999: 315, 1986: 39) ondersteep die gedagte van bepaalde hiërargiese stappe waardeur 'n leerder moet ontwikkel om meetkunde te leer. Hierdie teorie onderskei tussen vyf verskillende denkvlakke, naamlik erkenning, analise, ordening, deduksie en die teoretiese. Die kenmerkende eienskap van die visualiseringsvlak, die eerste vlak, is dat die leerders figure in hul geheel herken. Alhoewel onderskei kan word tussen driehoede en parallelogramme kan die eienskappe wat hierdie figure van mekaar onderskei nie geïdentifiseer word nie. Eers in die tweede vlak, naamlik analise, begin leerders die eienskappe van figure analyseer. Die ordening van figure volgens hulle onderskeie eienskappe vind eers plaas op die derde vlak. Hier gaan dit oor die logiese verwantskappe tussen figure. Dit is egter eers in die vierde vlak, naamlik deduktiewe vlak, waarin die leerders die rol van bewysvoering begin verstaan. Alhoewel hierdie hiërargiese model van Van Hiele 'n belangrike bydrae lewer tot meetkundeonderrig, is daar nou 'n skuif na 'n meer buigsame en geïntegreerde siening. Ons sien dit in 'n uitspraak deur 'n werkgroep by International Congress on Mathematical Education (ICME-8) in Sevilla. Hierdie groep het bestaan uit internasionale navorsers soos John Mason, Paul Ernest, Eddie Gray, David Tall, Tommy Dreyfus, Anna Graeber, Tom Cooney en Michèle Artigue. Die werkgroep het tot die volgende gevolgtrekking gekom (Seldon & Seldon 1996):

In summing up the ICME Working Group's discussions, Michèle Artigue noted that over time a shift has occurred from a hierarchical view of knowledge (Piaget's stages, van Hiele levels) to a more flexible, connected view.

In hierdie verband merk Clements en Battista (1992: 426) op dat idees op 'n geïntegreerde wyse oor tyd ontwikkel en nie noodwendig in 'n sekere volgorde nie. Dit maak die Van Hiele teorie nie waardeloos nie. Die teorie gee aan ons insig in leerders se verstaan van meetkunde en verduidelik onder meer waarom leerders sekere foute herhaaldelik begaan. Pegg (1997: 247) het byvoorbeeld die Van Hiele vlakbeskrywings uitgebrei en aangetoon hoe dat dit die onderwysers kan help om meer insig in die leerders se verstaan van meetkunde te verkry.

2.3 Integrering in die kurrikulum

In afdeling 2.1 wat handel oor konstruktivisme het die belangrikheid vir leerders van die bou op voorkennis sterk na vore gekom. As ons dink aan geïntegreerde kurrikulums is die basiese beginsel dus die integrering van 'n leerder se bestaande kennis met 'nuwe' kennis:

...to help teachers and students engage in meaningful mathematical activity by offering students a chance to understand and appreciate the connections and unifying themes within mathematics, and to build on the connections between students' backgrounds and mathematics (NCTM 2000b: 16)

Hierdie agtergrondkennis verwys na informele kennis, wiskundige kennis, kennis vanuit die leerder se leefwêreld, kennis van ander vakke of kennis uit ander wiskundeterreine, soos meetkunde. Die tweede voorlopige weergawe van die graad 10-tot 12-kurrikulum wys op die belangrikheid van integrering van kennis (Departement van Onderwys 2002a: 4). Soos alreeds in afdeling 1.1 vermeld, is vier vorme van integrasie ter sprake. Die kurrikulum verwys na die integrering van meetkunde en algebra (met behulp van koördinaatmeetkunde), die integrering van wiskunde met die werklike lewe (probleemgesentreer, onder andere deur modellering), en die integrering van wiskunde met ander vakke. Die gebruik van tegnologie word in die kurrikulum beperk tot die opsionele gebruik van dinamiese meetkundesagteware vir ontdekkingsoeleindes in meetkunde. Hierdie afdeling fokus op hierdie vorme van integrasie.

2.3.1 Integrering van meetkunde en algebra

Wessels en Van Niekerk (2001: 91) glo dat die ontwerp van 'n kurrikulum voorsiening moet maak vir die integrering van die getal en die visuele en dat die twee velde gelyktydig aangespreek moet word. Visualisering gee die geleentheid tot integrasie op

verskillende vlakke en bevorder die verstaan van wiskunde. Ons sien dit in die definisie van Zimmerman en Cunningham (1991: 3):

Mathematical visualization is the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding.

Nuwe kennis kan verryk word deur middel van visuele voorstellings, maar nuwe kennis kan ook op bestaande visuele voorstellings gebou word. Probleme wat in meetkundige terme beskryf word, spreek dadelik tot 'n mens omdat die probleem gevisualiseer kan word. Dit kan volgens Sibley (1998: 61) selfs tot die visualisering van algebraïese relasies en vergelykings lei:

We make a connection between geometric concepts and their algebraic counter parts explicit by building a model of geometry in algebra. ... Geometric axioms and theorems become algebraic facts to be verified. In turn, algebraic equations and relations can be visualized.

Die CUPM (Committee on the Undergraduate Program in Mathematics) van die Mathematical Association of America (MAA) het riglyne in 'n kurrikulumdokument uitgereik vir die onderrig van wiskunde vir die volgende dekade. Een van die aanbevelings is (MAA 2001: 6):

Geometry, long relegated to a secondary status in the undergraduate curriculum, needs to be rejuvenated and given a more central role in the education of all students. It provides an excellent framework for courses that integrate diverse branches of mathematics, and workshop participants believe that it is naturally appealing and accessible to undergraduates.

Meetkundige en wiskundige denke kan nie van mekaar geskei word nie (Russell 1996):

Geometric thinking is an absolute necessity in every branch of mathematics, and, throughout history, the geometric point of view has provided exactly the right insight for many investigations (complex analysis, for example).

Leerders ontwikkel dus 'n baie ryker en dieper verstaan van wiskunde en die toepassing van wiskunde as hulle dieselfde verskynsel of idee van verskillende hoeke benader. Dit is daarom belangrik dat leerders hierdie tussenspel van meetkunde en algebra beleef, asook die verskillende wyses waarop wiskundige verskynsels voorgestel kan word (NCTM 2000a: 288). Die integrerende rol van meetkunde blyk ook uit die historiese ontwikkeling van wiskunde. In Moise (1990: 249) se beskrywing van Descartes se werk toon hy die integrerende rol van algebra en meetkunde soos volg aan:

His greatest contribution to mathematics was the discovery of the coordinate systems and their application to problems of geometry. Ever since then algebra and geometry have worked together, to the advantage of both.

Fishback (1969: 71) glo dat die gebruik van koördinate gelei het tot die samesmelting van meetkunde en algebra en wys op elk se voordele:

This introduction of coordinates achieves a fusion of geometry and algebra, ... In analytical geometry we are able to discover and prove geometric facts by algebraic processes, these processes frequently leading to proofs simpler than the synthetic geometric ones.

Die voordeel van die algebraïesering van meetkundeprobleme is dat eenvoudige algebraïese tegnieke gebruik kan word om meetkundeprobleme op te los (Resnikoff & Wells 1973: 202). Aan die ander kant is dit voordelig om algebraïese probleme meetkundig te beskryf. Sibley (1998: 60) wys op die belangrikheid van die samesmelting van meetkunde en algebra:

The fruitful union of algebra and geometry called analytical geometry has become an indispensable tool for mathematicians, scientist, and those in many other fields.

2.3.2 Probleemoplossing en geïntegreerde onderrig

In hierdie studie gaan die gedagte van integrasie dus verder as slegs dié van teoretiese kennis; dit gaan oor die bymekaar bring van algebra, meetkunde, alledaagse probleme en die toepassings daarvan. Ferguson (1999) het in 'n onderhou die voordele van so 'n integrasiedagte verduidelik:

They provide the opportunity for students to use a variety of conceptual tools and skills to address problems in a context.... Make connections with the real world, with other disciplines, and in particular, with science. They allow students to see multiple views of concepts. This allows students to develop a very different understanding of key mathematics and science ideas than might be the case with more traditional approaches.

Probleemoplossing skep die geleentheid om wiskunde dus meer relevant, meer opwindend en aanloklik te maak. Dit skep vir die leerder die geleentheid om die verbande tussen konsepte te sien wat tot 'n hoër vlak van verstaan lei. Maar dit is nie al nie, dit gee aan die leerders die geleentheid om verskillende konsepte te integreer en om op dié wyse nuwe verbinding te bou. Probleemoplossing is die oefenveld van 'n geïntegreerde konseptuele ontwikkeling. Om 'n probleem op te los moet verskillende konsepte gebruik word. Daar moet dus alreeds verbinding tussen die konsepte wees, maar daar gaan ook nuwe verbinding ontstaan in die proses om die probleem op te los. Hierdie interne konsepte kan ook selfs probleemoplossingstrategieë insluit. Met ander woorde, deel van die voorkennis behoort ook probleemoplossingstrategieë in te sluit.

'Goeie' probleme kan vanuit die leerder se leefwêreld kom, uit wiskunde self, asook uit toepassings van wiskunde. Sulke probleme bring verskillende velde van wiskunde bymekaar. Een van die CUPM (Committee on the Undergraduate Program in Mathematics) (MAA 2001: 6) se aanbevelings vir die onderrig van wiskunde in die

volgende dekade is dat “there should be significant exposure to the deep interconnections and interplay among diverse mathematical topics and current applications”.

Probleemgesentreerde onderrig ontwikkel dus nie net kritiese en kreatiewe denke nie, maar ook metakognitieve vaardighede. Roetine-oefeninge word nie as probleme gesien nie want dit vereis nie ’n diepgrondige begrip nie. Met roetine-oefeninge kan leerders sogenaamd sukses ervaar, sonder om werklike begrip te hê. Leerders kan dus glo dat hulle verstaan terwyl dit nie noodwendig die geval is nie. Maar in ’n werklike probleemgesentreerde benadering kan die onvermoë om ’n probleem op te los ’n aanduiding wees dat die relevante kennisstrukture nie voldoende is nie. Seldon en Seldon (1998) verduidelik dit soos volg: “This suggest that their knowledge is not well structured because they don’t have access to it.” Hulle glo dat leerders gehelp kan word om inligting wat vir die oplossing van ’n probleem nodig is op te roep en te kombineer deur klem te lê op die konteks van ’n probleem: “The context of a problem can enhance the probability of assessing these local knowledge is relevant to the particular situation” (Seldon & Seldon 1998). In ’n studie deur Spiro, Feltovich, Jacobson en Coulson (1994) wat handel oor swak gestruktureerde kennisstrukture en die oorsake daarvan (Patterns of Advanced Learning Deficiency in Ill-Structured Domains and Remedies in "Cognitive Flexibility Theory) het hulle tot die gevolgtrekkings gekom dat oorvereenvoudiging en kompartementalisering die mees algemene oorsake van swak gestruktureerde kennisstrukture is. Daarom lê Schoenfeld klem op die gebruik van ‘ryk’ probleme en glo dat dit kennisoordrag bevorder. Hy glo dat ryk probleme juis probleme is wat na vore kom uit werklike probleemsituasies (Schoenfeld 1992: 365): “Present problem situations that closely resemble real situations in their richness and complexity so that the experience that students gain in the classroom is transferable.” Cuoco (1998: 103) verduidelik dat ryk probleme nie alleen tot werklike situasies beperk is nie, maar dat dit ook in teoretiese situasies voorkom:

The dialectic between problem-solving and theory-building is the fuel for progress in mathematics, and mathematics education should exploit its power. Problems can be both sources for and applications of methods, theories, and approaches that are characteristically mathematical.

2.3.3 Integrasie van wiskunde met ander vakke

As die leerders 'n verskeidenheid van probleme in 'n realistiese konteks moet oplos, is integrasie tussen verskillende vakke onvermydelik. Wiskundige kennis kry betekenis en word kragtig in die toepassing daarvan. 'n Groot bron van ryk en realistiese probleme kom uit onder andere fisika, biologie, rekenkunde, rekenaarwetenskap en tegnologie. Ander dissiplines is 'n reeds ontwikkelde bron van effektiewe konteks waarin die leer van wiskunde kan plaasvind (Ferguson 1999):

It is important that these links between disciplines be carefully explored, analysed, and discussed to emphasize for students the pervasiveness of mathematical knowledge and mathematical thinking in all subject areas.

Volgens Ferguson is baie wiskundiges bang dat so 'n interdissiplinêre integrasie kan lei tot die persepsie dat wiskunde slegs 'n vakgebied is wat 'n gereedskap vir ander vakke is. Hy dink dat dit nie die geval is nie, maar glo dat dit daartoe sal lei dat meer leerders in suiwer wiskunde sal belangstel as hulle die krag van wiskunde in ander vakke ervaar (Ferguson 1999):

Let me add here that in an interdisciplinary program that spans several years of a student's education, it is critical that key mathematics ideas get expanded and developed. I would bet that if an interdisciplinary program meets that need, some students will develop an interest in the power of pure mathematical ideas. Indeed, more students may develop an interest in pure mathematics via an interdisciplinary program than through a diet of "pure mathematics" projects!

2.4 Geïntegreerde kurrikulumprojekte

2.4.1 Kurrikulumintegrering in die VSA

In die VSA is 'n paneel deur die regering saamgestel om 61 kontemporêre kurrikulumprogramme te evalueer en te beoordeel. Die beoordelingskriteria kan in vier kategorie verdeel word:

- Die kwaliteit van die program
- Die bruikbaarheid van die program
- Opvoedkundige waarde van die program
- Getuienis van effektiwiteit van die program

Die volgende vyf programme is aangewys as hoogs uitstaande en het aan al die bogenoemde vereistes voldoen:

- Cognitive TutorTM Algebra
- College Preparatory Mathematics (CPM)
- Connected Mathematics

- Core-Plus Mathematics Project
- Interactive Mathematics Program (IMP)

Dit is opmerklik dat al vyf kurrikulumprojekte op integrering fokus. Die volgende inligting oor die projekte is uittreksels en samevattings van inligting wat beskikbaar is in 'n publikasie deur die ENC (Eisenhower National Clearinghouse for Mathematics and Science Education): Exemplary promising mathematics programs.

2.4.1.1 Cognitive TutorTM Algebra

Carnegie Learning's Cognitive TutorTM Algebra is 'n algebrakursus wat tegnologie met die onderrig integreer. Dit is 'n eenjaarkurrikulum wat deur leerders van grade 7 tot 12 gebruik kan word. Dit handel oor al die tipiese hoërskool algebraonderwerpe. As deel van die evaluasie in die program het Cognitive TutorTM Algebra-assesseringstandaarde vasgestel wat die basiese funksionele vaardighede, dit is hoërordevaardighede en probleemoplossingsvaardighede, meet.

Die jaareinde-assessering van drie Pittsburgh hoërskole (1993-1994) het getoon dat leerders wat aan die program deelgeneem het se resultate tussen 50% en 100% verbeter het. In 'n vergelykende studie met leerders wat 'n tradisionele kurrikulum gevolg het, is bevind dat die Cognitive TutorTM Algebra-leerders statisties beduidend beter resultate lewer in probleemoplossing sowel as in gestandaardiseerde assessering.

2.4.1.2 College Preparatory Mathematics (CPM)

College Preparatory Mathematics (CPM) is 'n hoërskool kurrikulum wat oor vier jaar strek en die inhoud van algebra en meetkunde integreer met konseptuele verstaan en probleemoplossingsvaardighede. Hierdie kurrikulum kom ooreen met tradisionele kurrikulums wat leerders voorberei vir universiteitswiskunde.

Verskeie vergelykende navorsing het aangetoon dat CPM konstant beter resultate lewer. Dit sluit nege verskillende studies in wat ongeveer 30 000 leerders in Kalifornië insluit. Leerders uit verskillende agtergronde se resultate het verbeter.

2.4.1.3 Connected Mathematics

Connected Mathematics, is 'n kurrikulum wat deur die Connected Mathematics Project (CMP) ontwikkel is. Dit is 'n omvattende, probleemgesentreerde graad 6- tot 8-wiskundekurrikulum. Die doel van hierdie program is integrasie in wiskunde, integrasie van wiskunde met ander vakke, en laastens die integrasie van wiskunde met die leefwêreld.

Navorsing het aangetoon dat dié kurrikulum 'n beduidende impak maak op leerders se verstaan, hulle wiskundige beredenering sowel as hulle probleemoplossings-vermoë. Hierdie navorsing is gebaseer op verskillende vergelykende studies asook op toetse ooreenkomstig NCTM se standarde.

2.4.1.4 Core-Plus Mathematics Project

Contemporary Mathematics in Context is 'n geïntegreerde wiskunde-wetenskap-kurrikulum vir hoërskoolleerders. Die kurrikulum is deur Core-Plus Mathematics Project (Core-Plus) ontwikkel om leerders voor te berei vir universiteit, ander loopbane asook vir die alledaagse lewe. Die kurrikulum beklemtoon wiskundige modellering en sluit deurgaans die gebruik van grafiese sakrekenaars in. Core-Plus integreer verskillende onderrigstrategieë. Dit verseker dat 'n diverse groep leerders by hierdie program kan baat en die geleentheid het om wiskundige konsepte deeglik te bemeester.

Navorsing het aangetoon dat dié kurrikulum 'n beduidende impak maak op leerders se verstaan, die ontwikkeling van hulle vermoë om te ondersoek, die leerders se wiskundige beredenering en hulle probleemoplossingvaardighede.

2.4.1.5 Interactive Mathematics Program (IMP)

Die Interactive Mathematics Program (IMP) is 'n vierjarige omvattende probleemgesentreerde hoërskoolkurrikulum wat ontwikkel is deur die San Francisco State University en Sonoma State University. Die kurrikulum integreer tradisionele inhoud, soos algebra, meetkunde en trigonometrie met ander onderwerpe. Die program is daarop gemik om leerders voor te berei vir verdere studie sowel as vir werk na skool.

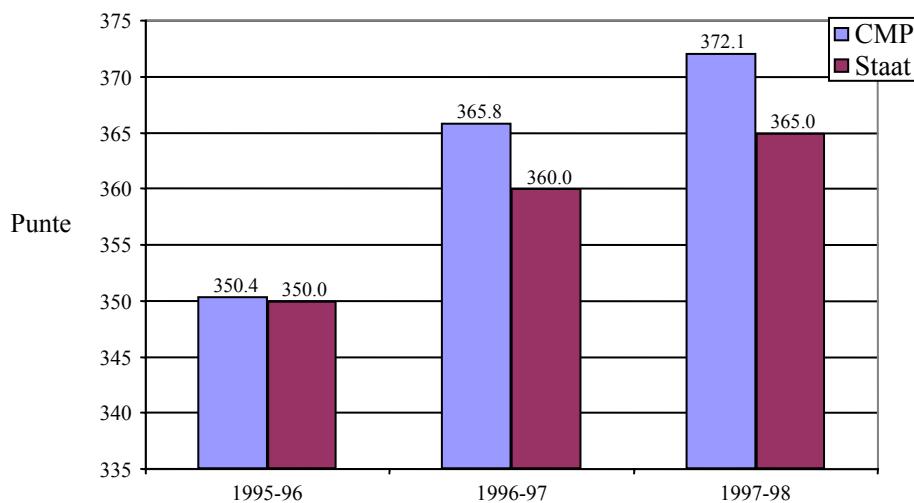
IMP se evaluasie sluit vyfjaarlange onafhanklike navorsing deur die Wisconsin Center for Education Research (Universiteit van Wisconsin) in. IMP leerders het beduidend beter in probleemoplossing presteer as leerders in tradisionele skole.

2.4.2 Fokus op die Connected Mathematics Project (CMP)

In die vorige afdelings is oorsigtelik na die resultate van verskeie kurrikulumprojekte gekyk. Hierdie afdeling fokus op die kurrikulumprojek wat in afdeling 2.4.1.3 beskryf is. Die redes waarom huis op die resultate van hierdie kurrikulumprojek gefokus word, is omdat die tipe en wyse van integrering waarop die CMP fokus ooreenkom met die integrasie waarop hierdie studie fokus. 'n Tweede rede is die hoeveelheid en die

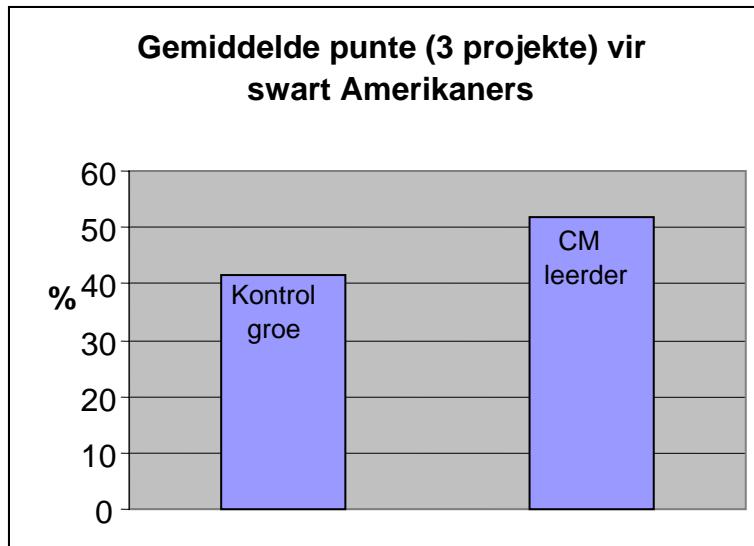
volledigheid van die navorsing en navorsingsresultate wat beskikbaar is. Die derde rede waarom hierdie afdeling op die CMP navorsingsresultate fokus is omdat die resultate voorsiening maak vir 'n groot verskeidenheid van leerders, dit sluit swart Amerikaners en leerders uit lae-inkomstegroepe in. Kwantitatiewe resultate toon herhaaldelik aan dat CMP leerders net so goed, of beter presteer as ander leerders in toetse wat handel oor basiese vaardighede. In toetse wat handel oor probleemplossingsvermoë, konseptuele verstaan, en proporsionele beredenering doen die CMP-leerders aansienlik beter as ander leerders. Hierdie resultate word gereflekteer deur verskillende navorsing deur Hoover, Zawojewski en Ridgway (1997).

Gedurende 1996 tot 1999 het die Maine Mathematics and Science Alliance (MMSA) skole drie jaar lank gehelp met die implementering van die CMP kurrikulum. Gedurende hierdie tydperk is leerders se prestasies gemonitor. Die CMP leerders het deurgaans beter presteer as leerders in die staatskole, soos in Figuur 2-1 aangetoon. Die impak van hierdie program het ook met die duur daarvan toegeneem.



Figuur 2-1

Verskeie navorsingsevaluasie toon dat hierdie geïntegreerdekurrikulumprojek alle studente help, maar in besonder die swart Amerikaners en die leerders uit lae-inkomstegroepe. 'n Studie deur Lapan, Reys, Barnes en Reys (1998) waarin hulle die impak van 'n eenjarige implementering van die geïntegreerde kurrikulum op wiskundeprestasie ondersoek het, het getoon dat die prestasie van swart Amerikaners, in probleemplossing, beduidend beter was as leerders in die kontrolegroep (sien Figuur 2-2).



Figuur 2-2

Van 1995 tot 1997 is alle leerders in Arkansas geëvalueer (O’Neal & Robinson-Singer 1998). Die CMP leerders het deurgaans beduidend beter gevaaar as die kontrolegroep. ’n Interessante faset van hierdie studie is die feit dat die CMP leerders in die twee armste distrikte (76% van die leerders in hierdie distrikte ontvang gesubsidieerde middagtes) se verbetering nie net beter as die kontrolegroep was nie, maar ook dat die verbeterings hoër was as in enige ander distrik. Dit beteken dat leerders uit arm gemeenskappe die meeste by ’n geïntegreerde kurrikulum gebaat het.

Een van die skooldistrikte in die VSA, wat bekend staan as die Ann Arbor distrik, het die CMP kurrikulum in die skooljaar 1996-1997 ingevoer. Leerders in hierdie distrik het konstante verbetering getoon. In die skooljaar 1996-1997 was 68% van die leerders in graad 7 se prestasie op ’n bevredigende vlak. Met die implementering van die CMP kurrikulum het dit in die skooljaar 1998-1999 verbeter tot 75%. Die grootste verbeterings het egter voorgekom onder swart Amerikaanse leerders. Hulle verbetering in die bogenoemde kategorie en jaar was van 22% tot 39%.

2.4.3 Mathematics in Context (MiC) projek

’n Belangrike en invloedryke projek wat ook genoem moet word, is Mathematics in Context (MiC). Dit word gefinansier deur die NSF en het ten doel om ’n omvattende wiskundekurrikulum te ontwikkel wat aan die NCTM se Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics voldoen. Die projek is gebou op die kennis en ervaring van die Nederlanders om ’n navorsinggebaseerde versameling van materiaal vir die 21ste eeu te ontwikkel (Shafer & Van Reeuwijk 1994: i). Die Nederlandse

navorser, met meer as 20 jaar se ondervinding in die ontwikkeling van materiaal, was verantwoordelik vir die oorspronklike voorlopige ontwikkeling. Die verdere ontwikkeling van die materiaal en die toetsing daarvan reflekteer die gesamentlike poging van die University of Madison-Wisconsin en die Freudenthal Instituut in Utrecht. Hierdie projek kan beskou word as 'n geïntegreerde kurrikulumprojek:

Although many units emphasize the principles within a particular mathematical domain, most involves ideas from several domains, and emphasizes the interconnectedness of mathematical ideas (Shafer & Van Reeuwijk 1994: i).

The Middle level can be characterized by some key words as making connections, integration and problem solving (Shafer & Van Reeuwijk 1994: 12).

Die impak van hierdie projek op leerders se prestasie word in verslag deur Wisconsin Center for Educational Research (1997) saamgestel. Die volgende opmerking is gemaak oor die ontwikkeling van hoërordedenke:

Consistently there was evidence of higher-order thinking and analysis in all of the classes, not just the honors class. One teacher commented that some of the student work on the final test demonstrated a level of maturity about mathematical reasoning that is rarely evident in students in first-year algebra.

Hierdie sentrum is besig met twee groot volskaalse navoringsprojekte om die impak van die kurrikulumprogram op studenteprestasie oor 'n tydperk van drie jaar te bepaal.

2.5 **Samenvatting**

'n Kurrikulum is dus meer as 'n versameling van aktiwiteite "...it must be coherent, focused on important mathematics, and well articulated across the grades" (NCTM 2000a: 16). Davis (1992) verduidelik die impak van 'n geïntegreerde kurrikulum soos volg:

They are often very engaging, thus allowing students of varied backgrounds, achievement levels, and interests to find a "place." Much of mathematics and science instruction is hierarchical, allowing little opportunity for those who cannot or choose not to follow that path to develop their abilities.

Begrippe soos integrasie, probleemoplossing en modellering waarop die kurrikulum klem plaas kan nie van mekaar geskei word nie. 'n Voorvereiste vir probleemoplossing en modellering is huis 'n goed geïntegreerde kennisstruktuur.

Mathematical modeling is one of the riches forms of representation in mathematics. It requires students to work with and apply a variety of mathematical concepts, processes, and relationships. Students must be able to connect, through creative problem solving, their understanding of specific content to the modeling situation (Dossey, Crone, Giordano & Weir 2002: v).

Aan die ander kant sal probleemoplossing en modellering ook die ontwikkeling van 'n geïntegreerde kennisstruktuur bevorder. Die verbetering in prestasie, spesifiek prestasie in hoërordedenke, soos probleemoplossing is 'n bewys dat geïntegreerde

kurrikulumprogramme die ontwikkeling en gebruik van hoërordedenke bevorder. Die empiriese resultate toon dat die doel van geïntegreerde projekte, soos onder andere verduidelik deur die projek wat deur die National Science Foundation befonds word, naamlik ‘Connected Geometry’ wel in hulle doel slaag:

...to help teachers and students engage in meaningful mathematical activity by offering students a chance to understand and appreciate the connections and unifying themes within mathematics, and to build on the connections between students' backgrounds and mathematics (Education Development Center 1995).

Uitkomsgebaseerde onderwys wat die fondament van Suid-Afrika se kurrikulum is, streef daarna om alle leerders in staat te stel om tot hulle volle potensiaal te ontwikkel (Departement van Onderwys 2001b: 3). Die resultate van die CMP toon aan dat 'n meer geïntegreerde kurrikulum huis kan meewerk om hierdie doel te bereik, aangesien alle leerders se prestasies, maar in besonder swart en minderbevoordeerde leerders se prestasie, verbeter het. Die vraag is egter op watter wyse integrasie in die Suid-Afrikaanse konteks kan geskied.

Hoofstuk 3: Euklidiese benadering tot kegelsnedes

In hoofstuk 2 is die gedagte van 'n geïntegreerde kurrikulum psigologies- en pedagogies ondersoek. Behalwe hierdie twee perspektiewe benadruk Dennis (2000: 799) dat enige voornemende kurrikulumstudie ook wiskundig en histories benader moet word. Daarom handel hoofstukke 3 en 4 oor die historiese en logiese ontwikkeling van kegelsnedes en skets die wiskundige agtergrond wat 'n onderwyser behoort te hê om van die benadering wat hier voorgestel word 'n sukses te maak.

Hierdie hoofstuk handel oor 'n Euklidiese benadering tot kegelsnedes wat in die onderrig van skoolwiskunde van belang kan wees. Die Euklidiese benadering behels die gebruik van afstande en Euklidiese transformasies. Die wiskundige metodes wat histories en selfs tans gebruik word om die kegelsnedes te beskryf, is somtyds kompleks. In hierdie hoofstuk word gepoog om die eenvoudigste moontlike beskrywing van kegelsnedes te gee, sonder om dit te oorvereenvoudig. In hierdie ondersoek word hoofsaaklik van skoolwiskunde gebruik gemaak. Die ondersoek beskryf 'n wyse waarop die kegelsnedes meetkundig beskou kan word en daaruit algebraïes voorgestel kan word. Dit illustreer die samehang van meetkunde en algebra en die rol van die koördinaatmeetkunde in hierdie integreringsproses.

3.1 *Historiese agtergrond*

Kegelsnedes word vir meer as 2000 jaar deur wiskundiges ondersoek (Fuller & Tarwater 1986: 95). Volgens Yates (1974: 36), Lee (1994) en Boyer en Merzbach (1989: 106) is kegelsnedes deur Menaechmus, 'n Griek, (375-325 v.C.) ontdek. Kegelsnedes is bestudeer in 'n poging om die drie bekende antieke probleme wat nie deur konstruksie opgelos kon word nie, te probeer ontrafel (Moise 1990: 279; Yates 1974: 36). Hierdie drie probleme (Dedron, Itard & Field 1973: 148-211) is die duplisering van die volume van 'n kubus, die driedeling van 'n hoek en die probleem om 'n vierkant te konstreeer met dieselfde oppervlakte as dié van 'n gegewe sirkel.

Die werk wat Plato se leerlinge oor kegelsnedes gedoen het, kom in die werke van Euklides en Aristaeus voor. In hierdie werk is slegs een been van 'n hiperbool gebruik (Eves 1960: 280). Apollonius van Perga, een van die grootste Griekse wiskundiges,

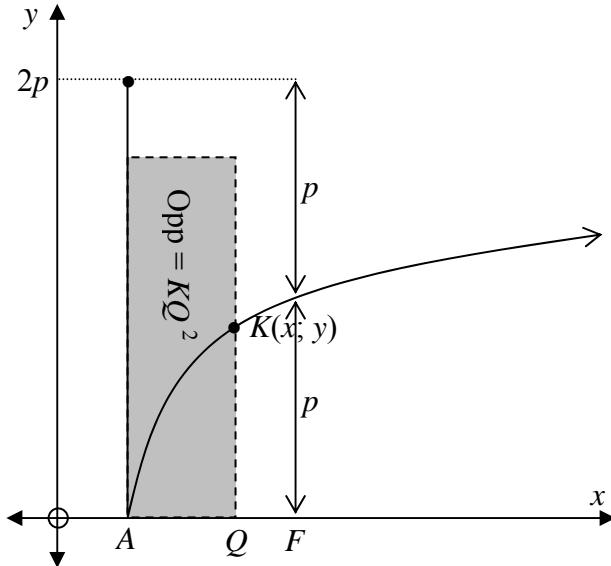
het in sy Boek 1 van sy werk oor kegelsnedes alle volledige kegelsnedes verkry deur 'n dubbelkegel te gebruik (Eves 1960: 280). Sy werk oor kegelsnedes was so gevorderd dat dit alle werk oor kegelsnedes tot daardie tyd by verre oortref het, insluitend Euklides se werk oor kegelsnedes (Boyer & Merzbach 1989: 164). Apollonius is ongeveer 262 v.C. in Perga gebore. As jong man het hy na Alexandrië gegaan om onder die navolgelinge van Euklides te leer. Hy het sy werk toegepas in die veld van planetêre beweging en het op hierdie wyse 'n belangrike bydrae tot die ontwikkeling van die Griekse astronomie gemaak. Alhoewel ons min weet van Apollonius se lewe het hy 'n groot invloed op die ontwikkeling van wiskunde gehad. Sy bekendste werk 'Kegelsnedes', 'n reeks van agt boeke, bevat 487 proposisies (stellings). Ongelukkig het slegs sewe van die agt boeke vir ons behoue gebly; die eerste vier is die oorspronklike Griekse boeke en die ander drie as negende eeuse Arabiese vertalings (Boyer & Merzbach 1989: 162). Die eerste drie is grootliks gebaseer om die werk van Euklides en sy voorgangers en bevat elementêre idees oor kegelsnedes, terwyl die ander vyf volumes Apollonius se oorspronklike ondersoeke en bevindinge bevat. Die agt boeke handel oor die volgende:

- Boek I: Definisies en basiese eienskappe van kegelsnedes.
- Boek II: Konstruksie en eienskappe van kegelsnedes.
- Boek III: Oppervlak van figure gevorm deur raaklyne, asook die harmoniese eienskap van pole.
- Boek IV: Eienskappe van pole.
- Boek V: Minimum en maksimum lyne wat vanaf 'n bepaalde punt na 'n kegel getrek kan word.
- Boek VI: Kongruente en gelykvormige kegels.
- Boek VII: Verdere eienskappe van kegels.
- Boek VIII: –

Die name van die kegelsnedes, naamlik parabool, hiperbool en ellips is alreeds deur Apollonius in sy boeke gebruik. Ellips beteken 'tekort', hiperbool beteken 'gooi te ver' en parabool beteken 'plasing langsaan' (Boyer & Merzbach 1989: 165; Jones 2000). Hierdie benamings is eintlik Pythagoriaanse terminologie, wat handel oor die toepassing van oppervlaktes, wat Apollonius gebruik het om kegelsnedes te beskryf. Die rede waarom Apollonius van hierdie terminologie gebruik gemaak het, word soos volg deur Eves (1960: 280) verduidelik:

When the Pythagoreans applied a rectangle to a line segment (that is, placed the base of the rectangle along the line segment), they said they had the case of “ellipse,” “parabola,” or “hyperbole” according as the base of the applied rectangle fell short of the line segment, exactly coincided with it, or exceeded it.

Laat die x -as die hoofas van ’n kegelsnede wees, $K(x; y)$ enige punt op die kegelsnede, A die toppunt, F die fokus en Q soos in Figuur 3-1.



Figuur 3-1

Konstrueer ’n reghoek deur K met oppervlakte $KQ^2 = y^2$ soos aangetoon in die figuur. Indien die y -waarde van die gekonstrueerde reghoek kleiner as, gelyk aan of groter as $2p$ is, word die kegelsnede onderskeidelik ’n ellips, parabool of hiperbool genoem. Met ander woorde, die kegelsnede is ’n ellips as $y^2 < px$, ’n parabool as $y^2 = px$, en ’n hiperbool as $y^2 > px$. Om meer presies te wees in die geval van ’n ellips en hiperbool is $y^2 = px \pm px^2/d$, waar d die lengte van die diameter deur die toppunt is. Apollonius het egter hierdie beginsel sonder ’n koördinaatvlak gebruik.

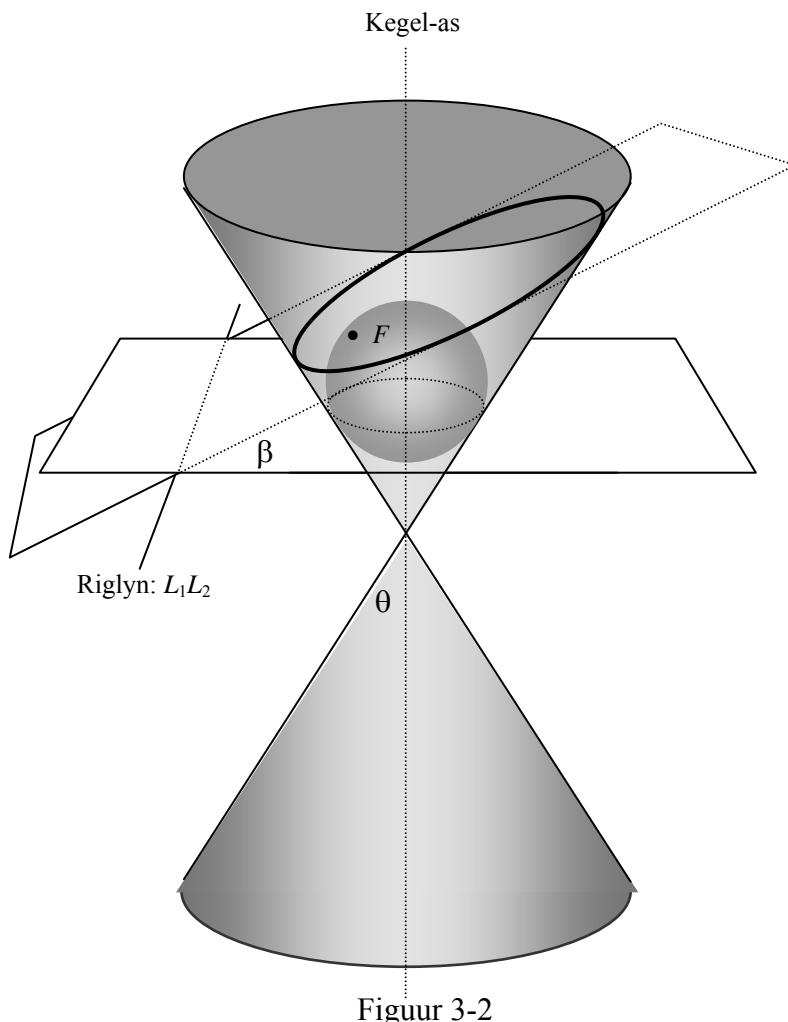
In die Renaissance tydperk het Kepler, Descartes en Fermat kegelsnedes met behulp van koördinaatmeetkunde ondersoek. Desargues, La Hire en Pascal het die ondersoek na kegelsnedes met behulp van projektiewe meetkunde tot nog hoër hoogtes gevoer. Ander wiskundiges wat ook bygedra het tot die ontwikkeling van kegelsnedes is Newton, Dandelin, Gergonne, Poncelet, Brianchon, Dupin, Chasles en Steiner (Lee 1994).

3.2 Meetkundige beskrywing van kegelsnedes

In hoofstuk 1 is ’n kegel gedefinieer as die oppervlak wat gegenereer word deur ’n lyn DC om die y -as met ’n hoek θ te roteer (sien Figuur 1-3). DC word die

kegelgenereerde genoem, die y -as word die *vertikale as* en θ word die *semi-vertikale hoek* van die kegel genoem. As hierdie kegel deur 'n platvlak gesny word, word tweedimensionele figure wat as krommes in die ruimte beskou kan word, verkry (Jooste 1984: 7). Ons noem hierdie figure *kegelsnedes*, dit is die ellips, parabool en hiperbool. Dit is egter ook moontlik vir die vlak om die kegel so te sny dat 'n punt, twee lyne of slegs een lyn verkry word, ons noem dit *gedegenereerde kegelsnedes*.

Kegelsnedes kan volgens 'n brandpunt en riglyn beskryf word. Dit kan soos volg gevisualiseer word. Plaas 'n sfeer in die kegel, op so 'n wyse dat die sfeer aan die kegel sowel as aan die snyvlak raak (Figuur 3-2).



Figuur 3-2

Hierdie sfeer word die *Dandelinseer* genoem, dit is vernoem na die ontdekker daarvan, Germinal Pierre Dandelin (1822). Daar word 'n sirkelvormige raakkromme, byvoorbeeld S , gevorm tussen die sfeer en die kegel, terwyl die sfeer die snyvlak op een punt raak. Die punt waar die sfeer die snyvlak raak, word die *brandpunt*, F van die kromme of kegelsnede genoem. Beskou die vlak waarin die sirkelvormige raakkromme

S is. Ons noem dié vlak P . Die snyvlak sny vlak P in 'n lyn, ons noem dit die *riglyn* en stel dit voor deur L_1L_2 . Trek nou vanuit die brandpunt F 'n loodlyn op L_1L_2 . Hierdie lyn word die *as* van die kegelsnede genoem. Die brandpunt en die riglyn word gebruik om die kegelsnedes verder te definieer en analities te beskryf.

Daar is drie verskillende nie-gedegenereerde lynfigure wat met behulp van kegelsnedes verkry word, dit is ellipse, parabole en hiperbole. As β die inklinasiehoek van die snydingsvlak is, kan die soort kegelsnedes wat deur die snydingvlak gevorm word, soos volg gedefinieer word:

Definisie 3-1: As $\beta < 90^\circ - \theta$, dan is die geslote kromme wat verkry word 'n *ellips*.

In hierdie geval word slegs een helfte van die kegel gesny. Indien $\beta = 0^\circ$ dan is die kegelsnedes wat gevorm word 'n spesiale soort ellips wat 'n sirkel genoem word. Indien $\beta = 0^\circ$ en die snyvlak gaan deur die hoekpunt van die kegel, dan is die snyvlak slegs 'n punt. Dit is 'n sirkel met radius 0.

Definisie 3-2: As $\beta = 90^\circ - \theta$, dan is die kromme wat verkry word 'n *parabool*.

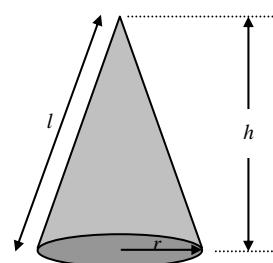
In hierdie geval word slegs een helfte van die kegel gesny.

Definisie 3-3: As $\beta > 90^\circ - \theta$, dan is die kromme wat verkry word 'n *hiperbool*.

In hierdie geval word twee helftes van die kegel gesny.

3.3 Die oppervlakte en volume van kegels en kegelsnedes

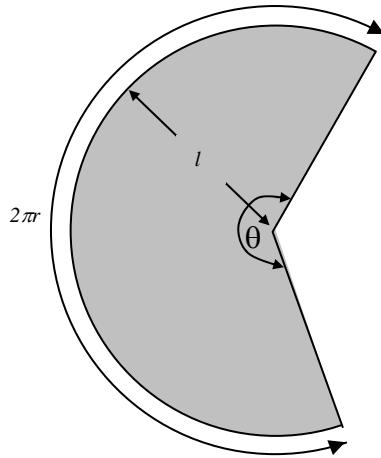
Die Euklidiese benadering behels die gebruik van die meting van afstande. Dit stel ons in staat om formules vir oppervlakte en volume te bepaal. In hierdie paragraaf word die formules vir die buite oppervlakte en volume van 'n kegel bepaal. Die formules word nie wiskundig bewys nie. Daar word slegs intuïtiewe verduidelikings verskaf. Om die kegel in Figuur 3-3 te konstrueer gebruik ons die sirkel sektor in Figuur 3-4.



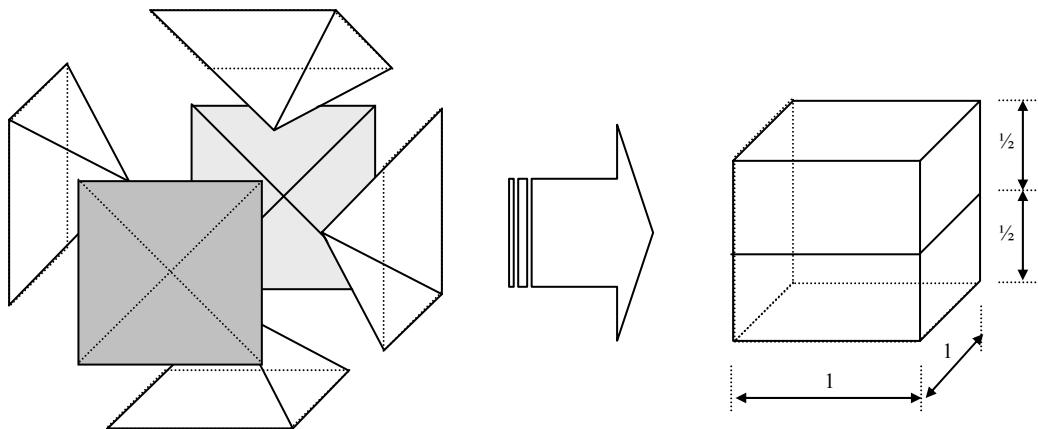
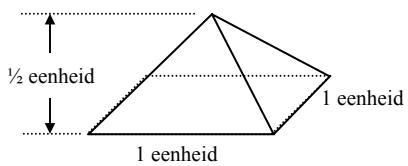
Figuur 3-3

Dus is die hoek θ gelyk aan $\frac{2\pi r}{l}$ radiale. Die oppervlakte van die vol sirkel is πl^2 dus is die buite oppervlakte van die kegel $\pi r l$ waar $l^2 = r^2 + h^2$.

Die volume van 'n prisma of 'n silinder kan bepaal word deur die basis oppervlakte met die hoogte te vermenigvuldig. Dus is die volume van 'n silinder met radius r en hoogte h dus $\pi r^2 h$. Die vraag is wat is die verwantskap tussen die volume van 'n silinder en 'n kegel met gelyke basis oppervlakte en hoogte. Om sake te vereenvoudig kyk ons eers na die verband tussen die volume van 'n piramide en prisma met gelyke basis en hoogte. Neem byvoorbeeld 'n piramide met vierkantige basis van 1×1 eenhede en hoogte $\frac{1}{2}$ eenheid. Ses piramides vorm een kubus van $1 \times 1 \times 1$ eenhede. Die kubus is twee keer die hoogte van elke piramide. Dus sal drie piramides se volume gelyk wees aan die volume van 'n prisma met dieselfde basis en hoogte (sien Figuur 3-5).



Figuur 3-4



Figuur 3-5

Dus is 'n piramide met basisoppervlakte A en hoogte h se volume $\frac{1}{3}Ah$. Dieselfde resultaat kan ook veralgemeen word vir kegels, dus is die volume van 'n kegel $\frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

3.4 Algebraïesering van die kegelsnedes

Analitiese meetkunde voorsien ons van 'n algebraïese metode om die meetkundige eienskappe van 'n figuur te bewys. In hierdie afdeling word meetkundige begrippe in algebraïese taal vasgelê. Die wiskunde soos uiteengesit in afdelings 3.4 tot 3.8 is 'n verwerking en samestelling van die volgende bronne:

- Bix, R. 1994. *Topics in geometry*. Boston: Academic Press.
- Coolidge, J. L. 1945. *A history of the conic sections and quadric surfaces*. Oxford: The Clarendon Press.
- Fuller, G. & Tarwater, D. 1986. *Analytical geometry*. 6th edition. Massachusetts: Addison-Wesley.
- Jooste, T de W. 1984. *Vektoralgebra en meetkunde*. Ongepubliseerde studiegids. Potchefstroom: PU vir CHO.
- Spain, B. 1957. *Analytical conics*. Bath: Pergamon.
- Van Rooy, D.J. 1946. *Analitiese meetkunde van die platvlak*. Stellenbosch: Pro Ecclesia.

Die algebraïesering van meetkunde is te danke aan die ontdekking van analitiese meetkunde deur René Descartes (1596-1650) en Pierre Fermat (1601-1665). Hierdie sistematiese oorgang van meetkunde na algebra is moontlik gemaak deur die ontwikkeling van algebraïese simbole, die klassieke Euklidiese meetkunde en veral deur die konsep van 'n koördinaatstelsel (Resnikoff & Wells 1973: 203). In hierdie afdeling is die doel om van 'n meetkundige benadering oor te gaan na 'n algebraïese benadering. Ons doen dit met behulp van 'n beskrywing van 'n lokus ten opsigte van 'n lyn en 'n punt. Apollonius het alreeds ongeveer 22 jaar voor Christus die kegelsnedes op hierdie wyse, met behulp van 'n lokus, beskryf (Yates 1974: 36).

Definisie 3-4: 'n *Lokus* van punte is 'n meetkundige figuur bestaande uit alle punte, en slegs daardie punte, wat aan 'n gegewe voorwaarde of 'n versameling van voorwaardes voldoen.

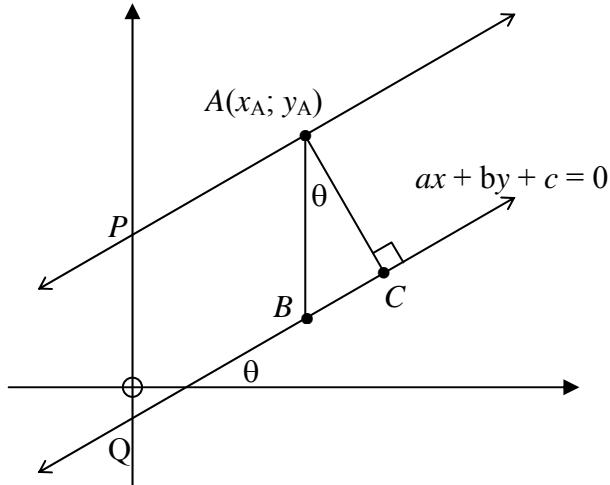
Ons kan dus informeel daaraan dink as die pad van 'n bewegende punt wat aan 'n gegewe voorwaarde voldoen. Om die kegelsnedes met behulp van 'n lokus te beskryf word die volgende twee stellings gebruik:

Stelling 3-1: Die afstand tussen enige twee punte $A(x_A; y_A)$ en $B(x_B; y_B)$ op die koördinaatvlak word gegee deur $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Stelling 3-2: Die loodregte afstand vanaf 'n punt $A(x_A; y_A)$ na die reguitlyn

$$ax + by + c = 0, \text{ waar } a \neq 0 \text{ of } b \neq 0, \text{ word gegee deur } \left| \frac{ax_A + by_A + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

Bewys: Laat C 'n punt op lyn $ax + by + c = 0$ wees sodat AC die loodregte afstand vanaf 'n punt $A(x_A; y_A)$ na die reguitlyn $ax + by + c = 0$. B is 'n punt op die lyn $ax + by + c = 0$, sodat AB ewequidig is aan die y -as. Q is die y -afsnit van die lyn $ax + by + c = 0$. $AP \parallel BC$ met P op die y -as. Stel die inklinasiehoek van lyn $ax + by + c = 0$ is θ , dan is $\hat{BAC} = \theta$.



'n Vergelyking van die lyn AP is $ax + by = a.x_A + b.y_A$. Dus is die y -afsnit van AP en BC onderskeidelik $\frac{ax_A + by_A}{b}$ en $-\frac{c}{b}$.

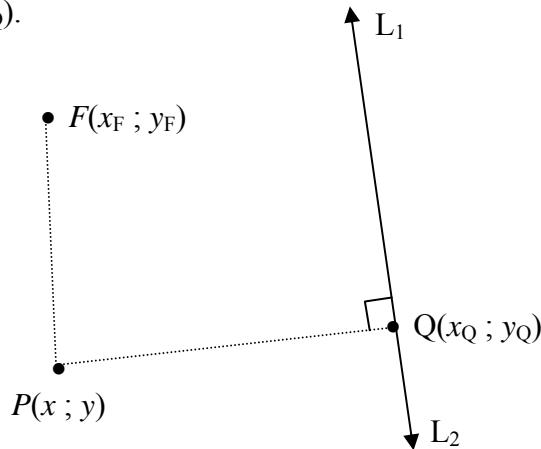
Dus is $PQ = AB = \left| \frac{ax_A + by_A}{b} - \frac{-c}{b} \right| = \left| \frac{ax_A + by_A + c}{b} \right|$ en $AC = |AB \cdot \cos \theta|$. Omdat

$$\tan \theta = -\frac{a}{b} \text{ is } \cos \theta = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ volgens Pythagoras, dus is } AC = \left| \frac{ax_A + by_A + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|. \quad \blacklozenge$$

Stelling 3-1 en Stelling 3-2 stel ons nou in staat om die algebraïese vergelyking van die kegelsnedes met behulp van 'n lokus te bepaal.

Stelling 3-3: Laat L_1L_2 'n reguitlyn en F 'n gegewe punt in 'n vlak wees. Laat e 'n positiewe reële getal wees. Die deelversameling van die vlak bestaande uit al die punte $P(x; y)$ sodat $FP = e.PQ$ waar QP die loodlyn vanuit punt Q op die lyn L_1L_2 is, kan voorgestel word deur $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ waar $A = a^2 + b^2 - a^2e^2$, $B = -2abe^2$, $C = a^2 + b^2 - b^2e^2$, $D = -2x_F.a^2 - 2x_F.b^2 - 2ace^2$, $E = -2y_F.a^2 - 2y_F.b^2 - 2bce^2$ en $F = x_F^2.a^2 + x_F^2.b^2 + a^2y_F^2 + b^2y_F^2 - c^2e^2$.

Bewys: Laat die vergelyking van die reguitlyn, die riglyn, L_1L_2 gegee word deur $ax + by + c = 0$, waar $a \neq 0$ of $b \neq 0$. Die koördinate van F is $(x_F; y_F)$ en Q se koördinate is $(x_Q; y_Q)$.



Ons moet nou die vergelyking van die lokus bepaal waar $FP = e.PQ$. Dit kan geskryf

$$\text{word as } (x_F - x)^2 + (y_F - y)^2 = e^2 \cdot \left(\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \text{ en dit vereenvoudig tot}$$

$$(a^2 + b^2)[(x_F - x)^2 + (y_F - y)^2]^2 = e^2 \cdot (ax + by + c)^2 \text{ omdat } a^2 + b^2 \neq 0.$$

$$\text{Dus is } (a^2 + b^2)[x^2 - 2x_F.x + x_F^2 + y^2 - 2y_F.y + y_F^2] = a^2e^2x^2 + 2abe^2xy + 2ace^2x + 2bce^2y + b^2e^2y^2 + c^2e^2 \text{ en kan dit weer vereenvoudig word tot } (a^2 + b^2 - a^2e^2)x^2 + (-2abe^2)xy + (a^2 + b^2 - b^2e^2)y^2 + (-2x_F.a^2 - 2x_F.b^2 - 2ace^2)x + (-2y_F.a^2 - 2y_F.b^2 - 2bce^2)y + (x_F^2.a^2 + x_F^2.b^2 + a^2y_F^2 + b^2y_F^2 - c^2e^2) = 0. \text{ Die vergelyking van hierdie lokus}$$

kan geskryf word as $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, waar $A = a^2 + b^2 - a^2e^2$, $B = -2abe^2$, $C = a^2 + b^2 - b^2e^2$, $D = -2x_F \cdot a^2 - 2x_F \cdot b^2 - 2ace^2$, $E = -2y_F \cdot a^2 - 2y_F \cdot b^2 - 2bce^2$ en $F = x_F^2 a^2 + x_F^2 b^2 + a^2 y_F^2 + b^2 y_F^2 - c^2 e^2$. \blacklozenge

In die bogenoemde lokus word F die brandpunt, $L_1 L_2$ die riglyn en e die eksentrisiteit genoem. Stelling 3-3 is die belangrikste resultaat in hierdie hoofstuk, dit word herhaaldelik gebruik om eienskappe van kegelsnedes te beskryf.

Definisie 3-5: As A, B, C, D, E en F reële getalle is, en ten minste A, B of C is nie nul nie, dan word $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ die algemene vorm van 'n tweedegraadse vergelyking in x en y genoem.

Die vergelyking van die lokus in Stelling 3-3 is dus 'n tweedegraadse vergelyking. Die grootte van e in die vergelyking $FP = e \cdot PQ$ bepaal die tipe grafiek wat die lokus vorm.

Indien $\frac{FP}{PQ} = e < 1$ is die lokus 'n ellips, as $\frac{FP}{PQ} = e = 1$ 'n parabool en as $\frac{FP}{PQ} = e > 1$ 'n hiperbool. Die vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ verteenwoordig dus alle kegelsnedes. Die lokusse het ons in staat gestel om vanaf 'n meetkundige benadering 'n algemene algebraïese vergelyking vir kegelsnedes saam te stel.

3.5 Identifisering van kegelsnedes uit die standaardvorm

Noudat die kegelsnedes algebraïes voorgestel is, moet ons 'n metode uitwerk om die tipe grafiek wat deur die vergelyking voorgestel word te bepaal. Dit is moontlik om die waarde van die eksentrisiteit e uit die koëffisiënt van die algebraïese vergelyking te bepaal, maar daar is ook 'n eenvoudiger metode. Deur die snyding van die algebraïese vergelyking, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, met die versameling van lyne, $y = mx$ te bepaal, kan die soort kegelsnedes (indien 'n nie-gedegenereerde kegelsnede) geïdentifiseer word. Deur vervanging word die snypunte gegee deur $Ax^2 + Bmx^2 + Cm^2x^2 + Dx + Emx + F = 0$, daarom is $(A + Bm + Cm^2)x^2 + (D + Em)x + F = 0$. As daar van die lyne in die versameling, $y = mx$, die kromme (nie gedegenereerde kegelsnedes) in een en slegs een punt sny, dan $A + Bm + Cm^2 = 0$ en is $m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$.

Omdat raakpunte algebraïes as twee punte gesien word, volg die resultaat:

- 'n *Parabool* is die kegelsnede wat eenkeer deur net een van die lyne $y = mx$ gesny word, dus is $B^2 - 4AC = 0$.
- 'n *Hiperbool* is die kegelsnede wat slegs eenkeer deur twee of meer van die lyne $y = mx$ gesny word, dan is $B^2 - 4AC > 0$.
- 'n *Ellips* is die kegelsnede wat slegs eenkeer deur geen van die lyne $y = mx$ gesny word, dus is $B^2 - 4AC < 0$.

Ongelukkig werk hierdie toets net as ons aanneem dat die kegelsnedes nie 'n gedegenereerde kegelsnede is nie. Om te bepaal of hierdie kegelsnedes gedegenereerd is, kan van matriksalgebra gebruik gemaak word. Die uitdrukking $B^2 - 4AC$ wat gebruik is om te onderskei tussen nie-gedegenereerde kegelsnedes laat 'n mens dadelik aan 'n diskriminant dink. Dit is juis met behulp van 'n diskriminant waarmee ons onderskei of kegelsnedes gedegenereerd is. Enige kegelsnede kan algebraïes in die vorm $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ geskryf word. In matriksnotasie is dit

$$[x, y, 1] \begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \text{ Hierdie simmetriese matriks } \begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E & F \end{bmatrix} \text{ word}$$

die matriks van die kegelsnedes genoem.

Stelling 3-4: Die kegelsnede is gedegenereerd (dit is 'n lyn, twee lyne, 'n punt of geen grafiek) as en slegs as die matriks van die kegelsnedes se determinant ongelyk is aan nul.

Die determinant van die matriks $\begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E & F \end{bmatrix}$ word geskryf as

$$\begin{vmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E & F \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} C & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}E & F \end{vmatrix} - \frac{1}{2}B \begin{vmatrix} \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & F \end{vmatrix} + \frac{1}{2}D \begin{vmatrix} \frac{1}{2}B & C \\ \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E \end{vmatrix}$$

$$= A(CF - \frac{1}{4}E^2) - \frac{1}{2}B(\frac{1}{2}BF - \frac{1}{4}DE) + \frac{1}{2}D(\frac{1}{4}BE - \frac{1}{2}DC)$$

Opsommend is 'n kegelsnede gedegenereerd as en slegs as $\begin{vmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E & F \end{vmatrix} \neq 0$. Dit is ekwivalent aan $4ACF + BED - CD^2 - FB^2 - AE^2 \neq 0$.

Die grafiek is 'n parabool as $\begin{vmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{vmatrix} = AC - \frac{1}{4}B^2 = 0$, 'n hiperbool as $\begin{vmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{vmatrix} =$

$AC - \frac{1}{4}B^2 < 0$ en 'n ellips as $\begin{vmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{vmatrix} = AC - \frac{1}{4}B^2 > 0$ as B en C nie albei nul is nie.

Deur met -4 te vermenigvuldig word $AC - \frac{1}{4}B^2$ dan $B^2 - 4AC$ (sien tabel Tabel 3-2).

In die volgende tabel is 'n paar voorbeeld van kegelsnedes:

Tabel 3-1

Vergelyking	$B^2 - 4AC$	Soort grafiek
$x^2 + y^2 - 4 = 0$	-4	Ellips
$x^2 + x - y - 12 = 0$	0	Parabool
$4x^2 + y^2 - 36 = 0$	-16	Ellips
$x^2 - y^2 - 1 = 0$	4	Hiperbool

Aangesien matriksalgebra nie deel van die skoolkurrikulum is nie, kan Dobbs (1998: 132-134) se bewysmetode gevvolg word om aan te toon dat 'n kegelsnede gedegenereerd is as en slegs as $4ACF + BED - CD^2 - FB^2 - AE^2 \neq 0$. Die nadeel van hierdie metode is die omslagtigheid daarvan.

3.6 Beskrywing van kegelsnedes

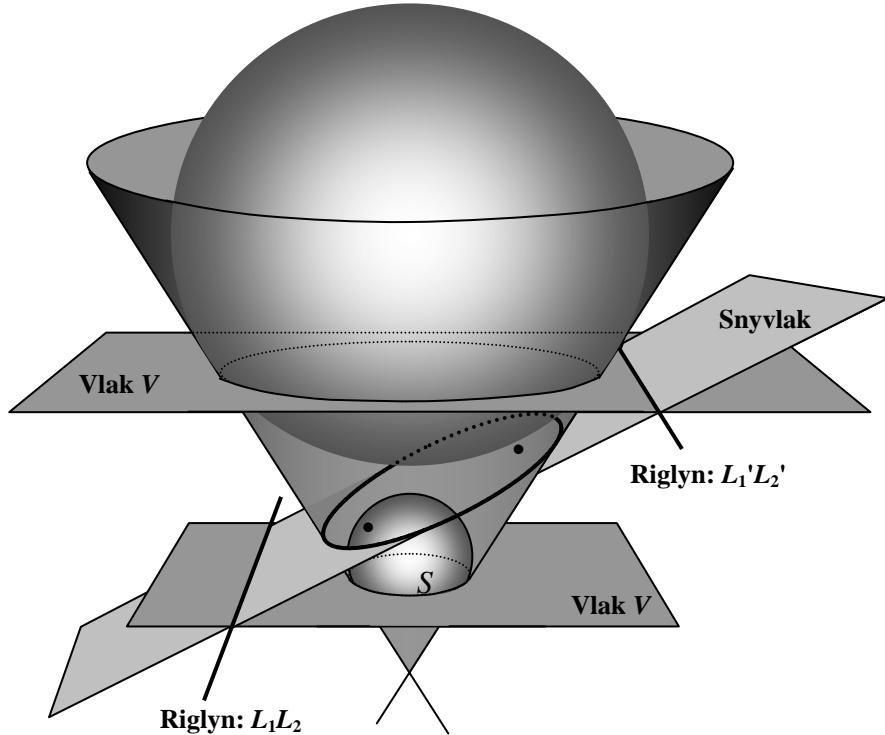
Die begrippe riglyn, eksentrisiteit en brandpunt is alreeds gebruik maar sonder om die betekenis daarvan te verduidelik. Hierdie begrippe kan meetkundig en algebraïf beskryf word.

3.6.1 Brandpunt en riglyn

Meetkundig kan 'n kegelsnede gesien word as die lynfiguur wat verkry word indien 'n vlak 'n kegel sny. Deur 'n sfeer in die kegel te plaas (tussen die toppunt van die kegel en die snyvlak soos in Figuur 3-6), op so wyse dat die sfeer aan die kegel en die snyvlak raak, kan 'n nuwe vlak gedefinieer word. Dit is die vlak, waarin die sirkelvormige raakkromme S tussen die kegel en die sfeer gevorm word, byvoorbeeld V . Die snyvlak en hierdie vlak V sny mekaar in 'n lyn, dit is die riglyn L_1L_2 .

Die punt waar die sfeer die snyvlak V raak word die brandpunt F genoem. Die posisie van hierdie punt F hang in die geval van 'n hiperbool af van die betrokke

helfte van die dubbele kegel waarin ons die sfeer plaas, indien albei plasings gedoen word, word twee brandpunte verkry. In die geval van 'n ellips kan die ander brandpunt gevind word deur die sfeer tussen die snyvlak en die oop kant van die kegel te plaas.



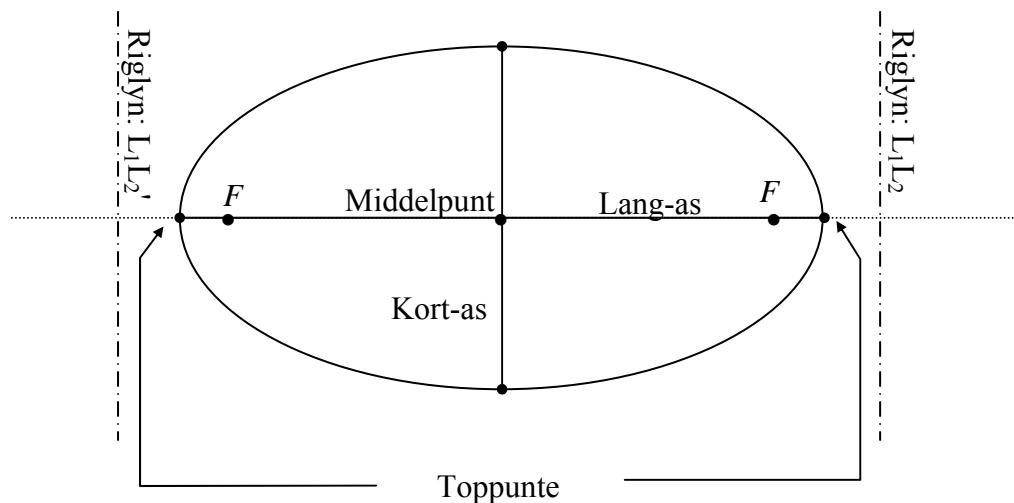
Figuur 3-6

Dieselfde brandpunt en riglyn is in Stelling 3-3 analities beskryf. In Stelling 3-3 was daar sprake van 'n reguitlyn L_1L_2 , 'n punt F en 'n positiewe reële getal e . Die deelversameling van die vlak bestaande uit al die punte $P(x; y)$ sodat $FP = e.PQ$ waar QP die loodlyn is vanuit punt Q op die lyn L_1L_2 , is algebraïes beskryf. In hierdie geval is die lyn L_1L_2 , die riglyn, die vaste punt F die brandpunt en e die eksentrisiteit van die kegelsnede.

3.6.2 Toppunt en asse

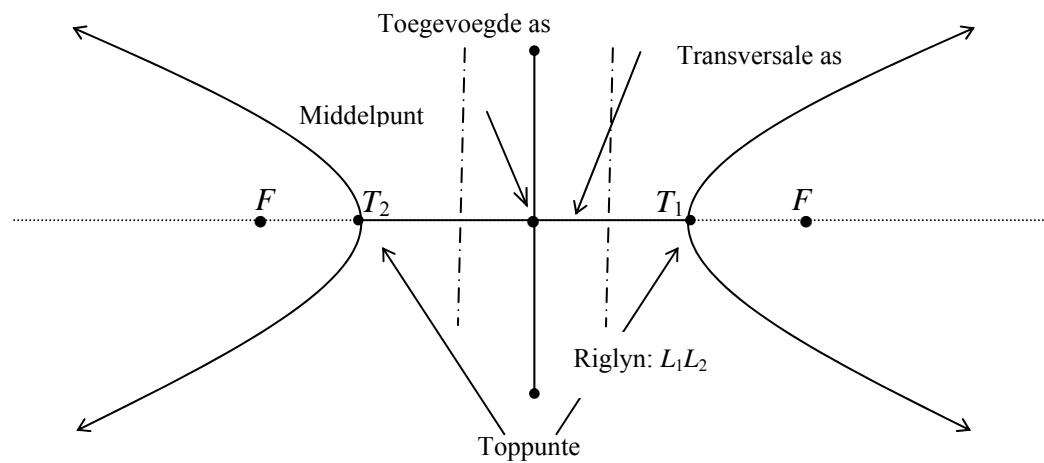
'n Ellips en hiperbool het twee brandpunte en riglyne. Die lyn deur F loodreg op die riglyn word die hoof-as van die kegelsnedes genoem (Figuur 3-7). Die hoof-as sny die kegelsnedes in die toppunt(e) van die kegelsnedes. In die geval van 'n ellips praat ons van die lang-as, dit is die lynsegment van toppunt na toppunt, en die kort-as, wat die lynsegment is van die middelloodlyn van die lang-as wat begrens word deur die punte

waarin die ellips hierdie lyn sny. Die middelpunt van die lang-as of kort-as word die middelpunt van die ellips genoem.



Figuur 3-7

In die geval van 'n hiperbool (Figuur 3-8) praat ons van die transversale as, dit is die lynsegment van toppunt na toppunt, en die toegevoegde as, 'n segment op die middelloodlyn. Hierdie segment sal later meer spesifiek gedefinieer word. Die middelpunt van die transversale as word die middelpunt van die hiperbool genoem.



Figuur 3-8

3.6.3 Eksentrisiteit

Die waarde van e , die eksentrisiteit, speel 'n groot rol in die vergelyking van die kegelsnedes. Die eksentrisiteit e bepaal die tipe kegelsnedes wat gevorm word. In

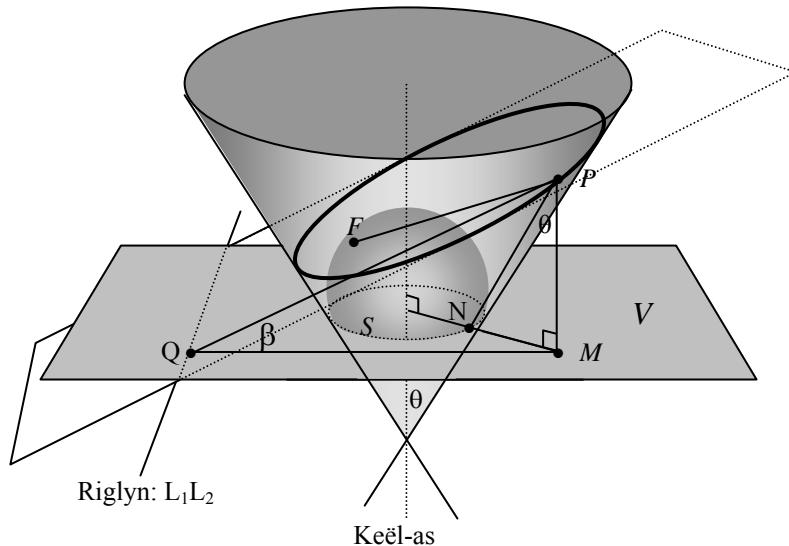
Stelling 3-3 het die grootte van e in die vergelyking $FP = e \cdot PQ$ die tipe grafiek wat die lokus vorm, bepaal. Indien $\frac{FP}{PQ} = e < 1$ is die lokus 'n ellips, as $\frac{FP}{PQ} = e = 1$ 'n parabool en as $\frac{FP}{PQ} = e > 1$ 'n hiperbool. Analities kan ons dus sê dat die lokus 'n ellips is as FP korter is as PQ , 'n parabool as FP net so lank soos PQ is en laastens 'n hiperbool as FP langer is as PQ .

Maar ons kan ook die eksentrisiteit beskryf in terme van die hoekgrootte van die snyvlak van die kegelsnedes.

Stelling 3-5: As θ die semi-vertikale hoek van die kegel is en β die inklinasiehoek van die snydingsvlak, kan die eksentrisiteit in terme van θ en β

$$\text{uitgedruk word as } e = \frac{\sin \beta}{\cos \theta}.$$

Bewys: Laat $P(x; y)$ enige punt op die kegelsnede en N 'n punt op sirkel S wees, dan is $PN = PF$ want albei is raaklyne aan die sfeer. Laat M en Q punte op vlak V wees sodat PM 'n loodlyn op vlak V is en $MQ \perp L_1 L_2$.



Figuur 3-9

In $\triangle PNM$ is $PM = PN \cdot \cos \theta = PF \cdot \cos \theta$ en in $\triangle PMQ$ is $PM = PQ \cdot \sin \beta$ maar

$$PF = e \cdot PQ. \text{ Daarom is } PF \cdot \cos \theta = PQ \cdot \sin \beta \text{ en is } e = \frac{\sin \beta}{\cos \theta}. \quad \blacklozenge$$

Met hierdie resultaat kan die eksentrisiteit meetkundig deur meting bepaal word deur gebruik te maak van die vertikale hoek van die kegel en die snydingsvlak se inklinasie.

As $\beta = 90^\circ - \theta$ dan is $e = 1$ en is die kegelsnede 'n parabool, as $\beta < 90^\circ - \theta$ dan is $e < 1$ en is die kegelsnede 'n ellips en as $\beta > 90^\circ - \theta$ dan is $e > 1$ en is die kegelsnede 'n hiperbool.

In Stelling 3-3 is aangetoon dat enige kegelsnede in die vorm $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ uitgedruk word. Die verband tussen die koëffisiënt van die algebraïese vergelyking en die eksentrisiteit van die kegelsnedes word in die volgende stelling bepaal.

Stelling 3-6: Laat $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ die kegelsnede wees met A, B, C nie al drie nul nie. Indien $B^2 - 4AC > 0$ is $0 < e < 1$, as $B^2 - 4AC < 0$ dan is $e > 1$ en as $B^2 - 4AC = 0$ dan is $e = 1$.

Bewys: Die vergelyking van enige kegelsnede is $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ waar $A = a^2 + b^2 - a^2e^2$, $B = -2abe^2$ en $C = a^2 + b^2 - b^2e^2$. Dus is $B^2 - 4AC = (-2abe^2)^2 - 4(a^2 + b^2 - a^2e^2)(a^2 + b^2 - b^2e^2)$ en vereenvoudig na

$$B^2 - 4AC = 4a^2b^2e^4 - 4[(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2)b^2e^2 - (a^2 + b^2)a^2e^2 + a^2b^2e^2]$$

$$B^2 - 4AC = -4(a^2 + b^2)[(a^2 + b^2) - (a^2 + b^2)e^2] \text{ dan}$$

$B^2 - 4AC = 4(a^2 + b^2)^2(e^2 - 1)$. Indien $a = 0, b = 0$ dan is $A = 0, B = 0$ en $C = 0$ want $A = a^2 + b^2 - a^2e^2$, $B = -2abe^2$, $C = a^2 + b^2 - b^2e^2$, maar dit is teen die aanname dus is $a \neq 0$ of $b \neq 0$ daarom is $a^2 + b^2 > 0$. Dus as $B^2 - 4AC < 0$ dan is $e^2 - 1 < 0$ dus is $0 < e < 1$.

Net so as $B^2 - 4AC > 0$ dan is $e^2 - 1 > 0$ en dus is $e > 1$ en as $B^2 - 4AC = 0$ is $e = 1$. ♦

Indien die grafiek 'n nie-gedegenereerde kegelsnede is weet ons dat as $B^2 - 4AC < 0$ dan is $0 < e < 1$ en is die grafiek 'n ellips, as $B^2 - 4AC > 0$ dan is $e > 1$ en is die grafiek 'n hiperbool en as $B^2 - 4AC = 0$ dan is $e = 1$ en is die grafiek 'n parabool. Die tipe grafiek is slegs afhanklik van die eerste drie koëffisiënte A, B en C van die vergelyking.

Die verskillende wyses waarop die soort nie-gedegenereerde kegelsnede by lokusse, snyvlakke en uit die algebraïese vergelyking bepaal kan word is dus:

Tabel 3-2

Kegelsnedes	Eksentrisiteit	Hoek β van snyvlak	Koëffisiënte
Parabool	$e = 1$	$\beta = 90^\circ - \theta$	$B^2 - 4AC = 0$
Hiperbool	$e > 1$	$\beta > 90^\circ - \theta$	$B^2 - 4AC > 0$

Ellips	$e < 1$	$\beta < 90^\circ - \theta$	$B^2 - 4AC < 0$
--------	---------	-----------------------------	-----------------

3.7 Vergelykings van kegelsnedes

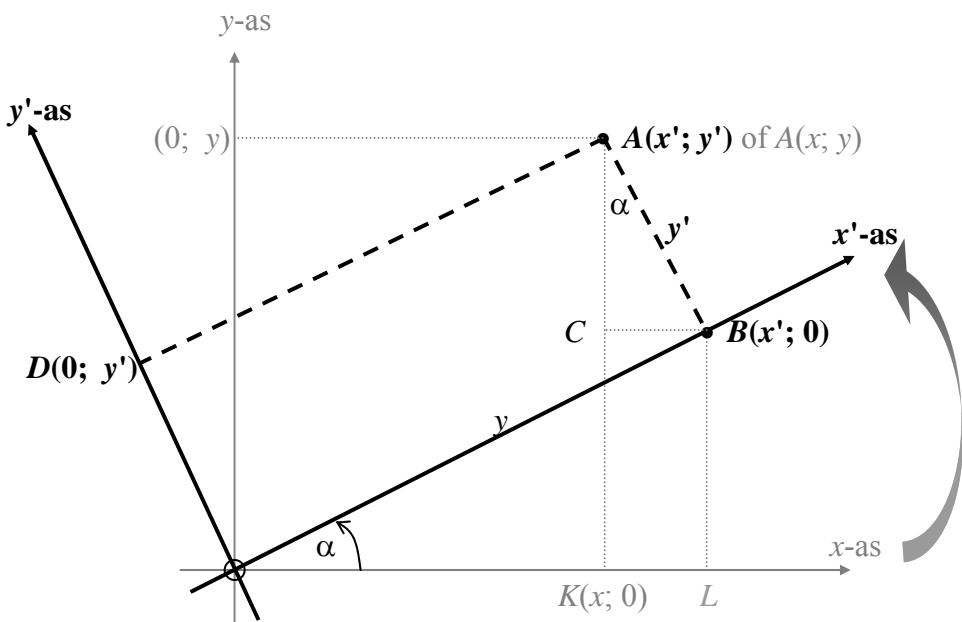
Die algemene tweedegraadse vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ stel die kegelsnedes voor. A , B of C moet nie-nul wees nie, anders is dit nie 'n tweedegraadse vergelyking nie en stel dit 'n gedegenereerde kegelsnede voor. In hierdie afdeling word die eenvoudigste vergelykings van kegelsnedes ondersoek (soos verduidelik deur Fuller&Tarwater 1986: 143-153). Met behulp van 'n rotasie kan die as van die kegelsnedes op die x -as geskuif word. 'n Translasie kan die middelpunt van die kegelsnedes op die oorsprong van die koördinaatstelsel plaas. So 'n kegelsnede word 'n horisontale kegelsnede in standaardposisie genoem.

3.7.1 Rotasie en translasie

'n Rotasie kan ons help om die koëffisiënt B , van xy nul te maak. Indien $B = 0$ dan sal die kegelsnedes vertikaal of horisontaal wees.

Stelling 3-7: Laat $A(x; y)$ 'n punt wees en die assestelsel deur 'n hoek α geroteer word. Die koördinate van A ten opsigte van die geroteerde assestelsel is $A(x'; y')$ met $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$ en $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$.

Bewys: Laat A se koördinate $(x; y)$ en $(x'; y')$ ten opsigte van die xy - en $x'y'$ -assestelsel wees. Trek AD , AK , AB , AC en BL soos in skets.



Figuur 3-10

Dan is $x = OK = OL - KL = OL - BC = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$ en $y = AK = KC + AC = BL + AC = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$. ♦

Die rotasieformules kan dus gebruik word om die koëffisiënt van die xy -term, dit is B , nul te maak in die vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Nou dat die grafiek ewewydig aan die x -as is, kan die grafiek simmetries om die x -as met behulp van 'n translasie geskuif word. Op hierdie wyse kan die vergelyking van die kegelsnede verder vereenvoudig word.

Stelling 3-8: 'n Tweedegraadse vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

waar $B = 0$, kan met behulp van translasie geskryf word as

$A'x'^2 + C'y'^2 + F = 0$. As $B \neq 0$ kan die vorm verkry word deur 'n rotasie en dan 'n translasie. Die rotasiehoek kan met behulp van

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} \text{ (as } A \neq C\text{) bepaal word, andersins is die rotasiehoek } \alpha = 45^\circ \text{ (as } A = C\text{).}$$

Bewys: As $B = 0$ is die vergelyking van die kegelsnede

$$Ax^2 + Dx + Cy^2 + Ey + F = 0, \text{ wat geskryf kan word as } A(x^2 + \frac{D}{A}x) + C(y^2 + \frac{E}{C}y) + F = 0. \text{ Deur vierkantvoltooing word dit } A(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}) + C(y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}) + (F - \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4C^2}) = 0, \text{ dit is } A(x - \frac{D}{2A})^2 + C(y + \frac{E}{2C})^2 + (F - \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4C^2}) = 0.$$

Indien $B \neq 0$ moet die grafiek eers geroteer word: Om die gesikte hoek te bepaal vervang ons die rotasieformules in die vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Deur groepering en die uithaal van gemeenskaplike faktore word die vergelyking $A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$ waar

$$A' = A \cos^2\alpha + B \sin\alpha \cos\alpha + C \sin^2\alpha$$

$$B' = B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha$$

$$C' = A \sin^2\alpha - B \sin\alpha \cos\alpha + C \cos^2\alpha$$

$$D' = D \cos\alpha + E \sin\alpha$$

$$E' = E \cos\alpha - D \sin\alpha$$

$$F' = F$$

Om van die $x'y'$ -term ontslae te raak moet $B' = B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha = 0$ wees, dus moet $\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}$ as $A \neq C$. Indien $A = C$ sal die xy -term verdwyn as $\alpha = 45^\circ$. ♦

Die volgende voorbeeld toon hoedat die xy -term verwijder word:

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 8 = 0$$

Eerstens moet die gesikte hoek met $\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}$ bepaal word, waardeur die assestelsel geroteer moet word. Dan is $\tan 2\alpha = \sqrt{3}$ en is $2\alpha = 60^\circ$ en $\alpha = 30^\circ$. Deur $\alpha = 30^\circ$ in vergelyking 1 te vervang kry ons $(2\cos^2 30^\circ + \sqrt{3}\sin 30^\circ \cos 30^\circ + \sin^2 30^\circ)x^2 + (2\sin^2 30^\circ - \sqrt{3}\sin 30^\circ \cos 30^\circ + \cos^2 30^\circ)y^2 = 8$ en dit is $5x'^2 + y'^2 = 16$. Dus kan $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 8 = 0$ as $5x'^2 + y'^2 = 16$ geskryf word.

3.7.2 Bepaling van die soort kegelsnede

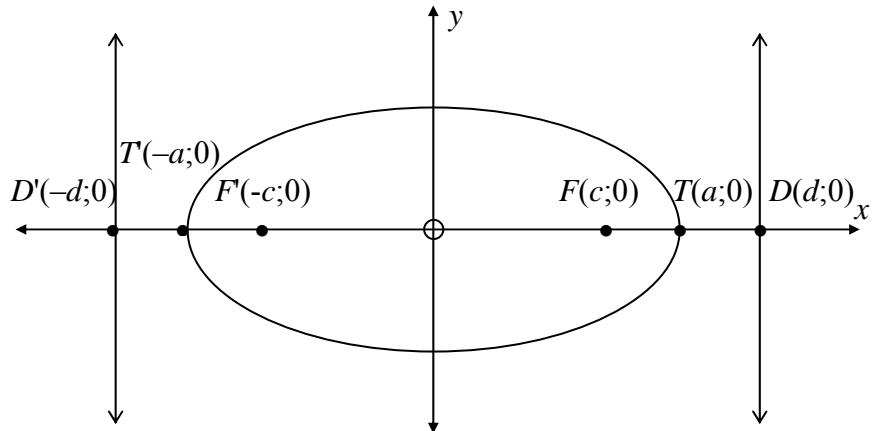
In afdeling 3.5 (sien Tabel 3-2) is aangetoon dat met behulp van 'n diskriminant bepaal kan word of 'n kegelsnede gedegenereerd is. Op dié wyse kan ook tussen die soorte kegelsnedes onderskei word. Indien die kegelsnedes roteer, word die vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ volgens Stelling 3-8 se bewys $A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$, waar $A' = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha$, $B' = B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha$, $C' = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$. Dus is $B'^2 - 4A'C' = (B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha)^2 - 4(A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha)(A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha) = B^2 - 4AC$. Daarom is $B^2 - 4AC$ onveranderd onder 'n rotasie. Dus indien 'n gesikte rotasiehoek gekies word sodat $B' = 0$, word $B^2 - 4AC = -4A'C'$ en hang die soort nie-gedegenereerde kegelsnede slegs van die waarde van A en C af. 'n Nie-gedegenereerde kegelsnede is 'n ellips indien A en C dieselfde teken het, 'n hiperbool as dit verskil, en 'n parabool as $A = 0$ of $C = 0$.

3.7.3 Eenvoudigste vorme van die kegelsnedes

Die verband tussen die waarde van e en die tipe grafiek is alreeds bekend, maar die verband tussen die waarde van die toppunt, brandpunt, riglyn en eksentrisiteit moet nog bepaal word.

Stelling 3-9: Gestel die toppunte T_1 en T_2 van 'n kegelsnede met eksentrisiteit $e \neq 1$ is onderskeidelik die punte $(a; 0)$ en $(-a; 0)$, dan is die brandpunt F se

koördinate $(ae; 0)$ en die riglyn L_1L_2 se vergelyking $x = \frac{a}{e}$.



Figuur 3-11

Bewys: Stel die brandpunt is $F(c; 0)$ en die koördinate van die riglyn se x -afsnit is $D(d; 0)$. Dan is $FT = a - c$ en $TD = d - a$, maar $FT = e \cdot TD$ dus is $a - c = ed - ea \dots .1.$ Maar $a + c = ed + ea \dots .2$ en verg.1 – verg.2 lewer $-2c = -2ea$ en daarom is $c = ea$.

Vervanging van hierdie waarde in verg.1, lewer $d = \frac{a}{e}$. ◆

Met behulp van Stelling 3-9 kan die vergelyking van die kegelsnedes verder vereenvoudig word (Jooste 1984: 14).

Stelling 3-10: 'n Ellips met eksentrisiteit $e (< 1)$ en toppunte $(a; 0)$ en $(-a; 0)$ word

beskryf deur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, waar $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

Stelling 3-11: 'n Hiperbool met eksentrisiteit $e (> 1)$ en toppunte $(a; 0)$ en $(-a; 0)$ word

beskryf deur $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, waar $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.

Bewys: Laat die toppunte T_1 en T_2 van 'n kegelsnede met eksentrisiteit e , die punte $(a; 0)$ en $(-a; 0)$ wees. Die brandpunt F se koördinate $(ae; 0)$ en die riglyn L_1L_2 se vergelyking is $x = \frac{a}{e}$ of $ex - a = 0$ volgens Stelling 3-9. In Stelling 3-3 is aangetoon dat die vergelyking van die algemene kegelsnedes gegee word deur

$(a^2 + b^2 - a^2 e^2)x^2 + (-2abe^2)xy + (a^2 + b^2 - b^2 e^2)y^2 + (-2x_F \cdot a^2 - 2x_F \cdot b^2 - 2ace^2)x + (-2y_F \cdot a^2 - 2y_F \cdot b^2 - 2bce^2)y + (x_F^2 a^2 + x_F^2 b^2 + a^2 y_F^2 + b^2 y_F^2 - c^2 e^2) = 0$. In hierdie geval is die riglyn $L_1 L_2$ se vergelyking $ax + by + c = 0$, die brandpunt $F(x_F; y_F)$. Daarom is $a = e$, $b = 0$, $c = -a$, $x_F = ae$ en $y_F = 0$. Dus word die vergelyking deur deling met e^2 :

$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$, en kan geskryf word as $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$. In die geval

van 'n ellips is $e < 1$ en is $1 - e^2 > 0$. Hierdie voorstelling kan geskryf word as

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. In die geval van hiperbool is $e > 1$ en is $1 - e^2 < 0$ dus is $b^2 = -a^2(1 - e^2)$,

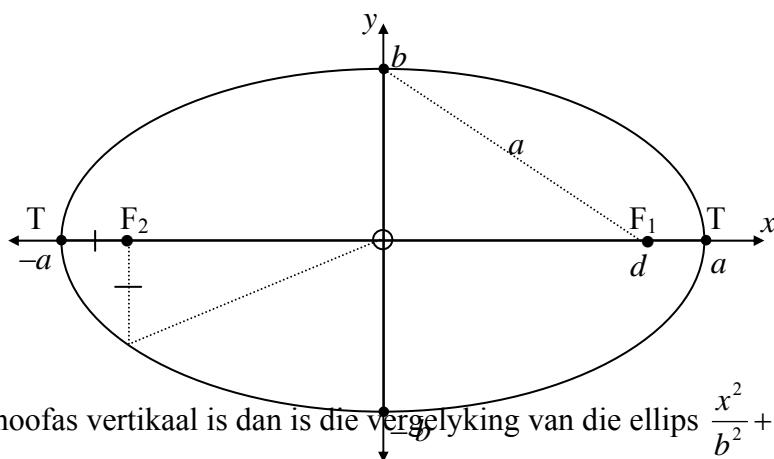
daarom kan die vergelyking geskryf word as $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. ♦

Stelling 3-12: In die geval van 'n ellips en hiperbool met eksentrisiteit e , brandpunte

$(d; 0), (-d; 0)$ en vergelyking $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, is $b^2 = a^2 - d^2$ en $b^2 = d^2 - a^2$

respektiewelik.

Bewys: 'n Ellips met eksentrisiteit e en toppunte $(a; 0)$ en $(-a; 0)$ word beskryf deur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, waar $b^2 = a^2(1 - e^2)$. Ons weet alreeds dat $b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2 - a^2 e^2$, maar volgens Stelling 3-9 is $d = ae$. Daarom is $b^2 = a^2 - d^2$. Netso is 'n hiperbool se vergelyking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ waar $b^2 = a^2(e^2 - 1) = d^2 - e^2$. ♦



Indien die hoofas vertikaal is dan is die vergelyking van die ellips $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Dit

Figuur 3-12

verseker dat $b < a$. Indien die oorsprong nie die middelpunt van die ellips is nie, kan

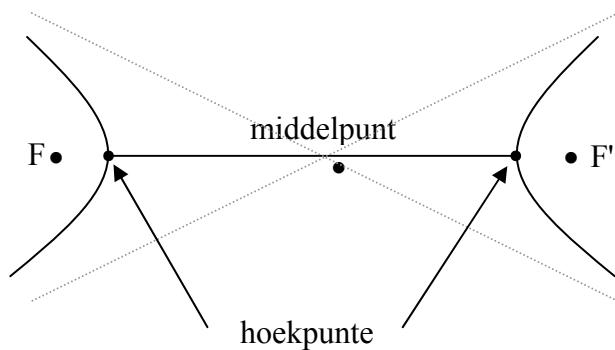
die vergelyking met behulp van translasies aangepas word: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

indien $(h; k)$ die middelpunt van die ellips is.

Opmerkings oor ellips in die vorm $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

- Die x -afsnitte is $(a; 0), (-a; 0)$ en die y -afsnitte is $(0; b), (0; -b)$.
- Die afstand vanaf die y -afsnit tot by die brandpunt is dieselfde as die afstand vanaf die middelpunt tot by die x -afsnit.

Die twee bene van 'n hiperbool word 'gebind' deur twee reguitlyne wat die asymptote genoem word.



Figuur 3-13

Die standaardvergelyking van 'n hiperbool wat om die oorsprong gesentreer is, word gegee deur $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, as die transversale as horisontaal is en $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ as die transversale as vertikaal is.

Die toppunte van die hiperbool met vergelyking $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ is a eenhede vanaf die middelpunt van die hiperbool, en die brandpunte is d eenhede van die middelpunt van die hiperbool, waar $b^2 = d^2 - a^2$ (Stelling 3-12).

Indien die oorsprong nie die middelpunt van die hiperbool is nie, kan die vergelyking met behulp van translasies aangepas word: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ indien $(h; k)$ die middelpunt van die hiperbool is.

Die beskrywing van die asymptote in die notasie is baie vaag. Indien die hiperbool horisontaal georiënteer is, het die hoekpunte van die reghoek waardeur die asymptote gaan die volgende koördinate: $(h+a; k+b), (h-a; k-b)$ en $(h-a; k+b), (h+a; k-b)$.

Ons kan dus die vergelykings van die asymptote bepaal:

Die helling is $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b}{a}$ en deur die middelpunt $(h; k)$ en dus is die vergelyking

$$y - k = \frac{b}{a}(x - h). \text{ Net so is die ander asymptoot se vergelyking } y - k = -\frac{b}{a}(x - h).$$

Indien die hiperbool vertikaal georiënteer is word die vergelykings van die asymptote

$$y - k = \frac{a}{b}(x - h) \text{ en } y - k = -\frac{a}{b}(x - h).$$

Stelling 3-13: 'n Parabool met toppunt die oorsprong en brandpunt $(d; 0)$ word beskryf

$$\text{deur } y^2 = 4dx.$$

Bewys: Laat die toppunt die punte $(0; 0)$ en die brandpunt $F(d; 0)$ wees. Die eksentrisiteit e van die parabool is 1. Die riglyn L_1L_2 se vergelyking is $x = -d$ of $x + d = 0$. In Stelling 3-3 is aangetoon dat die vergelyking van die algemene kegelsnedes gegee word deur $(a^2 + b^2 - a^2e^2)x^2 + (-2abe^2)xy + (a^2 + b^2 - b^2e^2)y^2 + (-2x_F.a^2 - 2x_F.b^2 - 2ace^2)x + (-2y_F.a^2 - 2y_F.b^2 - 2bce^2)y + (x_F^2a^2 + x_F^2b^2 + a^2y_F^2 + b^2y_F^2 - c^2e^2) = 0$. In hierdie geval is die riglyn L_1L_2 se vergelyking $ax + by + c = 0$, die brandpunt $F(x_F; y_F)$. Daarom is $a = 1$, $b = 0$, $c = d$, $x_F = d$ en $y_F = 0$. Dus word die vergelyking $y^2 + (-2d - 2d)x + (d^2 - d^2) = 0$, en kan geskryf word as $y^2 = 4dx$.

♦

Alhoewel 'n parabool soos een van die bene van 'n hiperbool lyk, verskil hulle in wese. 'n Parabool het nie asymptote soos 'n hiperbool nie. As die parabool vertikaal is, is die vergelyking van die parabool $x^2 = 4dy$ as $d > 0$. As $d < 0$ dan wys die parabool na die teenoorgestelde kant. Indien die oorsprong nie die middelpunt van die hiperbool is nie, kan die vergelyking met behulp van translasies soos volg aangepas word: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ indien $(h; k)$ die middelpunt van die hiperbool is.

3.8 Eienskappe van kegelsnedes

In hierdie afdeling word die eienskappe van kegelsnedes ondersoek. Die eienskappe van kegelsnedes word in die konstruksie en ander toepassings gebruik. Stelling 3-14 staan bekend as die som-eienskap van 'n ellips.

Stelling 3-14: Die punt $P(x; y)$ is 'n punt van die ellips met toppunte T_1 en T_2 en

brandpunte F_1 en F_2 as en slegs as $F_1P + F_2P = T_1T_2$.

Bewys: Beskou die ellips toppunte $T_1(a; 0)$, $T_2(-a; 0)$ en brandpunte $F_1(d; 0)$ en $F_2(-d; 0)$. Met behulp van die afstandsformule kan die lokus bepaal word waar $F_1P + F_2P = T_1T_2$. Deur kwadrering word dit $F_1P^2 + 2F_1P \cdot F_2P + F_2P^2 = T_1T_2^2$ en is $F_1P^2 + F_2P^2 - T_1T_2^2 = -2F_1P \cdot F_2P$. Deur weer te kwadreer word dit $(F_1P^2 + F_2P^2 - T_1T_2^2)^2 = 4F_1P^2 \cdot F_2P^2$, dus

$$\{[(x-d)^2 + y^2] + [(x+d)^2 + y^2] - (2a)^2\}^2 = 4\{[(x-d)^2 + y^2][(x+d)^2 + y^2]\}.$$

Dit vereenvoudig tot $\{x^2 - 2dx + d^2 + y^2 + x^2 + 2dx + d^2 + y^2 - 4a^2\}^2 = 4\{(x-d)^2(x+d)^2 + y^2(x-d)^2 + y^2(x+d)^2 + y^4\}$, dit is

$$\{2x^2 + 2d^2 + 2y^2 - 4a^2\}^2 = 4\{(x^2 - d^2)^2 + y^2(x-d)^2 + y^2(x+d)^2 + y^4\}, \text{ dus is}$$

$$\{2x^2 + 2d^2 + 2y^2 - 4a^2\}^2 = 4\{(x^2 - d^2)^2 + y^2(x-d)^2 + y^2(x+d)^2 + y^4\}, \text{ daarom}$$

$$4x^4 + 4d^2 + 4x^2y^2 - 8a^2x^2 + 4d^2x^2 + 4d^4 + 4d^2y^2 - 8d^2a^2 + 4x^2y^2 + 4d^2y^2 + 4x^4 - 8a^2y^2 - 8a^2x^2 - 8a^2d^2 - 8a^2y^2 + 16a^4 = 4x^4 - 8d^2x^2 + 4d^4 + 4y^2x^2 - 8dx^2y^2 + 4d^2y^2 + 4x^2y^2 + 8dx^2y^2 + 4d^2y^2 + 4y^4. \text{ Dit vereenvoudig tot}$$

$$d^2x^2 - a^2x^2 - d^2a^2 - a^2y^2 + a^4 = 0 \text{ en is } x^2(d^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(d^2 - a^2), \text{ maar}$$

$$b^2 = a^2 - d^2, \text{ dus is dit } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \text{ Deling deur } a^2b^2 \text{ gee } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ die vergelyking van 'n ellips.} \quad \blacklozen$$

'n Hiperbool het 'n soortgelyke resultaat wat op dieselfde wyse as Stelling 3-14 bewys word.

Stelling 3-15: Die punt $P(x; y)$ is 'n punt van die hiperbool met toppunte T_1 en T_2 en brandpunte F_1 en F_2 as en slegs as $F_1P - F_2P = T_1T_2$.

Die volgende stelling is alreeds in Stelling 3-3 bewys.

Stelling 3-16: Die punt $P(x; y)$ is 'n punt van die parabool met brandpunte F en riglyn L_1L_2 as en slegs as P dieselfde afstand vanaf F as vanaf die riglyn is.

Die kegelsnedes kan met behulp van die eienskappe van die kegelsnedes in Stelling 3-16 tot Stelling 3-16 meetkundig gedefinieer word.

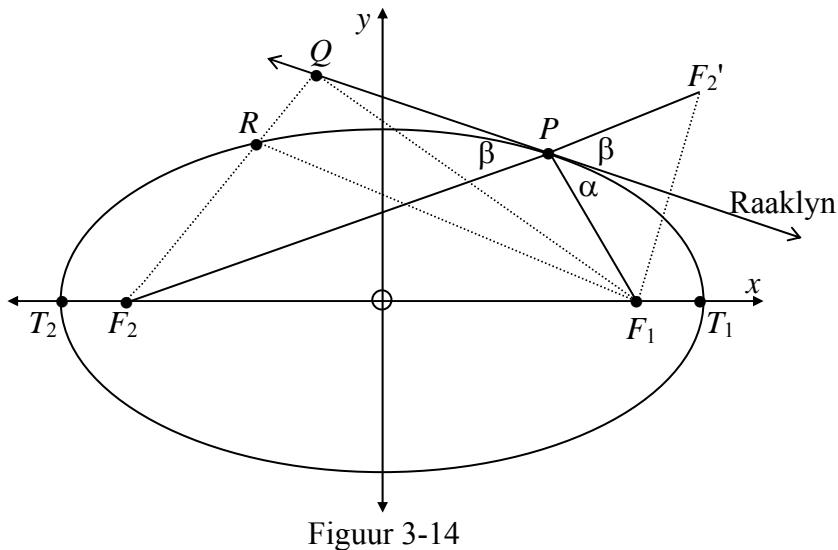
Definisie 3-6: 'n Ellips is die versameling van alle punte $P(x; y)$ in die vlak \mathbb{R}^2 , sodat die som van die afstande vanaf die punt $P(x; y)$ na twee vasgestelde punte 'n konstante is.

Definisie 3-7: 'n Hiperbool is die versameling van alle punte $P(x; y)$ in die vlak \mathbb{R}^2 , sodat die verskil van die afstande vanaf die punt $P(x; y)$ na twee vasgestelde punte 'n konstante is.

Definisie 3-8: 'n Parabool is die versameling van alle punte $P(x; y)$ in die vlak \mathbb{R}^2 , wat dieselfde afstand vanaf 'n vaste punt (brandpunt) en 'n vaste lyn (riglyn) af is.

Die volgende twee stellings werp meer lig op die parabool, ellips en hiperbool se weerkaatsingseienskappe. Die rede waarom dit as weerkaatsingseienskappe bekend staan is omdat hierdie eienskappe gebaseer op die weerkaatsingswet wat verduidelik dat die invalshoek gelyk is aan die weerkaatsingshoek. Dit staan ook bekend as die kegelsnedes se optiese eienskappe as gevolg van die talle toepassings in optika (sien afdeling 5.2.1) (Dana-Picard 2000: 772). Die basiese gedagtes van die volgende twee bewyse kom uit die werk van Seo (1986: 656-657) en Blistain en Phillips (1988: 120-123).

Stelling 3-17: As 'n punt P op die ellips met brandpunte F_1 en F_2 is, dan is die hoek tussen die lynstuk F_1P en die raaklyn in P gelyk aan die hoek tussen hierdie raaklyn en die lynstuk F_2P .

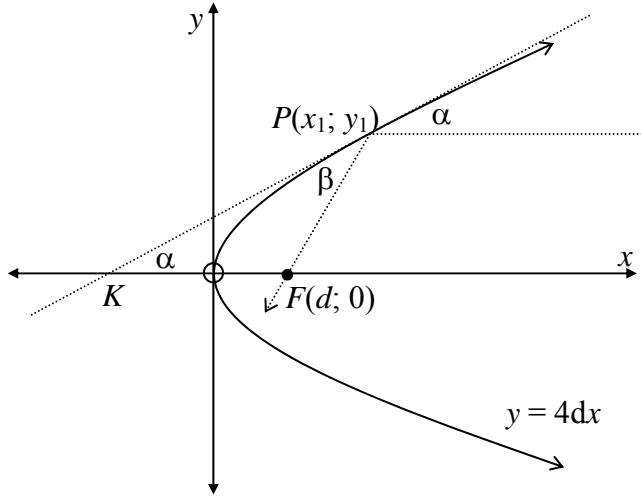


Figuur 3-14

Bewys: Die punt P is 'n punt van die ellips met toppunte T_1 en T_2 en brandpunte F_1 en F_2 as en slegs as $F_1P + F_2P = T_1T_2$. Laat P enige punt op die ellips wees waardeur 'n raaklyn getrek is. Laat Q enige ander punt op die raaklyn wees met R die snypunt van die ellips met die lyn F_2Q . Dan is $F_1Q + F_2Q > F_1R + F_2R = T_1T_2 = F_1P + F_2P$. Maar

as $F_1P + F_2P$ 'n minimum is moet P kollineêr met F_1 en F_2' (die refleksie van F_1 in die raaklyn) wees. Maar $\Delta F_2'PS \equiv \Delta F_1PS$ daarom is $\alpha = \beta$. \diamond

Stelling 3-18: As P 'n punt op die horisontale parabool is, met brandpunt F , dan is die hoek tussen die lynstuk FP en die raaklyn aan die parabool gelyk aan die hoek tussen hierdie raaklyn en die lyn ewewydig aan die x -as.



Bewys: Laat $P(x_1; y_1)$ 'n punt op die parabool wees waardeur 'n raaklyn getrek is.

Ons wil aantoon dat $\alpha = \beta$, dus dat $FP = FK$. Die helling van die raaklyn aan die

grafiek $y^2 = 4dx$ by $x = x_1$ is

Figuur 3-15 $\sqrt{\frac{d}{x_1}}$, daarom is die

vergelyking van die raaklyn

$$y - 2\sqrt{dx} = \sqrt{\frac{d}{x_1}}(x - x_1).$$

afsnit van die raaklyn is $-2\sqrt{dx_1} = \sqrt{\frac{d}{x_1}}(x - x_1)$ wat vereenvoudig tot $-2x_1 = x - x_1$ en

daarom is $x = -x_1$.

Dus $FK = d + x_1$ en $PF =$

$$\sqrt{(x_1 - d)^2 + (2\sqrt{dx_1})^2} = \sqrt{(x_1 - d)^2 + 4dx_1} = d + x_1, \quad \text{daarom is } \alpha = \beta. \quad \diamond$$

Die refleksiewe eienskap van parbole kan op verskillende maniere bewys word. Ramsey (1991: 240-241) se bewysmetode is net soos bogenoemde 'n goeie voorbeeld van hoe verskillende afdelings van wiskunde in die ondersoek na kegelsnedes gekombineer word. In hierdie geval is dit meetkunde, differensiaalrekene, en algebra. Net soos die parabool en ellips besit 'n hiperbool ook 'n refleksiewe eienskap (Parzynski 1984: 294-295).

Stelling 3-19: Laat $P(x; y)$ 'n punt op die hiperbool $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ met brandpunte $F(0; c)$ en $F'(0; -c)$ wees. Laat l die lyn deur P en F en l' die lyn deur F' en l se snyding met die hiperbool wees. As die hoeke tussen l en l' met die raaklyn van soos in Figuur 3-16, dan is $\alpha = \beta$.

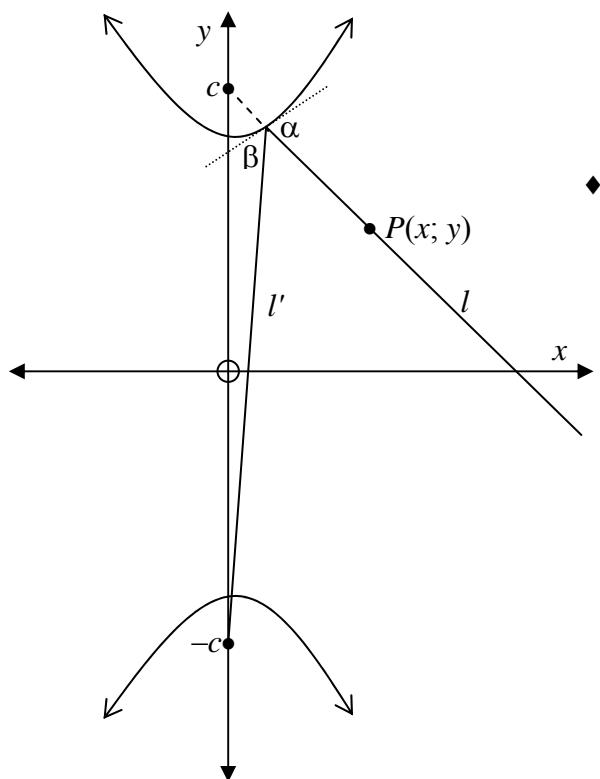
Laat m_1 en m_2 die hellings van l en l' wees. Dan is $m_1 = \frac{y-c}{x}$ en $m_2 = \frac{y+c}{x}$. Die

helling van die raaklyn kan met behulp van implisiële differensiasie bepaal word:

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ daarom is $\frac{2yy'}{a^2} - \frac{2x}{b^2} = 1$ en is $m_3 = y' = \frac{a^2 x}{b^2 y}$. Die hoek α tussen die twee lyne kan uit $\tan \alpha = \frac{m_3 - m_1}{1 + m_1 m_3}$ bepaal word. Deur vervanging, vereenvoudiging en deur die verband $c^2 = a^2 + b^2$ te gebruik

word $\tan \alpha = \frac{b^2}{cx}$ met $x \neq 0$.

Net so is $\tan \beta = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3} = \frac{b^2}{cx}$ met $x \neq 0$. Dus is $\alpha = \beta$.



Figuur 3-16

3.9 Konstruksie van kegelsnedes

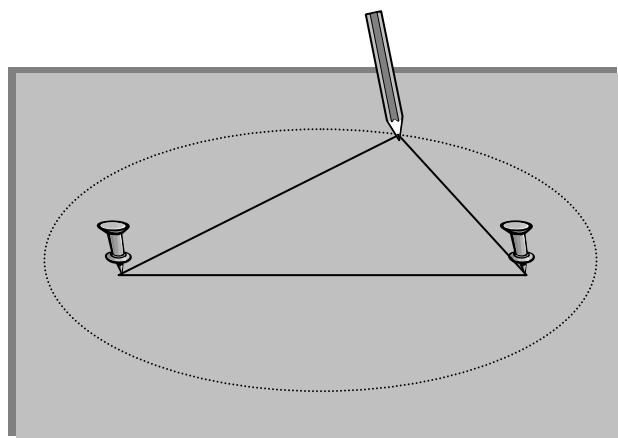
In afdeling 3.8 is die eienskappe van kegelsnedes bestudeer. Hierdie eienskappe kan gebruik word om kegelsnedes grafies voor te stel. So 'n konstruksie is 'n grafiese

voorstellings van 'n wiskundige entiteit. Die eerste konstruksie is dié met behulp van 'n tou.

3.9.1 Konstruksie met behulp van 'n tou

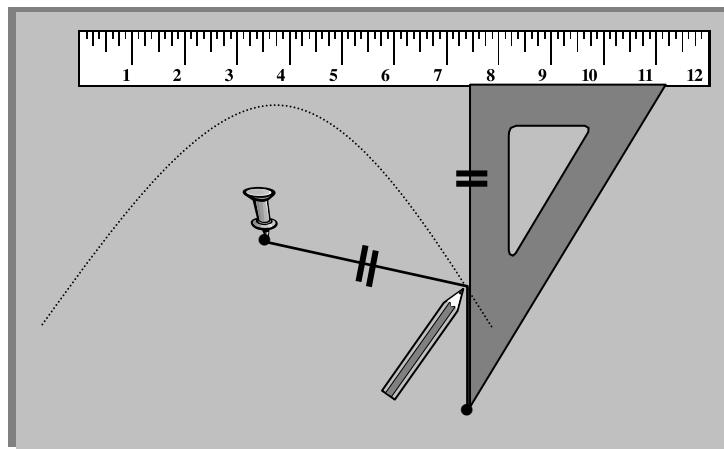
In hierdie afdeling word die kegelsnedes met behulp van 'n tou, potlood, twee spykers en 'n papier gekonstrueer.

Metode om 'n ellips te skets (Sellers 1994): Slaan twee spykers in 'n bord en knoop die twee eindpunte van 'n tou. Plaas nou die tou om die twee spykers en vat 'n pen en trek die tou styf met die pen (Figuur 3-17). Die figuur wat geteken word as die pen onder hierdie voorwaarde beweeg word, is 'n ellips met die twee spykers as brandpunte. Die skets werk op die beginsel van die someienskap van 'n ellips.



Figuur 3-17

Metode om 'n parabol te skets: Druk 'n liniaal vas en druk 'n driehoek teen die liniaal vas. Slaan die tou se een punt met 'n spyker vas en maak die ander punt aan 'n driehoek se punt vas soos in die skets. Trek die tou styf met die pen en sorg dat die tou vanaf die spyker tot by die liniaal net solank is as die stuk teen die liniaal.



Figuur 3-18

'n Parabool waar die spyker die brandpunt is word dan geteken as die pen onder hierdie voorwaarde beweeg word. Die skets werk op die beginsel van die eienskap soos verduidelik in Definisie 3-8.

3.9.2 Konstruksie vanuit algebraïese vergelykings

In die volgende voorbeeld (uit Sellers 1994) word 'n ellips hanteer. Die eerste voorbeeld is vergelyking wat geen xy -term bevat nie. Die xy -term kan met behulp van 'n rotasie verwyder word, maar daar is ook 'n eenvoudiger metode wat in afdeling 3.9.3 bespreek word.

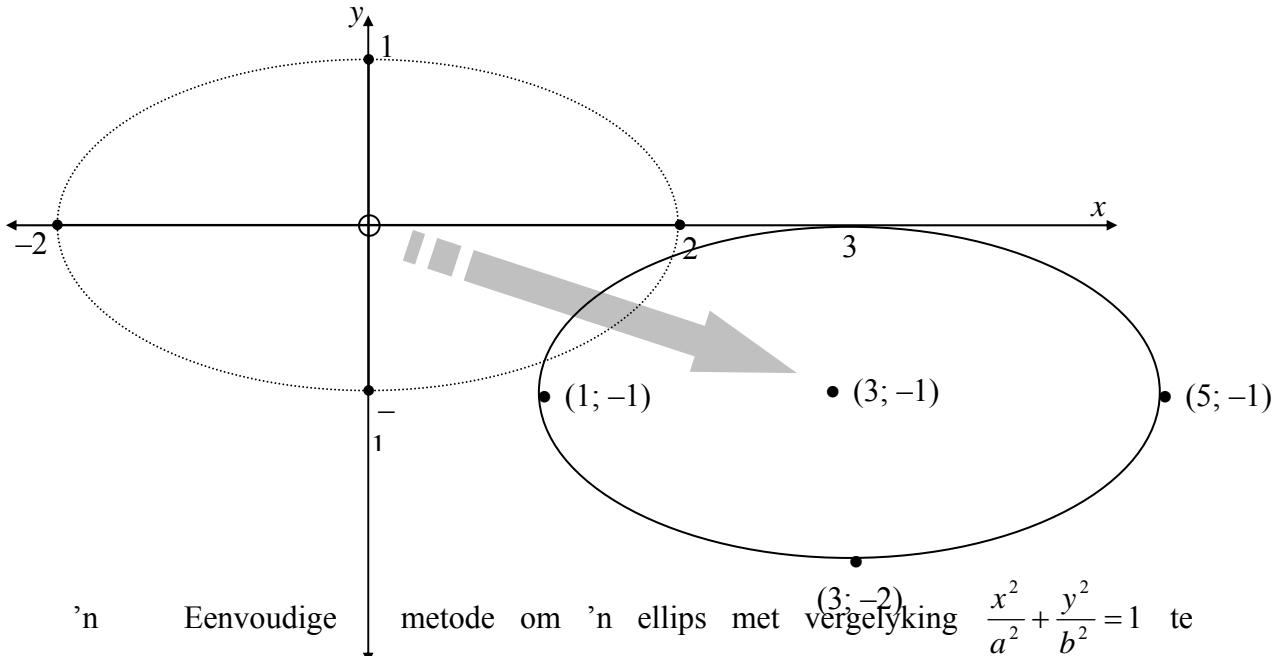
Voorbeeld: Skets die grafiek met vergelyking $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$.

Die determinant is $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$, daarom is die kegelsnede 'n nie-gedegenereerde

kegelsnede. $B^2 - 4AC = -16$ daarom sal die vergelyking 'n ellips voorstel. Die vergelyking kan dus in die vorm $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ geskryf word omdat daar geen xy -term is

nie, dus is die grafiek nie geroteer nie. Die vergelyking $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ word met behulp van voltooiing van die vierkant geskryf as: $(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 2y + 1) = -9 + 9 + 4$ en is dus $(x - 3)^2 + 4(y + 1)^2 = 4$. Ons kan dit ook skryf as $\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{1^2} = 1$. Dit is dus 'n ellips met middelpunt $(3; -1)$ met $a = 2$ en $b = 1$.

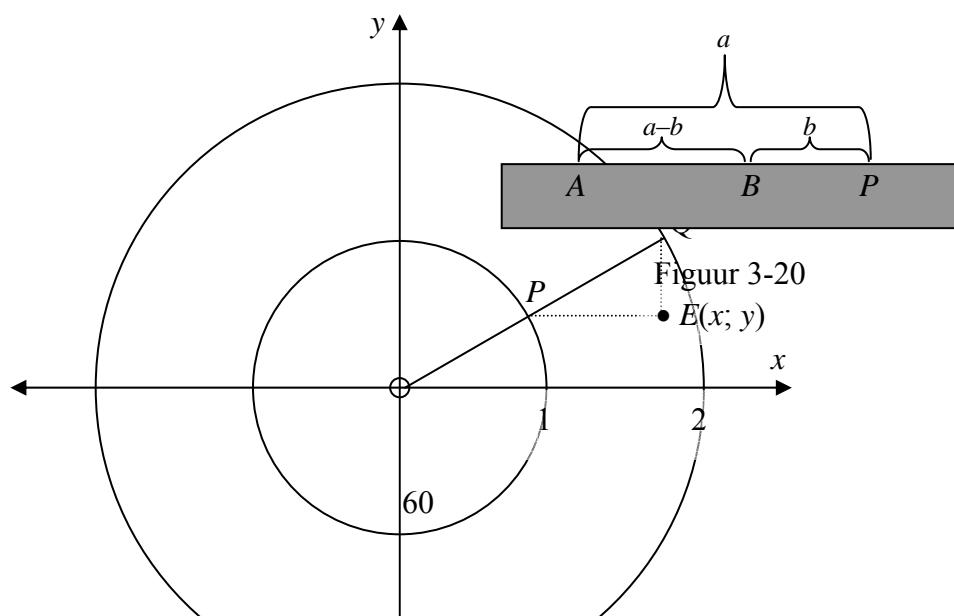
Die eksentrisiteit kan bepaal word deur $e = \frac{c}{a}$ waar $c^2 = a^2 - b^2$, met ander woorde $c = \sqrt{3}$ en die eksentrisiteit is $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



'n Eenvoudige metode om 'n ellips met vergelyking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ te konstrueer word deur Kaner (1965: 260) verduidelik. Hierdie metode sal gebruik word om die bostaande ellips met vergelyking $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ te konstrueer. Eerstens moet

Figuur 3-19

twee sirkels met radiusse a en b (in hierdie geval 2 en 1) met middelpunt $(0; 0)$ gekonstrueer word. Teken enige radius vanuit die oorsprong sodat P op die buitenste en Q op die binneste sirkel is. Dan is die punt $E(x; y)$ van die ellips die snydingspunt van die lyn deur P ewequidistant aan die x -as en die lyn deur Q ewequidistant aan die y -as (sien Figuur 3-21). Hierdie konstruksie kan met 'n passer en liniaal gedoen word, maar is ook gesik vir die gebruik van GSP (Geometer's Sketchpad).

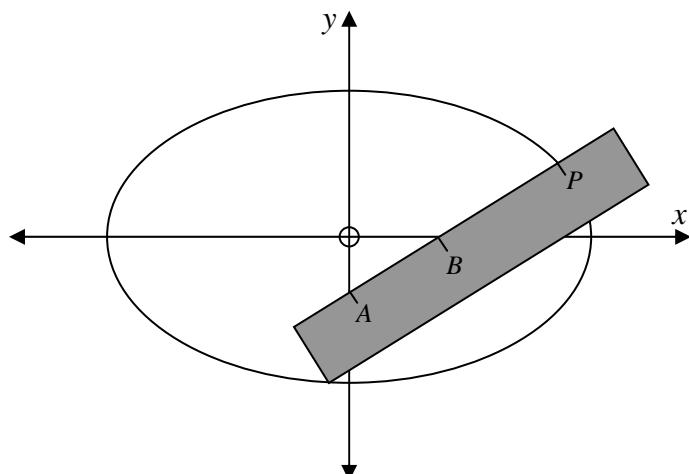


Figuur 3-20

Snyder (1965: 261) verduidelik waarom hierdie konstruksiemetode werk. Laat die lengte van die radius van die groot sirkel R en dié van die klein sirkel r wees en die hoek wat die radius met die positiewe x -as maak θ wees in Figuur 3-21. Dan is $Q(R\cos\theta; R\sin\theta)$ en $P(r\cos\theta; r\sin\theta)$. Dus is punt E se koördinate $x = R\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$, daarom is $\cos\theta = \frac{x}{R}$

en $\sin\theta = \frac{y}{r}$. Maar $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ en substitusie van $\cos\theta = \frac{x}{R}$ en $\sin\theta = \frac{y}{r}$ gee die vergelyking van die ellips naamlik $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$.

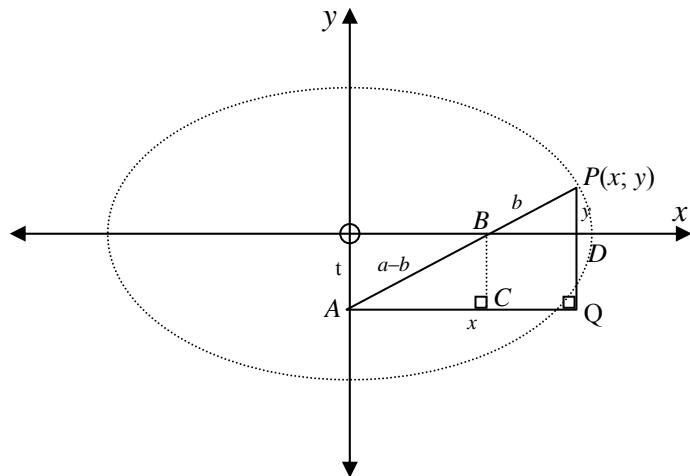
'n Ellips met vergelyking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Figuur 3-22

kan ook op 'n ander wyse slegs met 'n liniaal gekonstrueer word (Butler 1988: 189-190). Merk die afstande a en b soos in Figuur 3-20 af. Beweeg nou die liniaal op so 'n wyse dat A op die y -as en B op die x -as is en volg die punt P soos in Figuur 3-26 aangedui.

Die metode staan bekend as die ‘trammel’ metode. Hierdie konstruksiemetode kan verduidelik word deur gelykvormigheid en Pythagoras se stelling te gebruik.



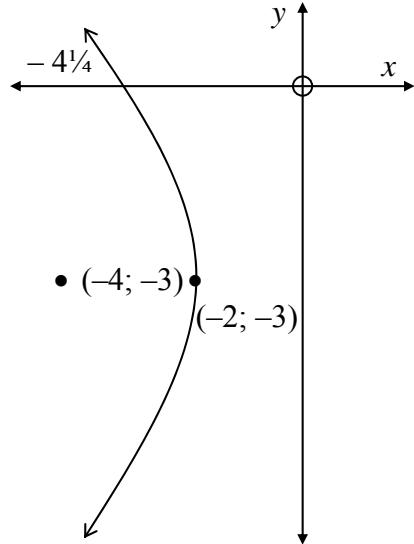
Figuur 3-23

Laat $P(x; y)$ 'n punt op die ellips wees en D, C en t soos in Figuur 3-24. Deur die stelling van Pythagoras in ΔAQP te gebruik volg dat $x^2 + (y + t)^2 = a^2$. Maar ΔACB is gelykvormig aan ΔBNP , daarom is $\frac{a-b}{b} = \frac{t}{y}$. Dus is $t = \frac{y(a-b)}{b}$ en deur vervanging

$$\text{in } x^2 + (y + t)^2 = a^2 \text{ gee dit } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Voorbeeld: Skets die grafiek met vergelyking $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$ (Fuller & Tarwater 1986: 105)

Die grafiek is nie-gedegenereerd en $B^2 - 4AC = 0$, daarom is die grafiek 'n parabool. Die vergelyking kan oorgeskryf word in die standaardvorm: $(y + 3)^2 = -8(x + 2)$. Die toppunt is dus $(-2; -3)$ en $d = -2$. Omdat die vergelyking 'n y^2 -term bevat is die as horisontaal en die parabool 'oop' na links. Die riglyn is die vertikale lyn wat 2 eenhede regs van die toppunt af is, en het dus vergelyking $x = 0$. Laastens is die brandpunte die punt wat 2 eenhede regs van die toppunt af is, dit is die punt $(-4; -3)$.



Figuur 3-24

3.9.3 Konstruksie met behulp van optelling van ordinate

Die xy -term in die vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ bemoeilik die skets van die grafiek. Dit kan egter voorlopig met behulp van 'n rotasie verwyn word, dan geskets en grafies roteer word. Aangesien hierdie berekenings somtyds lank is, gebruik ons eerder 'n metode wat bekend staan as die optelling van ordinate. Hierdie puntsgewyse konstruksie kan gebruik word indien 'n grafiek van 'n funksie wat uit twee of meer funksies bestaan, geskets moet word. As $y = f(x) + g(x)$ kan die grafiek geskets word deur eers die grafiese $y = f(x)$ en $y = g(x)$ op dieselfde assestelsel te skets en dan die ordinate grafies op te tel (Yates 1974: 188). Die algemene vergelyking kan in terme van y geskryf word: $Cy^2 + (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0$.

$$\text{Die oplossing vir } y \text{ is dan } y = \frac{-Bx - E \pm \sqrt{(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F)}}{2C}$$

$$y = \frac{-Bx - E \pm \sqrt{B^2x^2 + 2BEx + E^2 - 4ACx^2 - 4CDx - 4CF}}{2C}$$

$$y = \frac{-Bx - E \pm \sqrt{x^2(B^2 - 4AC) + (2BE - 4CD)x + E^2 - 4CF}}{2C} \text{ en kan geskryf word as}$$

$$y = y_1 + y_2 \text{ waar } y_1 = -\frac{B}{2C}x - \frac{E}{2C} \text{ en}$$

$$2Cy_2 = \sqrt{x^2(B^2 - 4AC) + (2BE - 4CD)x + E^2 - 4CF} \text{ dus is}$$

$4C^2y^2 - (B^2 - 4AC)x^2 + (4CD - 2BE)x - (E^2 - 4CF) = 0$. Laasgenoemde is dus 'n tweedegraadse vergelyking met geen xy -term nie. Deur die reguitlyn en die kegelsnedes op een grafiek te konstrueer en die ordinate puntsgewys bymekaar te tel, kan die grafiek van die oorspronklike funksie verkry word. Dit word deur die volgende voorbeeld geïllustreer (Fuller & Tarwater 1986: 190).

Voorbeeld: Skets die vergelyking $2x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 12y + 36 = 0$

Om die vergelyking $2x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 12y + 36 = 0$ as die som van twee funksies te skryf, skryf ons die vergelyking in terme van y :

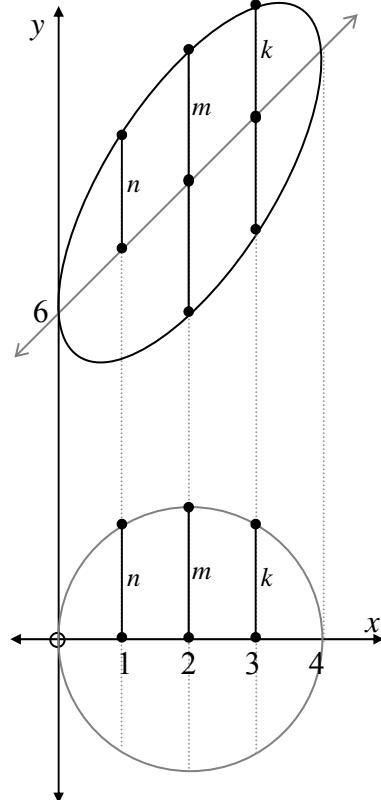
$$y^2 + (-2x - 12)y + (2x^2 + 8x + 36) = 0.$$

Die oplossing vir y is dan

$$y = \frac{2x + 12 \pm \sqrt{(-2x - 12)^2 - 4(2x^2 + 8x + 36)}}{2} = x + 6 \pm \sqrt{4x - x^2}.$$

Ons skets nou die grafieke van die vergelykings $y_1 = x + 6$ en $y_2 = \sqrt{4x - x^2}$ op dieselfde assestelsel.

Die vergelyking $y = x + 6$ is 'n reguitlyn en die vergelyking $y = \sqrt{4x - x^2}$ kan geskryf word as $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ wat 'n sirkel met radius 2 en middelpunt $(2; 0)$ is. Die punte van die grafiek wat geskets moet word, kan nou bepaal word deur die lengte m , n en k van die sirkel by die reguit lyn te tel of af te trek in die geval van negatiewe ordinaat waardes.



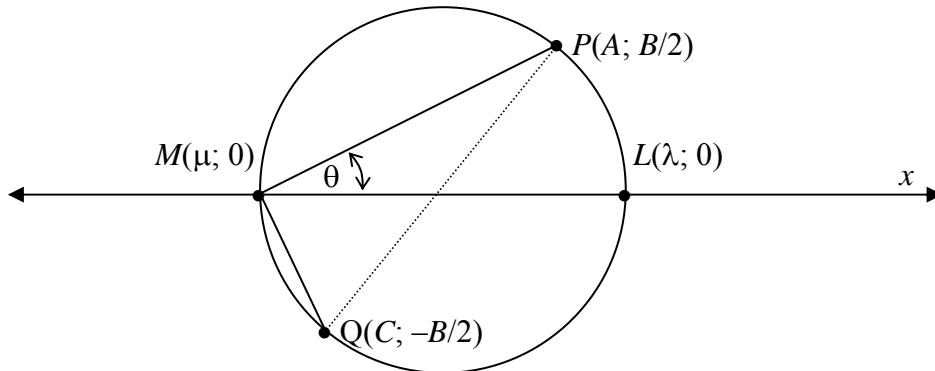
Figuur 3-25

3.9.4 Meetkundige prosedure vir die konstruering van kegelsnedes

Hierdie afdeling is gebaseer op die werk van DeTemple (1984: 313-323). Dit handel oor 'n meetkundige metode vir die grafiese voorstelling van die kegelsnedes uit die algemene kwadratiese vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Dit gee aan ons 'n eenvoudige meetkundige tegniek om die soort grafiek asook die translasie en rotasie van die grafiek te bepaal. Hierdie metode kan ook met behulp van dinamiese meetkundesagteeware uitgevoer word (sien afdeling 5.2.4).

In afdeling 3.7 is aangetoon dat die vergelykings van die parabool, hiperbool en ellips vereenvoudig kan word met behulp van 'n translasie en rotasie. Hierdie afdeling handel oor die meetkundige prosedure vir hierdie vereenvoudiging. Die eindproduk is 'n eenvoudige algoritme vir die skets van kegelsnedes. Ons begin met die algemene vergelyking van die kegelsnedes $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

waar $A > 0$. Konstrueer 'n sirkel deur die punte $P(A; B/2)$ en $Q(C; -B/2)$ met PQ as middellyn. Dit word die *kegelsirkel* genoem. Lees die x -afsnitte en die hoek θ soos aangedui in Figuur 3-26 af.



Figuur 3-26

Die soort grafiek kan met behulp van die volgende tabel bepaal word:

Tabel 3-3

Geva l	Soort grafiek	Aantal kere wat die sirkel die y-as sny.
1	Ellips	Geen
2	Parabool	1
3	Hiperbool	2

In die geval van 'n rotasie word die roterende x -as en y -as onderskeidelik die \hat{x} -as en \hat{y} -as genoem.

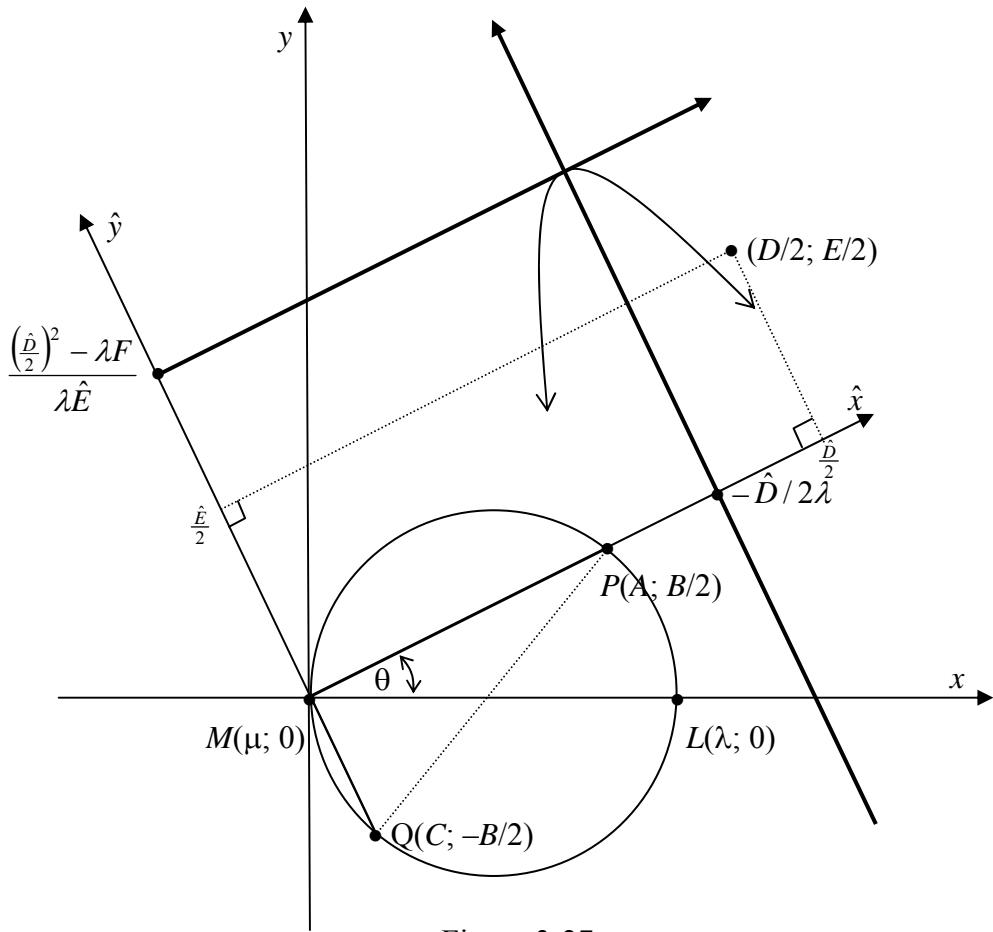
3.9.4.1 Geval 2: Parabool

Konstrueer \hat{x} -as $\parallel MP$, \hat{y} -as $\parallel MQ$ en die punt $(D/2; E/2)$

Lees die punte $\hat{D}/2$ en $\hat{E}/2$ soos aangedui in Figuur 3-27 af.

Indien $\hat{E} = 0$ dan is die grafiek die gedegenereerde kegelsnede wat bestaan uit die twee

$$\text{lyne: } \hat{x} = \frac{-\frac{\hat{D}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\hat{D}}{2}\right)^2 - \lambda F}}{\lambda}.$$

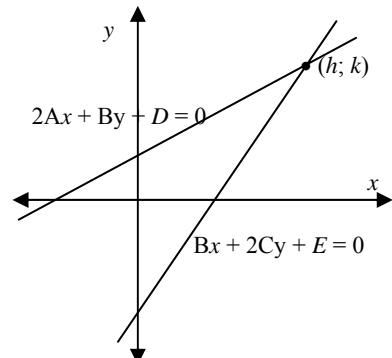


Figuur 3-27

As $\hat{E} \neq 0$ bereken dan die \hat{x} -translasie, $x' = -\hat{D}/2\lambda$, en

$$\text{die } \hat{y}\text{-translasie, } y' = \frac{\left(\frac{\hat{D}}{2}\right)^2 - \lambda F}{\lambda \hat{E}}.$$

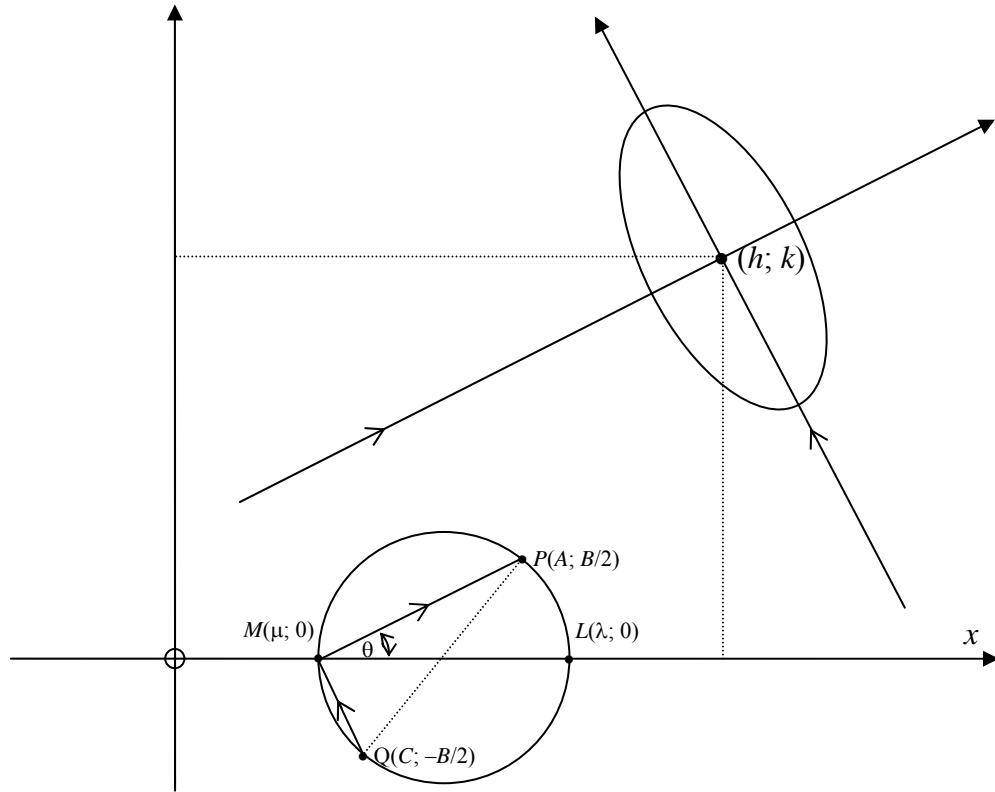
Konstrueer die x' -as $\parallel \hat{x}$ -as en y' -as $\parallel \hat{y}$ -as asook die parabool $x'^2 = \frac{-\hat{E}}{\lambda} y'$. Dit sal die voorstelling van die oorspronklike vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ wees.



3.9.4.2 Geval 1 of 3: Hiperbool of ellips

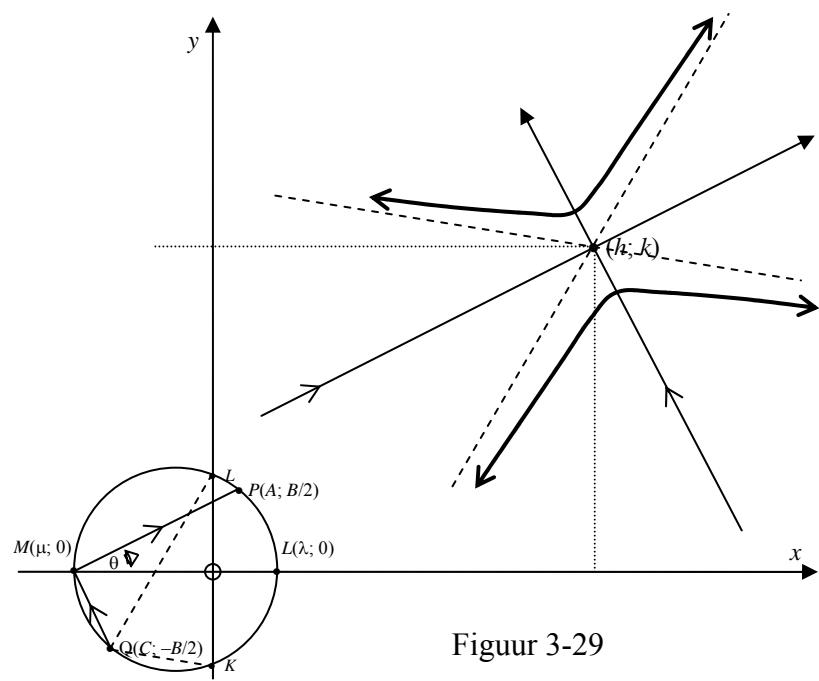
Teken die lyne $2Ax + By + D = 0$ en $Bx + 2Cy + E = 0$ en lees die koördinate, h en k , van die snypunt af. Bereken dan $\tilde{F} = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F$.

Gebruik Figuur 3-26 en konstrueer \hat{x} -as $\parallel MP$, \hat{y} -as $\parallel MQ$ met $(h; k)$ as oorsprong. In die geval van 'n ellips, konstrueer die grafiek $\lambda x^2 + \mu y^2 + \tilde{F} = 0$ op die nuwe assestelsel.



Figuur 3-28

In die geval van 'n hiperbool, konstrueer die asymptote ewewydig aan LQ en QK en konstrueer die grafiek $\lambda x^2 + \mu y^2 + \tilde{F} = 0$ op die nuwe assestelsel.



Figuur 3-29

3.9.4.3 Verduideliking

Indien $A < 0$ vermenigvuldig met -1 sodat $A > 0$. Ons neem dus aan dat $A > 0$ in die algemene vergelyking: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1)

Translasie:

Ons wil eerstens van lineêre terme ontslae raak met behulp van 'n translasie.

Stel $x = \tilde{x} + h$ en $y = \tilde{y} + k$ (2)

Vervang (2) in (1):

$$A\tilde{x}^2 + B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + (2Ah + Bk + D)\tilde{x} + (Bh + 2Ck + E)\tilde{y} + \tilde{F} = 0 \quad (3)$$

waar $\tilde{F} = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F$

Om van die lineêre terme ontslae raak stel

$$2Ah + Bk + D = 0 \text{ en } Bh + 2Ck + E = 0 \quad (5)$$

Dit is die snypunt $(h; k)$ van die grafiese $2Ax + By + D = 0$ en $Bx + 2Cy + E = 0$. Indien die grafieke mekaar nie sny nie is dit die paraboliese geval, dit is wanneer $B^2 - 4AC = 0$. In daardie geval is dit beter om die translasie na die rotasie te doen.

Die vergelyking van (1) in terme van \tilde{x} en \tilde{y} word:

$$A\tilde{x}^2 + B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + \tilde{F} = 0 \quad (6)$$

Tipe kegelsnede:

Indien $B = 0$ dan is daar geen translasie nodig nie, gestel dus dat $B \neq 0$. Daarom is die punte P en Q twee verskillende punte. 'n Kegelsirkel kan dus deur die punte P en Q gekonstrueer word, dan is $M(\mu; 0)$ en $L(\lambda; 0)$ die x -afsnitte van die sirkel met $\mu < \lambda$ en $\lambda > 0$ (sien Figuur 3-26). Die lengte van PQ met behulp van die afstandsformule of Pythagoras se stelling bereken word:

$$OP = \frac{1}{2} \sqrt{(A-C)^2 + B^2} \quad (7)$$

Die x -koördinaat, $\frac{A+C}{2}$, van O kan met behulp van die middelpuntsformule kan

bepaal word.

$$\text{Dan is } \lambda = \frac{A+C}{2} + OP \text{ en } \mu = \frac{A+C}{2} - OP \quad (8)$$

Hierdie waardes kan direk van die grafiek af gelees word. Maar dit word in hierdie geval bepaal om aan te toon waarom die aantal y -afsnitte van die sirkel (soos in Tabel 3-3) die tipe kegelsnede kan aandui. Uit (8) volg dat $\lambda\mu = \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - OP^2$ en deur

$$\left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - OP^2 = \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right)^2 = \frac{(A+C)^2 - (A-C)^2 - B^2}{4} = \frac{4AC}{4} = AC$$

vervanging van (7) gee dit $\lambda\mu = \frac{1}{4}(A+C)^2 - \frac{1}{4}[(A-C)^2 - B^2] = AC - \frac{1}{4}B^2$. Daarom is $4\lambda\mu = -(B^2 - 4AC)$. Uit die konstruksie volg dat $\lambda > 0$, daarom hang die tipe grafiek van μ af. Indien $\mu = 0$ dan is $B^2 - 4AC = 0$, as $\mu > 0$ is $B^2 - 4AC < 0$ en as $\mu < 0$ is $B^2 - 4AC > 0$. Omdat die kegelsirkel se middelpunt op die x -as is, kan dit soos volg gestel word: Indien $\mu = 0$ dan sny die kegelsirkel die y -as eenkeer, indien $\mu > 0$ sny dit die y -as glad nie en as $\mu < 0$ sny die kegelsirkel die y -as twee keer. Dus kan tabel Tabel 3-2 uitgebrei word:

Tabel 3-4

Kegelsnede s	Eksentrisiteit	Hoek β van snyvlak	Koëffisiënte	Aantal y -afsnitte van kegelsirkel
Parabol	$e = 1$	$\beta = 90^\circ - \theta$	$B^2 - 4AC = 0$	1
Hiperbool	$e > 1$	$\beta > 90^\circ - \theta$	$B^2 - 4AC > 0$	2
Ellips	$e < 1$	$\beta < 90^\circ - \theta$	$B^2 - 4AC < 0$	0

Rotasie:

Hierdie afdeling handel oor die feit dat die lyne MP en QM in Figuur 3-29 die rotasierigting van die grafiese voorspel. In Stelling 3-7 is aangetoon dat die inverse transformasie gegee word deur:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \text{ en } y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \quad \dots \quad (9)$$

Vervanging van vergelyking (9) in $A\tilde{x}^2 + B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + \tilde{F}$ (vergelyking 6) gee

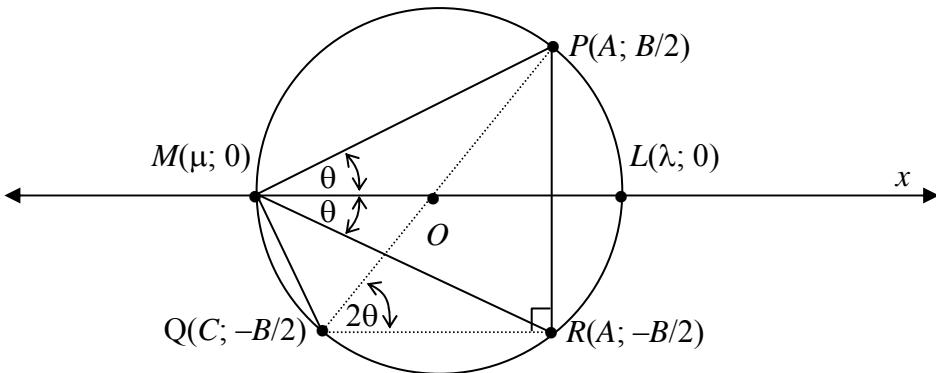
$A(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + C(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + \tilde{F}$ wat dieselfde is as $A(x'^2\cos^2\theta - 2x'y'\sin\theta\cos\theta + y'^2\sin^2\theta) + B(x'^2\sin\theta\cos\theta + y'x'\cos^2\theta - x'y'\sin^2\theta - y'^2\sin\theta\cos\theta) + C(x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\sin\theta\cos\theta + y'^2\cos^2\theta) + \tilde{F}$. Maar deur van die volgende dubbelhoekformules ($\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$) gebruik te maak, vereenvoudig dit verder tot $A[\frac{1}{2}x'^2(1 + \cos 2\theta) - x'y'\sin 2\theta] + B[\frac{1}{2}x'^2\sin 2\theta + y'x'\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{2}x'y'(1 - \cos 2\theta) - \frac{1}{2}y'^2\sin 2\theta] + C[\frac{1}{2}x'^2(1 - \cos 2\theta) + x'y'\sin 2\theta + \frac{1}{2}y'^2(1 + \cos 2\theta)] + \tilde{F}$. Dit vereenvoudig verder tot $\frac{1}{2}[A + A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + C - C\cos 2\theta]x'^2 + [-A\sin 2\theta + \frac{1}{2}B\cos 2\theta + \frac{1}{2}B\cos 2\theta + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}B + C\sin 2\theta]x'y' + \frac{1}{2}[A - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta + C + C\cos 2\theta]y'^2 + \tilde{F}$. Met ander woorde

$$[\frac{1}{2}(A+C) + \frac{1}{2}(A-C)\cos 2\theta + \frac{1}{2}B\sin 2\theta] x^2 + [B\cos 2\theta - (A-C)\sin 2\theta] xy + [\frac{1}{2}(A+C) - \frac{1}{2}(A-C)\cos 2\theta - \frac{1}{2}B\sin 2\theta] y^2 + \tilde{F} \quad \dots \quad (10)$$

Maar die rotasie moet van so aard wees dat die koëffisiënt van die xy -term nul is. Ons wil aantoon dat die geskikte rotasiehoek, die hoek θ is. Laat R die refleksie van P in die x -as wees. Uit Figuur 3-29 volg dat $\hat{PML} = \theta = \hat{LMR}$, dus is $\hat{PMR} = 2\theta$. Maar dan is $\hat{PMR} = \hat{PQR} = 2\theta$ want die hoeke word deur dieselfde koord onderspan. Uit die konstruksie is dit duidelik dat $\hat{PRQ} = 90^\circ$. In ΔPQR is:

$$\cos 2\theta = \frac{QR}{QP} = \frac{A-C}{2OP} \text{ en } \sin 2\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{B}{2OP} \quad \dots \quad (11)$$

Dus moet $B\cos 2\theta - (A-C)\sin 2\theta = 0$. Dan is $B\cos 2\theta = (A-C)\sin 2\theta$ en dus is $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$.



Figuur 3-30

Die xy -term kan nou met behulp van hierdie meetkundige benadering bepaal word deur (11) in (10) se xy -term te vervang:

$$B\cos 2\theta - (A-C)\sin 2\theta = B\left(\frac{A-C}{2OP}\right) - (A-C)\left(\frac{B}{2OP}\right) = 0. \text{ Dus vereenvoudig (10) tot} \\ [\frac{1}{2}(A+C) + \frac{1}{2}(A-C)\cos 2\theta + \frac{1}{2}B\sin 2\theta] x^2 + [\frac{1}{2}(A+C) - \frac{1}{2}(A-C)\cos 2\theta - \frac{1}{2}B\sin 2\theta] y^2 + \tilde{F} \text{ maar word deur van (8) en (11) gebruik te maak: } [\lambda - OP + \frac{1}{2}(A-C)\left(\frac{A-C}{2OP}\right) + \frac{1}{2}B\left(\frac{B}{2OP}\right)] x^2 + [\lambda + OP - \frac{1}{2}(A-C)\left(\frac{A-C}{2OP}\right) - \frac{1}{2}B\left(\frac{B}{2OP}\right)] y^2 + \tilde{F}.$$

Vereenvoudiging gee $[\lambda - OP + \frac{(A-C)^2 + B^2}{4OP}] x^2 + [\mu + OP - \frac{(A-C)^2 + B^2}{4OP}] y^2 + \tilde{F}$, maar in ΔPRQ is $(A-C)^2 + B^2 = RQ^2 + RP^2 = 4OP^2$ volgens Pythagoras. Dan

word die vergelyking $\lambda x^2 + \mu y^2 + \tilde{F}$, waar λ en μ die x -afsnitte van die kegelsirkel is. Dus na die rotasie is $A\tilde{x}^2 + B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + \tilde{F} = A\hat{x}^2 + B\hat{x}\hat{y} + C\hat{y}^2 + \tilde{F}$ waar $A = \lambda$, $B = 0$, $C = \mu$, waar λ en μ die x -afsnitte van die kegelsirkel is. Dus word vergelyking (6) ná die rotasie en translasie $\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \tilde{F} = 0$ waar $\tilde{F} = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F$ soos in vergelyking (3).

Indien die kegelsirkel nie die y -as sny nie (dan is $0 < \mu < \lambda$) sal die grafiek 'n niegedegenererde kegelsnede wees as $\tilde{F} < 0$. Die kegelsnede is 'n ellips met vergelyking: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ met $a = \sqrt{-\frac{\tilde{F}}{\lambda}}$ en $b = \sqrt{-\frac{\tilde{F}}{\mu}}$.

Indien die kegelsirkel nie die y -as twee keer sny nie (dan is $\mu < 0 < \lambda$) sal die grafiek 'n hiperbool wees as $\tilde{F} \neq 0$. Die vergelyking van die ellips is:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = \begin{cases} +1 & \text{as } \tilde{F} < 0 \\ -1 & \text{as } \tilde{F} > 0 \end{cases} \quad \text{met } a = \sqrt{\frac{|\tilde{F}|}{\lambda}} \text{ en } b = \sqrt{-\frac{|\tilde{F}|}{\mu}}. \text{ As } \tilde{F} = 0 \text{ dan is die grafiek die lyne } y' = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{-\mu}} x'.$$

Indien die kegelsirkel nie die y -as net raak (dan is $\mu = 0 < \lambda$) sal die grafiek 'n parabool wees. In daardie geval lewer vergelyking (5) geen oplossing nie. 'n Rotasie, θ , dit is die toepassing van vergelyking (9), verander die vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ tot $\lambda\hat{x}^2 + \mu\hat{y}^2 + D[\hat{x}\cos\theta - \hat{y}\sin\theta] + E[\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta] + F = 0$. Dus is $\lambda\hat{x}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + F = 0$ aangesien $\mu = 0$, waar $\hat{D} = D\cos\theta + E\sin\theta$ en $\hat{E} = -D\sin\theta + E\cos\theta$. Dit is dieselfde as die rotasievergelykings as in (9), dus is $(\hat{D}; \hat{E})$ die koördinate van punt $(D; E)$ in die nuwe \hat{x}, \hat{y} -koördinaatvlak. Daarom kan \hat{D} en \hat{E} meetkundig bepaal word deur ortogonale projeksies op die \hat{x}, \hat{y} -asse (sien Figuur 3-27). As $\hat{E} \neq 0$ dan kan $\lambda\hat{x}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + F = 0$ met behulp van die voltooiing van die vierkant geskryf word as $\left(\hat{x} + \frac{\hat{D}}{2\lambda}\right)^2 = -\frac{E}{\lambda} \left(\hat{y} - \frac{\hat{D}^2 - 4\lambda F}{4\lambda\hat{E}}\right)$. Dus word die vergelyking $\lambda\hat{x}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + F = 0$ onder 'n translasie $x' = \hat{x} + \frac{\hat{D}}{2\lambda}$ en y'

$$= \hat{y} - \frac{\hat{D}^2 - 4\lambda F}{4\lambda \hat{E}} : x'^2 = 2py' \text{ waar } p = -\frac{E}{\lambda}. \text{ Indien } \hat{E} = 0 \text{ dan vereenvoudig } \lambda \hat{x}^2 + \hat{D} \hat{x} + \hat{E} \hat{y} + F = 0 \text{ tot } x = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4\lambda F}}{2\lambda} \text{ (twee lyne) en as } D^2 - 4\lambda F < 0 \text{ dan is daar geen grafiek nie.}$$

Hierdie metode gee nie net 'n wyse waarop nie-gedegenereerde kegelsnedes gekonstrueer kan word nie, maar help ook met die konstruksie van gedegenereerde kegelsnedes.

Tabel 3-5

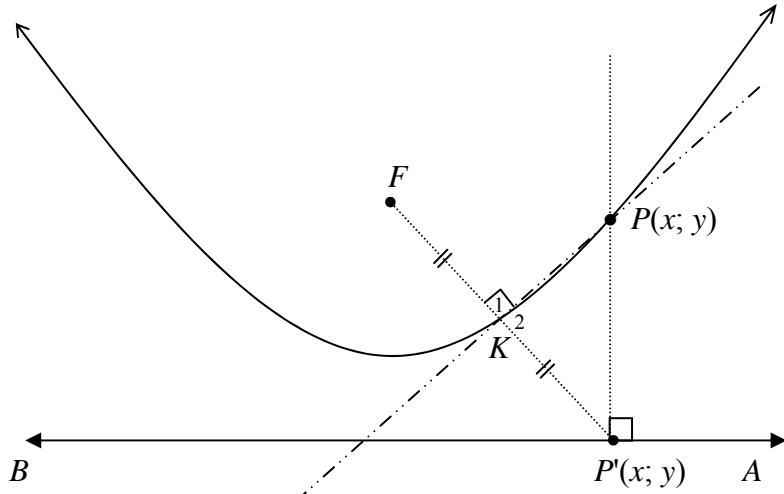
	Grafiek	Voorbeeld	Voorwaarde
$B^2 - 4AC < 0$	ellips	$4x^2 + 9y^2 = 36$	
	sirkel	$x^2 + y^2 = 16$	
	punt	$x^2 + y^2 = 0$	
	geen grafiek	$x^2 = -2$	$D^2 - 4\lambda F < 0$
$B^2 - 4AC = 0$	parabool	$y^2 = 3x$	$\hat{E} = 0$
	2 ewewydige lyne	$(x - 1)(x - 3) = 0$	
	1 lyn	$x^2 = 0$	
$B^2 - 4AC > 0$	hiperbool	$x^2 - y^2 = 1$	
	2 snydende lyne	$(x - 1)(y + 1) = 0$	$\tilde{F} = 0$

3.9.5 Konstruksie met behulp van loodregte verdelers

Kegelsnedes kan ook met behulp van loodregte verdelers gekonstrueer word. Kies enige sirkel met middelpunt O en kies enige ander punt A . Kies nou 'n punt P op 'n reguitlyn of op die omtrek van 'n sirkel en trek die loodregte verdeler van AP . Doe bogenoemde stap herhaaldelik deur punt P op alle punte op die omtrek te kies. Die omhulsel ('envelope') van al hierdie lyne vorm dan kegelsnedes. In afdeling 3.6.3 is aangetoon dat indien $e = 1$, die lokus van die punt $P(x; y)$ 'n parabool is. Dit beteken dat as daar 'n vaste lyn AB en 'n vaste punt F in 'n vlak is, dan is die lokus van die punt $P(x; y)$ 'n parabool as PF gelyk is aan die afstand tussen P en die lyn AB .

Kies enige reguitlyn AB en enige punt F , nie op AB nie. Kies enige punt $P'(x; y)$ op AB en konstrueer die loodregte verdeler van PF . Konstrueer 'n loodlyn deur P' op AB .

Die punt waar hierdie loodlyn en die loodregte verdeler van PF mekaar sny, noem ons $P(x; y)$. Indien $P'(x; y)$ op die lyn AB beweeg, beweeg die punt $P(x; y)$ in die vorm van 'n parabool.

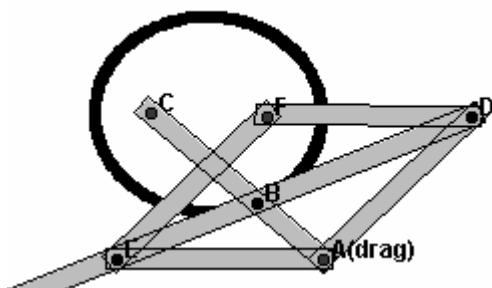


Figuur 3-31

Met behulp van kongruensie kan aangetoon word dat hierdie metode eintlik dieselfde is as die wyse waarop 'n parabool oorspronklik met behulp van 'n lokus gedefinieer is. Indien P en F verbind word, is $\Delta PFK \cong \Delta PP'K$ want $FK = PK$, PK is 'n gemeenskaplike sy en $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$. Daarom is $PF = PP'$ en daarom is die twee verskillende beskrywings eintlik dieselfde.

3.9.6 Meganiese tegnieke

'n Hollandse wiskundige, Frans van Schooten, wat in die 17de eeu geleef het, het 'n meganiese wyse ontwerp vir die skets van kegelsnedes (Van Maanen 1992: 225-229). Die meganiese ontwerp bestaan uit 'n ruit, waarvan punt B die tekenpunt is. Indien A beweeg word, beweeg B in die vorm van 'n ellips.



Figuur 3-32

3.10 Samevatting

Die drie bekende krommes, die hiperbool, parabool en sirkel, wat bekend staan as kegelsnedes, het 'n belangrike rol in die ontwikkeling van wiskunde gespeel. Kegelsnedes kan volgens die snyding van 'n plat vlak en 'n kegel gedefinieer word.

Die resultaat van hierdie snedes is tweedimensionele figure (dit is die ellips, parabool en hiperbool) wat as krommes in die ruimte beskou kan word. Die tipe kegelsnedes wat gevorm gaan word, kan met behulp van die inklinasiehoek β bepaal word (sien Figuur 3-2). Dit is egter ook moontlik vir die vlak om die kegel so te sny dat 'n punt, twee lyne of slegs een lyn verkry word; ons noem dit gedegenereerde kegelsnedes.

Die algebraïese beskrywing van kegelsnedes vereenvoudig die ondersoek na die eienskappe en gebruik van kegelsnedes. Die drie kegelsnedes kan ook met behulp van analitiese meetkunde as 'n lokus op 'n koördinaatvlak beskryf word. Hierdie algebraïese beskrywing van kegelsnedes, deur van 'n lokus gebruik te maak, lewer die tweedegraadse vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Dié vergelyking verteenwoordig dus alle kegelsnedes. In die lokusbeskrywing bepaal die eksentrisiteit van die lokus die soort kegelsnede wat gevorm word. Die soort kegelsnede wat deur 'n tweedegraadse vergelyking beskryf word, kan met behulp van die diskriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ bepaal word. Die rol wat die lyn en die punt in die analitiese beskrywing speel kan meetkundig beskryf word deur van die Dandelinsfeer (Figuur 3-6) gebruik te maak. Hierdie lyn en punt is inderdaad die brandpunt en riglyn van die kegelsnede. Die eenheid van die meetkundige en algebraïese beskrywing kom ook in Tabel 3-2 duidelik na vore. Deur van translasie en rotasie gebruik te maak, kan die algebraïese vergelyking van kegelsnedes verder vereenvoudig word: By 'n ellips en hiperbool vereenvoudig dit na $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ en by 'n parabool na $y^2 = 4dx$.

Die impak van meetkunde op algebra en van algebra op meetkunde kan deurgaans in die hoofstuk gesien word. Die meetkundige prosedure wat in afdeling 3.9.4 bespreek is om die kegelsnedes uit die standaardvergelyking te konstrueer getuig van die krag en voordele indien meetkunde en algebra nie van mekaar geskei word nie. Die rol van analitiese meetkunde om meetkunde en algebra te integreer word ook in die lokusdefinisié in afdeling 3.4 gesien. Die verskillende meetkundige en algebraïese wyses waarop die kegelsnedes gekonstrueer en bepaal kan word, kan in die onderrig en leer gebruik word om kegelsnedes vanuit verskillende hoeke te benader om sodoende hoërordedenke te bevorder.

Hoofstuk 4: Die rol van kegelsnedes in projektiewe meetkunde

In hoofstuk 3 is aangetoon hoe die hiperbool, parabool en ellips met behulp van kegelsnedes vanuit een kegel verkry kan word. Die vergelyking van hierdie grafieke is algebraïes met behulp van 'n lokus bepaal. Hierdie lokus is gedefinieer deur van afstand gebruik te maak. Maar afstand bly slegs behoue onder Euklidiese transformasies, byvoorbeeld translasies en rotasies. Dit kan beskryf word as 'n moderne (analitiese) weergawe van die werk van Apollonius en die ou Grieke wat terugdateer tot ongeveer 250 jaar voor Christus se geboorte. Hierdie definisie van kegelsnedes is nie voldoende in projektiewe meetkunde nie aangesien afstand nie in die projektiewe vlak behoue bly nie. Ons soek dus na 'n meer algemene wyse om kegelsnedes te definieer sonder om van afstand en verhouding gebruik te maak. Hierdie ondersoek word nie streng wiskundig uitgevoer nie. Die doel is eerder om die rol wat kegelsnedes in projektiewe meetkunde speel te ondersoek.

4.1 *Oorsprong van projektiewe meetkunde*

In hoofstuk 3 is die algemene vergelyking (sien Stelling 3-3) van 'n kegelsnede vereenvoudig met behulp van translasies en rotasies (sien Stelling 3-10 en Stelling 3-11). Hierdie vereenvoudiging veronderstel dat ons in die Euklidiese vlak werk wat uniform of homogeen is. Dit beteken dat die Euklidiese vlak by die een plek net soos op die ander plek lyk. Die homogeniteit van die Euklidiese vlak maak dat voorwerpe in hierdie vlak geroteer en geskuif kan word sonder dat die voorwerp uitrek of vervorm (Jennings 1994: 1). Dus kan afstand-instrumente soos 'n gemerkte liniaal (en gradeboog) in die Euklidiese vlak gebruik word om afstande (en hoeke) van verskillende voorwerpe met mekaar te vergelyk. Euklidiese meetkunde beskryf ons leefwêreld so goed dat ons geneig is om te dink dat dit al soort meetkunde is wat daar is, en daarom voldoende is. Meetkunde (geometrie) se oorspronklike betekenis is immers '*meting van die aarde*' (Birchfield 1998: 1). As ons egter na die afbeeldingsproses by skilderye, kameras en na rekenaargrafika kyk is dit duidelik dat Euklidiese meetkunde nie voldoende is nie. In 'n poging om driedimensionele voorwerpe realisties op 'n tweedimensionele doek voor te stel het die Renaissance

skilders hulle tot meetkunde gewend (Sibley 1998: 226). Onder die invloed van Plato het hulle geglo dat die natuur wiskundig saamgestel is, daarom het hierdie skilders na wiskundige verbande gaan soek om diepte in skilderye te verkry. Hierdie poging het geleid tot die ontwikkeling van lineêre perspektiwiteit (Veltman 2000: 8). Die eerste kunstenaar wat bekend is dat hy lineêre perspektief gebruik het, is Donato di Niccolò di Betto Bardi (1386-1466), wat as Donatello bekend gestaan het (Calter 1998). Bix (1994: 263) verduidelik die begrip *perspektiwiteit* in 'n skildery soos volg:

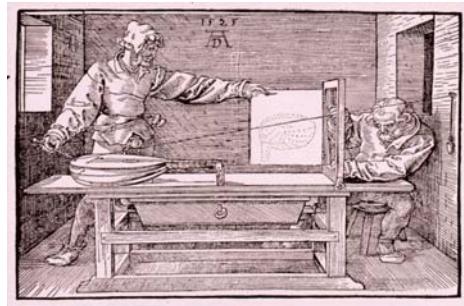
The canvas is placed between the artist's eye and the subject. Each feature of the subject is drawn where the line from the feature to the artist's eye crosses the canvas. Then light rays travel to the artist's eye from the drawing along the same lines as light rays travelling from the subject. Thus, the drawing and the subject create the same image in the eye.

Om 'n skets realisties te laat lyk, moet van die eienskappe van die werklikheid verander en verwring word. Calter (1998) verduidelik dat die grootte van voorwerpe verander en dat ewewydige lyne konvergeer:

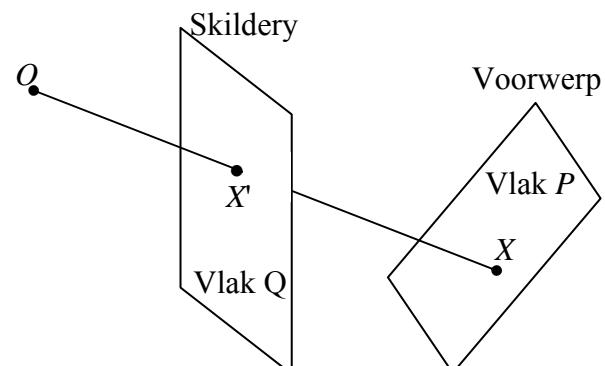
... the apparent size of an object decreases with increasing distance from the eye.
That's the phenomenon that makes railroad tracks appear to converge in the distance.

Selfs vorms verander. Sommige sirkels sal byvoorbeeld as ellipse voorgestel word, vierkante as trapesiums en ewewydige lyne as lyne wat mekaar by 'n punt sny (Birchfield 1998: 1). Die oorspronklike gedagte van projektiewe meetkunde het huis ontstaan uit die studie van hierdie perspektiwiteit (Bix 1994: 263). In plaas daarvan om perspektiwiteit fisies te verkry,

soos voorgestel in 'n skildery van Albrecht Dürer (1471-1528) in Figuur 4-1, het kunstenaars die wiskundige beginsels vir perspektiwiteit ontwikkel. Om hierdie beginsels te bepaal beskou ons twee vlakke, 'n vlak P en Q , en 'n punt O wat nie op een van die vlakke lê nie soos in (Bix 1994: 263).



Figuur 4-1



Figuur 4-2

'n Punt X van vlak P word op 'n punt X' van vlak Q afgebeeld waar die lyn OX

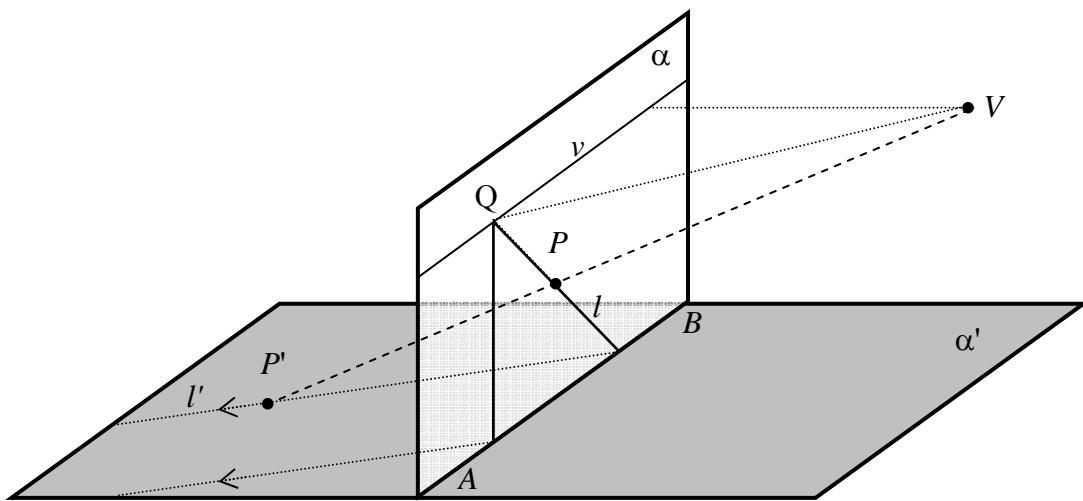
die vlak Q sny (sien Figuur 4-2). Die afbeelding van X na X' van die punte van vlak P na die punte van vlak Q word die *projeksie* van P na Q deur O genoem. As O die kunstenaar se oog voorstel, sal 'n punt X op die voorwerp deur die punt X' op die skildery voorgestel word.

Alhoewel Euklidiese meetkunde ons leefwêreld goed beskryf, beskryf dit nie ons visuele wêreld nie (Ayres 1967: 2). In rekenaargrafika kom dieselfde beginsel na vore; die driedimensionele wêreld moet op 'n tweedimensionele rekenaarskerm voorgestel word. Die relevansie van projektiewe meetkunde as 'n wyse om 'n driedimensionele beeld op 'n plat vlak voor te stel, maak dit tans 'n voorvereiste vir die studie van rekenaargrafika (Birchfield 1998: 1). Dis belangrik om daarop te let dat die teorie van perspektiwiteit in skilderye slegs 'n benaderde teorie is aangesien ons die wêreld deur twee oë sien. Dit lei gevolglik tot stereoskopiese visie (Pedoe 1963: 4). Moderne skilders is bewus van hierdie eienskap en gebruik daarom nie noodwendig hierdie streng klassieke teorie van perspektiwiteit nie.

Hierdie vereenvoudigde bespreking verduidelik sekere basiese beginsels van projektiewe meetkunde. Die Franse wiskundige, Gerard Desargues (1593-1662) het die ontwikkeling van projektiewe meetkunde voorsien lank voordat dit werklik ontwikkel is. Die eerste werklik geskrewe publikasie het eers twee eeue daarna verskyn toe Poncelet (1788-1867) in 1822 die boek, *Traité des propriétés des figures* gepubliseer het. Poncelet het die grootste gedeelte van hierdie werk na die oorlog van Napoleon, in 'n gevangenis in Rusland voltooi. Ander ontwikkelings in projektiewe meetkunde is eers later in die negentiende eeu gemaak. Karl von Staudt (1798-1867) het in sy boek, *Geometrie der Lage*, aangetoon dat projektiewe meetkunde sonder enige metriese basis ontwikkel kan word (Smart 1989: 278). In 1872 het Felix Klein in sy Erlanger program die prominente rol van projektiewe meetkunde in die klassifisering van meetkundes aangetoon.

4.2 Skaduwees

Die studie van skadumeetkunde het 'n lang geskiedenis wat oorvleuel met dié van kegelsnedes en projektiewe meetkunde. Om dit aan te toon word 'n illustrasie in Pedoe (1963: 2) gebruik: Beskou twee vlakke α en α' wat in 'n lyn AB sny (Figuur 4-3). Ons aanvaar dat die vlak α deursigtig is, met punte, lyne en kegelsnedes daarop. 'n Lig (puntbron) by V sal die skaduwees van die figure in α op α' projekteer.



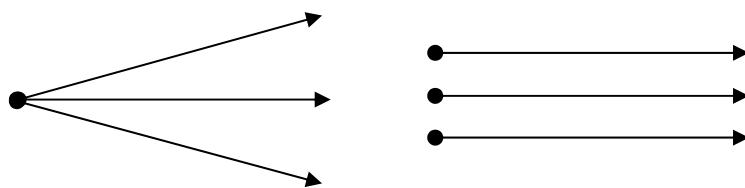
Figuur 4-3

Ons wil nou bepaal hoe punte, lyne en kegelsnedes wat in die vlak α is, se skadu in die vlak α' sal lyk. Die punt P in die vlak α word geprojekteer (se skaduwee) op 'n punt P' in die vlak α' . Die lyn l deur P in die vlak α word geprojekteer op die lyn l' deur P' op die vlak α' . Dus bly punte, lyne en die relasie, 'n punt op 'n lyn, behoue onder so 'n projeksie of skadu. Daarom sal invalling (kollineêre punte en saamlopende lyne) onder so 'n projeksie behoue bly. Maar daar is 'n belangrike uitsondering wat lyne betref: Dit is die lyn v in die vlak α , wat in 'n denkbeeldige vlak, ewewydig aan vlak α' , deur die punt V is. Hierdie lyn gaan geen skadu in die vlak α' hê nie. Ook geen punt op die lyn v het 'n skadu in α' nie. Hierdie lyn v staan bekend as die 'verdwyn'-lyn. Dit is belangrik om daarop te let dat enige lyn in die vlak α' (skadu), wat ewewydig is aan die lyn l' , voortgebring word deur 'n lyn in die vlak α wat deur dieselfde punt Q op die verdwyn-lyn v gaan.

Sekere eienskappe van 'n voorwerp bly onder 'n projeksie onveranderlik. Poncelet het hierdie onveranderde eienskappe bestudeer en meetkunde daarvolgens geklassifiseer. 'n Reguitlyn se skaduwee bly 'n reguitlyn en 'n raaklyn aan 'n kromme bly 'n raaklyn aan die kromme. Projektiewe transformasies behou

- soort, dit is 'n punt bly 'n punt en 'n lyn 'n lyn
- invalling, dit is punte op 'n lyn of 'n lyn op 'n punt

Daar is ook eienskappe wat verlore gaan onder projeksies of skaduwees, byvoorbeeld afstand en hoekmeting. Daarom word projektiewe meetkunde beskryf as "die meetkunde van die ongemerkte liniaal". Die behoud van ewewydigheid, al dan nie, hang van die tipe projeksie af. Ons vind 'n voorbeeld van 'n puntprojeksie in Figuur 4-4 (links). Onder hierdie projeksies gaan ewewydigheid verlore, maar daar bestaan ook 'n ander tipe projeksie wat 'n parallelleprojeksie genoem word (Figuur 4-4 regs). Indien die ligbron oneindig ver van die voorwerp af geplaas word en die ligbron nie 'n puntbron is nie, maar 'n oneindige groot bron, bly ewewydigheid wel behoue.

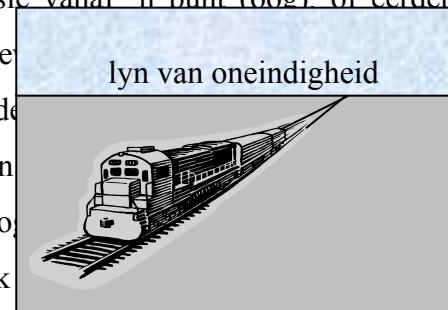


Figuur 4-4

Stother (2000) verduidelik dat die son as so 'n ligbron (goeie benadering) gebruik kan word om parallelleprojeksies te bestudeer. As die son as bron gebruik word, is die skadu van die reghoekige venster byvoorbeeld 'n parallelogram (by benadering). Namate die son beweeg, verander die skadu van die venster, maar bly dit steeds 'n parallelogram. Hierdie projeksies staan ook bekend as affiene of parallelleprojeksies.

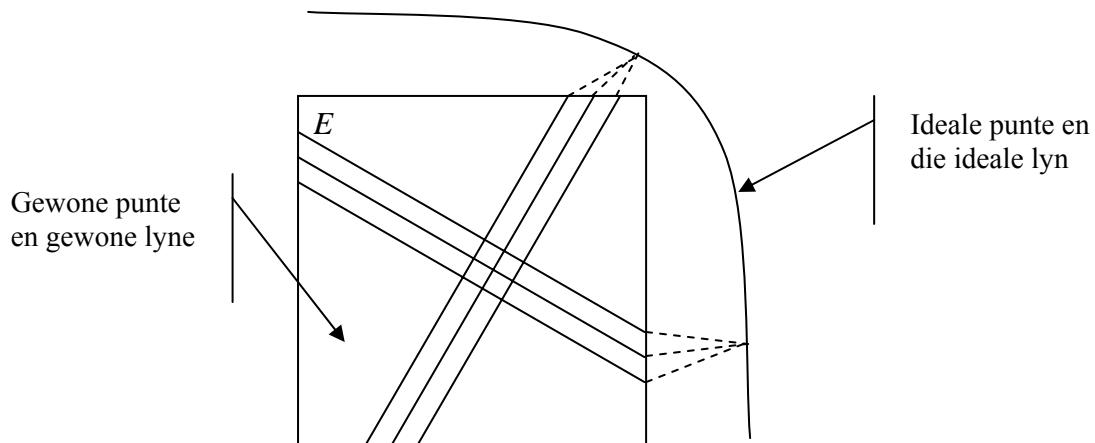
4.3 Die projektiewe vlak

In die vorige afdeling is aangetoon dat 'n projeksie vanaf 'n punt (oog) of eerder kegelprojeksie, kan lei tot die beginsels van projektiewe meetkunde. Nuwe konsep word die eienskappe ondersoek wat behoue bly onder projeksies. Die feit dat ewewydigheid nie behoue bly onder 'n projeksie nie, is aangedui dat ewewydigheid nie behoue bly onder 'n projeksie nie (soos 'n eindige afstand van die voorwerp is) nie. In 'n projeksie word pare lyne in 'n ruimte op 'n tweedimensionele oppervlak verteenwoordig. Dit is die nuwe konsep te skep, naamlik die *ideale lyn*. Dit is die lyn waar alle pare ewewydige lyne mekaar ontmoet. Die ideale lyn kan met Figuur 4-3 se 'verdwyn'-lyn vergelyk.



Figuur 4-5

word of met die horison by skilderye. Die ideale lyn wat bygevoeg word voel kunsmatig, maar as ons dink aan 'n perspektiewe skets van treinspore dan word die treinspore geteken asof hulle by 'n punt op die horison sny (Figuur 4-5). Vir elke paar treinspore in 'n ander rigting ontmoet die spore mekaar in 'n ander punt op die horison. Hierdie ideale punte en ideale lyne stel ons in staat om die projektiewe vlak te beskryf. Bix (1994: 267) beskryf die projektiewe vlak soos volg (sien Figuur 4-6): Dit bestaan eerstens uit die Euklidiese vlak E . Ons noem hierdie vlak se punte en lyne gewone punte en gewone lyne. Vir elke familie van ewewydige lyne in E , skep ons 'n nuwe punt wat slegs op hierdie familie van lyne en op geen ander lyne in E lê nie, ons noem dit 'n ideale punt.



Figuur 4-6

Dus vir elke familie van lyne met 'n ander helling word 'n nuwe ideale punt geskep. Hierdie ideale punte vorm 'n lyn wat die ideale lyn genoem word. Die ideale lyn bevat slegs ideale punte en geen ander punte nie. Dus bestaan die projektiewe vlak uit gewone punte en gewone lyne asook ideale lyne en ideale punte. Indien nie onderskei word tussen gewone punte en ideale punte nie, word hierdie vlak saam met die ideale lyn, die *projektiewe vlak* genoem. Dus kan ideale punte op gewone punte afgebeeld word, en andersom. In hierdie uitbreiding van die Euklidiese vlak kan ons dus sê dat enige twee lyne mekaar in 'n unieke punt sny. Dieselfde beginsel geld ook by skadu en skilderye. As die ligbron in Figuur 4-3 met die oog, die vlak α met die skildery en die beeld met 'n skadu in α' vervang word kry ons dieselfde situasie. Ons kan die twee treinspore as die lyne l' en as die lyn in α' , wat ewewydig is aan die lyn l' , beskou. Op die skildery, dit is die vlak α , sny die twee treinspore mekaar in 'n punt Q op die horison.

In plaas daarvan dat hierdie ideale punte projektiewe meetkunde kompliseer, vereenvoudig dit projektiewe meetkunde en gee dit daaraan 'n besondere eienskap van dualiteit (Cederberg 1989: 127). In projektiewe meetkunde het lyne en punte dieselfde algebraïese struktuur. Die *duaal* van 'n bewering word verkry deur elke voorkoms van die woord 'punt' met 'lyn' te vervang en andersom. De Villiers (1996) verduidelik dit soos volg:

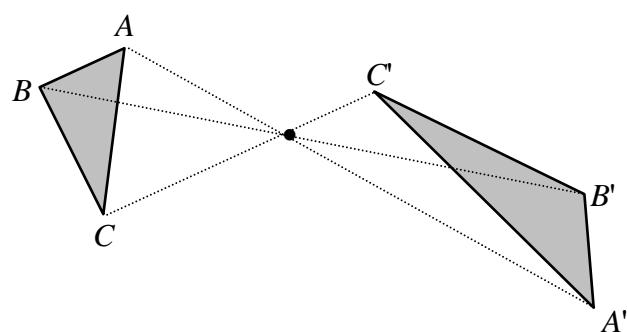
Two theorems or configurations are called dual if the one may be obtained from the other by replacing each concept and operator by its dual concept and operator. In projective geometry we find the following duality:

- vertices (points) – sides (lines)
- inscribed in a circle – circumscribed around a circle
- collinear – concurrent

Definisie 4-1: 'n Aksiomatiese stelsel waarin die dual van elke stelling weer 'n stelling is bevredig die *beginsel van dualiteit*.

Die voordeel van 'n duale stelsel is dat 'n 'nuwe' stelling verkry kan word deur die woorde 'punt' en 'lyn' om te ruil in enige bestaande stelling of aksioma. Hierdie beginsel word baie duidelik deur Desargues se stelling geïllustreer. Maar eers het ons twee definisies nodig.

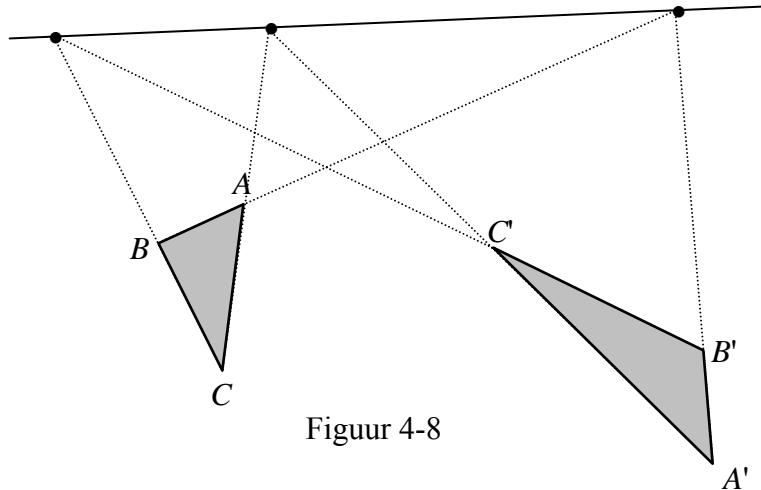
Definisie 4-2: Twee driehoeke (drie nie-kollineêre punte) ΔABC en $\Delta A'B'C'$ is *perspektief van 'n punt* as die lyne wat die ooreenstemmende hoekpunte (AA' , BB' , CC') verbind, saamlopend is.



Figuur 4-7

Die dual van hierdie definisie verduidelik wat perspektief van 'n lyn beteken.

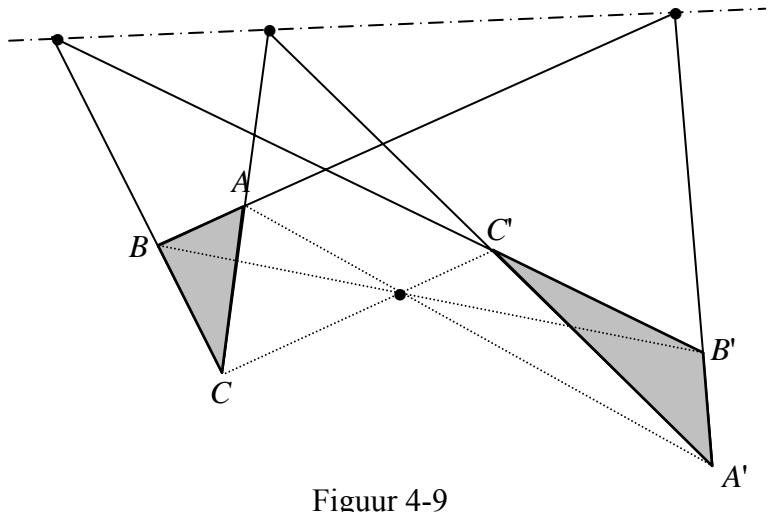
Definisie 4-3: Twee driehoeke (drie nie-kollineêre punte) ΔABC en $\Delta A'B'C'$ is *perspektief van 'n lyn* as die punte wat die ooreenstemmende sye (AA' , BB' , CC') verbind, kollineêr is.



Figuur 4-8

Met behulp van hierdie definisies kan Desarques se stelling geformuleer word:

Stelling 4-1 : As twee driehoeke perspektief van 'n punt is, is dit ook perspektief van 'n lyn (Desarques se stelling).



Figuur 4-9

Omdat daar nie van afstand in projektiewe meetkunde sprake is nie sal die driehoek se drie sye in die projektiewe vlak uit die drie lyne bestaan wat deur drie nie-kollineêre punte bepaal word. Aangesien Desarques se stelling slegs van lyne, punte en invalling gebruik maak geld hierdie stelling ook in die projektiewe vlak.

4.4 Kegelsnedes en skadumeetkunde

In 1822 het Poncelet *Traité des propriétés projectives des figures* gepubliseer, waarin hy betoog dat elke kegelsnede in projektiewe meetkunde ekwivalent is aan 'n sirkel. In hierdie afdeling word hierdie eienskappe ondersoek. Vir hierdie ondersoek word bepaalde terminologie benodig. 'n Projeksie vanaf 'n punt V , soos in Figuur 4-10, word 'n kegelprojeksie genoem en die strale deur V vorm 'n kegeloppervlakte. Enige punt P van die lyn AB in die figuur word onveranderd deur so 'n projeksie gelaat. Dus enige lyn in die vlak α wat AB in 'n punt P sny sal geprojekteer word op 'n lyn in die vlak α' wat AB in dieselfde punt sny. Dus sal 'n lyn en sy projeksie mekaar altyd op AB sny (Pedoe 1963: 4). AB word die projeksie-as genoem.

Tot nou toe het ons slegs die projeksie van punte en lyne ondersoek. Wat sal gebeur as daar 'n sirkel in die vlak α is? Sy projeksie in α' word die beste beskryf deur Guedj (1998: 177) in sy roman wat handel oor die geskiedenis van wiskunde:

De lichtbundel uit de kegelvormige lampenkap vormde een perfecte cirkel op de stenen.

De rauwe stem van Nofuture klonk op uit het schemerdonker:
‘Cirkel!’

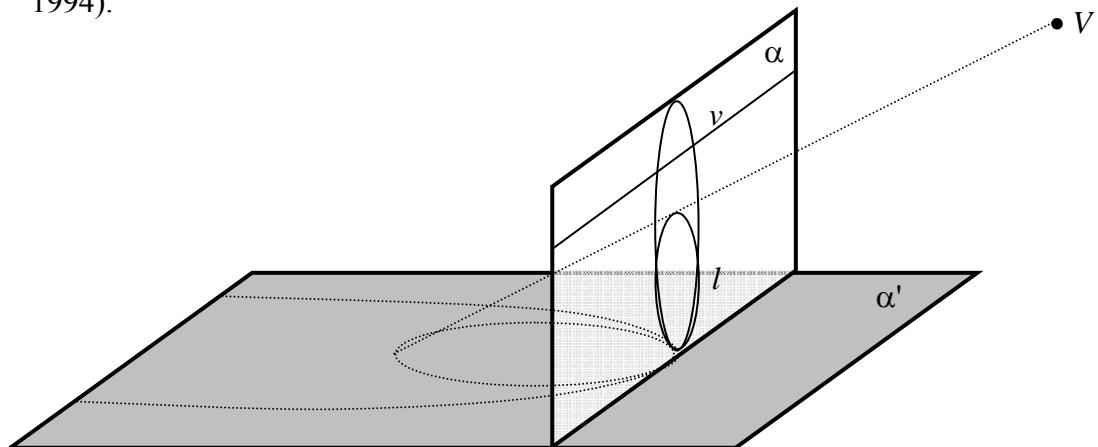
Max kantelde de lantaarn iets. De lichtvlek werd langer, de cirkel werd ovaal.
‘Ellips!’

Max bleef de lantaarn langzaam kantelen. De ellips werd nog langer. Plotseling scheurde hij. De lichtvlek op de muur was geen gesloten geheel meer; hij werd nu alleen nog afgebakend door de ruimte zelf.

‘Parabool!’ riep Nofuture.

Doordat Max de lantaarn bleef draaien, werd de hoek tussen de konische kap en de muur steeds kleiner. De parabool werd groter. Plotseling verscheen op de muur aan de overkant een tweede lichtvlek. De stem van Nofuture klonk aarzelend: ‘Hyperbool!’

Dus kan enige sirkel in α as 'n ellips, parabool of hiperbol projekteer word (Lee 1994).



Figuur 4-10

In hoofstuk 3 is aangetoon dat 'n kegelsnede die snyding van 'n kegel met 'n vlak is. In die geval van die skadu soos verduidelik in Figuur 4-10 vorm die skadu van die sirkel, in vlak α , 'n kegel. Die snydingsvlak kan as die vlak α' gesien word. Lee (1994) verduidelik verder dat die brandpunt van die gevormde kegelsnede soos volg bepaal kan word:

This can be seen as the shadow of a ball placed on a table. The shadow cast by a light source above the ball is an ellipse. If the light source is in a plane parallel to the table that passes the top of the ball, a parabola is formed. Lower the light source, then you get one branch of a hyperbola. The point where the ball touches the table is the focus of the conics. We can think of the light source as the vertex of a cone. The light source projects through a circle on the ball to form a right circular cone. The table is then the cutting plane.

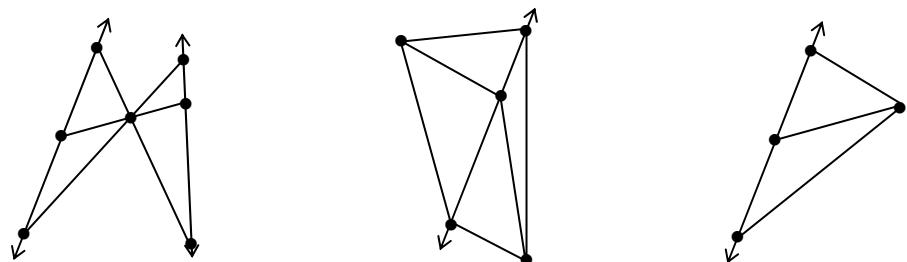
'n Ellips, parabool en hiperbool verloor hulle onderskeiding in projektiewe meetkunde omdat hulle projektfiel ekwivalent is, dit beteken dat enige kegelsnede op enige ander kegelsnede geprojekteer kan word (Birchfield 1998: 8). Daar is alreeds vermeld dat ewewydigheid en hoekmeting nie onder so 'n projeksie behoue bly nie. Die vraag is waarom kegelsnedes wel onder 'n projeksie behoue bly?

In hoofstuk 3 is die kegelsnedes Euklidies gedefinieer met behulp van 'n lokus wat 'n sekere afstand vanaf 'n punt en 'n lyn is. In projektiewe meetkunde kom die terme punte en lyne wel voor, maar afstandsmeting nie (want ons werk met 'n ongemerkte liniaal). As ons die kegelsnedes in die projektiewe vlak wil definieer, mag die term afstand nie in die definisie gebruik word nie (Pedoe 1963: 7). As die begrip afstand onontbeerlik sou wees in die definisie van kegelsnedes, sou kegelsnedes nie behoue gebly het onder projeksies nie. Die feit dat dit wel behoue bly beteken dat dit moontlik moet wees om kegelsnedes met 'n ongemerkte liniaal (geen afmetings) te konstrueer. Daar moet dus 'n metode wees waarvolgens kegelsnedes beskryf kan word, slegs in terme van eienskappe wat behoue bly onder projeksies. Sulke eienskappe is lyne, punte, saamlopendheid en kollineariteit. Om 'n kegelsnede in terme van hierdie eienskappe te beskryf moet die begrip projektiwiteit eers verduidelik word.

4.5 *Projektiwiteit*

'n Versameling van lyne deur die punt P word 'n bundel lyne genoem en 'n versameling van punte op 'n lyn p word 'n bundel punte genoem. 'n *Perspektiwiteit* is 'n een-eenduidige afbeelding tussen

- twee bundels punte sodat elke lyn wat die ooreenkomstige punte van bundels verbind deur een punt sny (sien Figuur 4-11 die eerste skets)
- twee bundels lyne sodat elke snydingspunt van ooreenkomstige lyne op een lyn is (sien Figuur 4-11 die tweede skets).
- 'n bundel punte, met as p en 'n bundel lyne, met middelpunt P , as elke punt op die lyn p ooreenkomen met 'n lyn deur die punt P (sien Figuur 4-11 die derde skets).



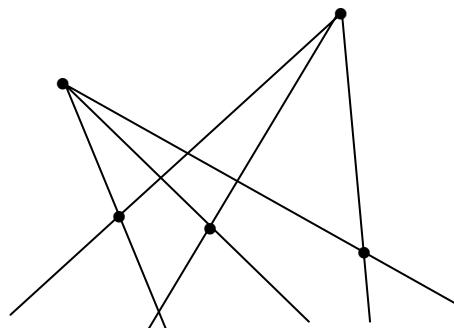
Figuur 4-11

Definisie 4-4: 'n *Projektiwiteit* is 'n een-eenduidige afbeelding tussen elemente van twee bundels wat uit 'n eindige aantal perspektiwiteite bestaan.

Perspektiwiteite en projektiwiteit stel ons in staat om kegelsnedes te definieer sonder om van afstande gebruik te maak.

Definisie 4-5: Die versameling van snydingspunkte van ooreenstemmende lyne van twee projektief, maar nie perspektief, verwante bundels van lyne met verskillende middelpunte vorm 'n *puntkegelsnede* (Figuur 4-12). Die middelpunte van die projektiwiteit is ook punte van die kegelsnede.

Kegelsnedes word dus uniek bepaal deur vyf punte. Dus as A, B, C, D , en E vyf nie-kollineêre punte is, dan is daar unieke kegelsnedes deur al vyf punte. Die dual van die vorige definisie gee aan ons 'n ander wyse om kegelsnedes te beskryf.



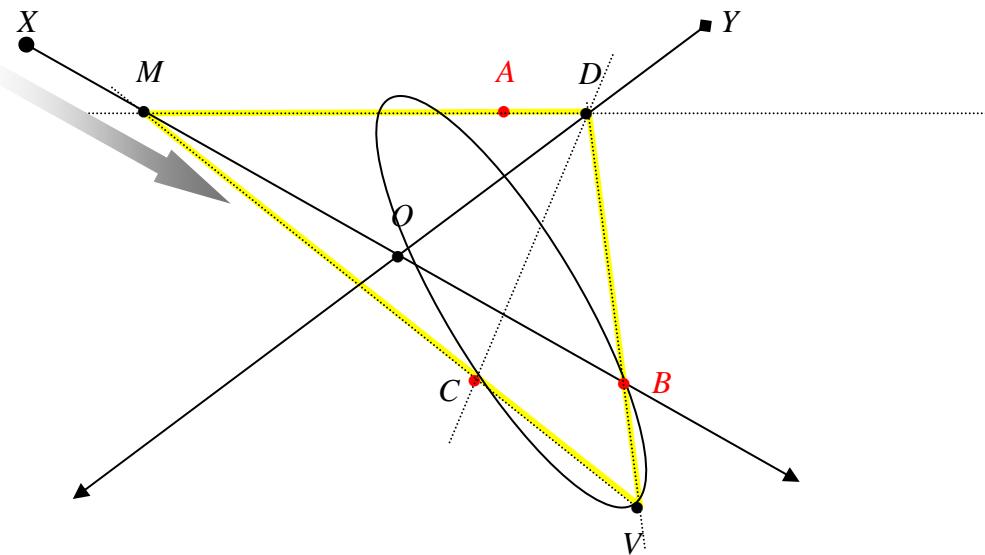
Figuur 4-12

Definisie 4-6: Die versameling van lyne wat ooreenstemmende punte van twee projektfief, maar nie perspektief, verwante bundels van punte met verskillende middelpunte vorm 'n *lynkegelsnede*. Die middelpunt van die projektiwiteit is ook punte van die kegelsnede.

Indien vyf punte van 'n kegelsnede bekend is, en die kegelsnede slegs in terme van lyne en punte gedefinieer is, moet dit moontlik wees om ander punte met 'n ongemerkte liniyal te bepaal. In afdeling 4.6.2 word so 'n metode aangetoon en verduidelik.

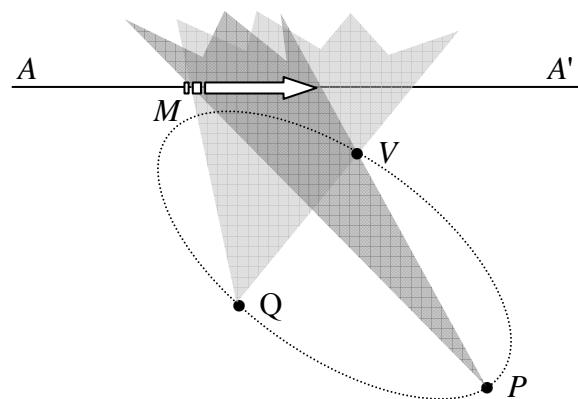
Daar bestaan verskeie ander metodes waar die idee van projektiwe gebruik word om kegelsnedes te konstrueer. Die volgende konstruksie staan bekend as die MacLaurin/Braikenridge konstruksie:

'n Kegelsnede is die lokus van die hoekpunt, V van 'n driehoek waarvan die sye deur die punte A , B en C gaan en waarvan die basishoeke langs vasgestelde reguitlyne, OX en OY , beweeg.



Figuur 4-13

Alhoewel hierdie konstruksie lank voor die bestaan van projektiwe meetkunde gepubliseer is, is dit nie moeilik om te sien dat die 'bundel van lyne' deur C projektfief verwant is aan die 'bundel van lyne' deur B (deur perspektiwiteit op OX en OY) sodat die snyding van alle ooreenkomsige lyne (die punt V)



Figuur 4-14

op die kegelsnedes van elke ‘bundel’ lê (Salmon 1904: 247). Newton het dieselfde beginsel gebruik om kegelsnedes met behulp van roterende hoeke te konstrueer. Omdat Newton se formulering uitgebreid is, gebruik ons eerder die herformulering van Brinkworth en Scott (1998: 5). Twee hoeke van konstante grootte roteer om twee vaste punte P en Q ; die snyding van twee van hierdie kante (sê M) beweeg langs ’n reguitlyn AA'; dan sal die lokus van V , die snyding van die ander twee kante ’n kegelsnede vorm deur die punte P en Q (sien Figuur 4-14)

4.6 Die vergelyking van puntkegelsnedes

In die vorige afdeling is kegelsnedes (puntkegelsnedes) in terme van ’n projektiwiteit tussen twee bundels lyne gedefinieer (sien Definisie 4-5). In hierdie afdeling word aangetoon dat hierdie definisie aanleiding gee tot dieselfde kegelsnedes wat in hoofstuk 3 met behulp van lokusse in die Euklidiese vlak gedefinieer is. Die werk in hierdie paragraaf is grootliks gebaseer op die werk van Fishback (1969: 144-167), Cederberg (1989: 127-199) en Jennings (1994: 115-151). Ons moet dus aantoon dat ’n puntkegelsnede, wat met behulp van projektiwiteite gedefinieer word, ook ’n vergelyking van die vorm $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ het. Om die vergelyking van hierdie puntkegelsnedes te bepaal, moet eerstens koördinate aan die projektiewe vlak toegeken word. Tweedens moet die algebraïese vorm van ’n projektiwiteit, soos gedefinieer in Definisie 4-4, bepaal word.

4.6.1 Koördinate vir die projektiewe vlak

Die koördinaatstelsel van Euklidiese vlak gee aan alle gewone punte van die projektiewe vlak koördinate en is daarom byna voldoende vir projektiewe meetkunde. Dit is slegs die ideale punte op die ideale lyn wat nie deur die Euklidiese koördinate voorgestel kan word nie. Indien drie koördinate, byvoorbeeld $(x; y; z)$, gebruik word om die punte in die projektiewe vlak voor te stel, word hierdie probleem oorkom. As die derde koördinaat 0 is, is die punt op ’n ideale lyn. Al die gewone punte $(x; y)$ in die Euklidiese vlak word in die projektiewe vlak geskryf as $(x; y; 1)$. Indien die derde koördinaat nie nul is nie, kan dit in die vorm $(ax; ay; a)$ waar $a \neq 0$ geskryf word.

Om hierdie skryfwyse te verantwoord word twee ewewydige lyne, $Ax + By = C$ en $Ax + By = C'$ met $C \neq C'$, se snypunte bepaal. Aftrekking van die vergelykings lewer ’n teenspraak: $C - C' = 0$. Maar in projektiewe vlak sny elke paar ewewydige lyne mekaar in ’n ideale punt. Om hierdie teenspraak te voorkom kan $(C - C')$ deur ’n

veranderlike vermenigvuldig word. Dit gee dan $(C - C)z = 0$. Dus verander die vergelyking van 'n lyn van die vorm $Ax + By = C$ na die vorm $Ax + By = Cz$. 'n Punt word dus eerder deur drie koördinate in die projektiewe vlak voorgestel. Dit beteken dat die punte $(x; y; 1)$ en $(ax; ay; a)$ dieselfde punt in die projektiewe vlak voorstel as $a \neq 0$.

Definisie 4-7: Die versameling van alle koördinate $(x; y; z)$ waar x, y en z nie al drie nul is nie, stel die natuurlike *homogene koördinate* van die projektiewe vlak voor.

As $z \neq 0$ is die koördinate $(x; y; z)$ die van gewone punte van die Euklidiese vlak met koördinate $(a; b)$, waar $a = \frac{x}{z}$ en $b = \frac{y}{z}$. As $z = 0$ is die koördinate $(x; y; z)$ dié van ideale punte.

Daar is alreeds vermeld dat projektiewe meetkunde aan die beginsel van dualiteit voldoen. Dit beteken dat die terme 'punt' en 'lyn' in enige stelling omgeruil kan word om sodoende 'n nuwe stelling te verkry wat in die projektiewe vlak geld. Indien die vergelykings $2x + 4y + 6z = 0$ en $4x + 8y + 12z = 0$ beskou word, is dit duidelik dat dit dieselfde vergelyking voorstel. Dus kan enige drietal eweredig aan [2, 4, 6] as koëffisiënte van dieselfde lyn dien.

Definisie 4-8: Die vergelyking in x, y en z van die vorm $ax + by + cz = 0$ waar A, B en C nie almal nul is nie, is die vergelyking van 'n lyn in die projektiewe vlak. Die versameling van alle $[a; b; c]$ waar nie a, b en c gelyktydig nul is nie, stel die *natuurlike homogene lyn koördinate* van die projektiewe vlak voor.

Dus word die vergelyking $ax + by + cz = 0$ bevredig deur die punt $(x; y; z)$ en die lyn $[a; b; c]$ as en slegs as die punt op die lyn is of as die lyn op die punt is.

Die dualiteit van lyne en punte in die projektiewe vlak volg dus vanself:

Vir 'n spesifieke vaste $[a; b; c]$ is $ax + by + cz = 0$ die vergelyking van 'n lyn met koördinate $[a; b; c]$. Dit beteken dat die lyn slegs deur daardie punte wat op die lyn is, bevredig word.

Vir 'n spesifieke vaste $(x; y; z)$ is $ax + by + cz = 0$ die vergelyking van 'n punt met koördinate $(x; y; z)$. Dit beteken dat die punt slegs deur daardie lyne bevredig word wat op die punt is.

4.6.2 Projektiwiteit tussen twee bundels

Indien koördinate soos in afdeling 4.6.1 aan die projektiewe vlak toegeken word, kan projektiwiteit tussen twee bundels met behulp van 'n 2×2 matriks voorgestel word (Cederberg 1989: 157). Hierdie 2×2 matriksvoorstelling van projektiwiteit vereis dat punte en lyne in die projektiewe vlak eerder deur twee koördinate voorgestel moet word as deur drie koördinate soos wat in afdeling 4.6.1 aangetoon is. Dit kan gedoen word deur twee basiselemente op die bundel te neem, byvoorbeeld $P(p_1; p_2; p_3)$ en $Q(q_1; q_2; q_3)$, en 'n derde punt $R(r_1; r_2; r_3)$, wat op die lyn PQ is, in terme van P en Q uit te druk. Met ander woorde $r_1 = c_1 p_1 + c_2 q_1$, $r_2 = c_1 p_2 + c_2 q_2$ en $r_3 = c_1 p_3 + c_2 q_3$, waar $(c_1; c_2)$ bekend staan as die homogene parameters van R ten opsigte van P en Q . As gevolg van die dualistiese aard van die projektiewe vlak kan hierdie idee net so na 'n bundel lyne oorgedra word.

Die volgende stap is nou om 'n algebraïese wyse te bepaal om 'n projektiwiteit mee voor te stel. Cederberg (1989: 160) het die volgende belangrike resultaat bewys:

Stelling 4-2: 'n *Projektiwiteit tussen die elemente van twee bundels* kan voorgestel word deur 'n reële 2×2 matriks met vergelyking $kX = AX'$, waar $|A| \neq 0$, $k \neq 0$ en X en X' die homogene koördinate van die oorspronklike en die afgebeelde bundels is.

Fishback (1969: 161) toon aan dat hierdie resultaat gebruik kan word om die analitiese voorstelling van puntkegelsnedes te bepaal:

Konstrueer 'n projektiwiteit tussen twee bundels lyne met koördinate $c_1[u_1, u_2, u_3] + c_2[v_1, v_2, v_3]$ en $c'_1[u'_1, u'_2, u'_3] + c'_2[v'_1, v'_2, v'_3]$ onderskeidelik. Dus het die lyne koördinate van die vorm $[c_1 u_1 + c_2 v_1, c_1 u_2 + c_2 v_2, c_1 u_3 + c_2 v_3]$ en $[c'_1 u'_1 + c'_2 v'_1, c'_1 u'_2 + c'_2 v'_2, c'_1 u'_3 + c'_2 v'_3]$ onderskeidelik. Die homogene parameters van die twee bundels van lyne word gegee deur (c_1, c_2) en (c'_1, c'_2) terwyl die projektiwiteit wat ontwikkel

word gegee word deur $k \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix}$. Dus is $kc_1 = c'_1$ en $kc_2 = c'_2$.

Ons wil nou die vergelyking bepaal van die puntkegelsnit wat gegenereer word deur die twee bundels lyne en die projektiwiteit tussen die bundels. As die punt $(x; y; z)$ op die ooreenkomsige lyne van die bundel is, vir 'n spesifieke c_1 en c_2 , dan is $(c_1 u_1 + c_2 v_1)x + (c_1 u_2 + c_2 v_2)y + (c_1 u_3 + c_2 v_3)z = 0$ en $(c'_1 u'_1 + c'_2 v'_1)x + (c'_1 u'_2 + c'_2 v'_2)y + (c'_1 u'_3 + c'_2 v'_3)z = 0$. Vanuit hierdie relasie sien ons dat

$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{v_1x + v_2y + v_3z}{u_1x + u_2y + u_3z}$ en $\frac{c'_1}{c'_2} = -\frac{v'_1x + v'_2y + v'_3z}{u'_1x + u'_2y + u'_3z}$. Maar volgens die projektiwiteit is

$$kc_1 = c'_1 \text{ en } kc_2 = c'_2 \text{ dus is } \frac{c_1}{c_2} = \frac{c'_1}{c'_2}.$$

Hieruit volg dat

$$b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{13}xz + b_{22}y^2 + b_{21}xy + b_{23}yz + b_{33}z^2 + b_{31}xz + b_{32}yz = 0, \text{ waar}$$

$$b_{ij} = u_i v'_j - u'_j v_i, i, j = 1, 2, 3.$$

Die vergelyking kan ook geskryf word as

$$b_{11}x^2 + (b_{12} + b_{21})xy + (b_{13} + b_{31})xz + b_{22}y^2 + (b_{23} + b_{32})yz + b_{33}z^2 = 0.$$

Dus lewer die definisie van kegelsnedes in terme van projektiwiteite dieselfde vergelyking as in stelling 3-3: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Die enigste verskil is die derde z -koördinaat in die vergelyking omdat ons hier in die projektiewe vlak werk.

4.7 Eienskappe van kegelsnedes

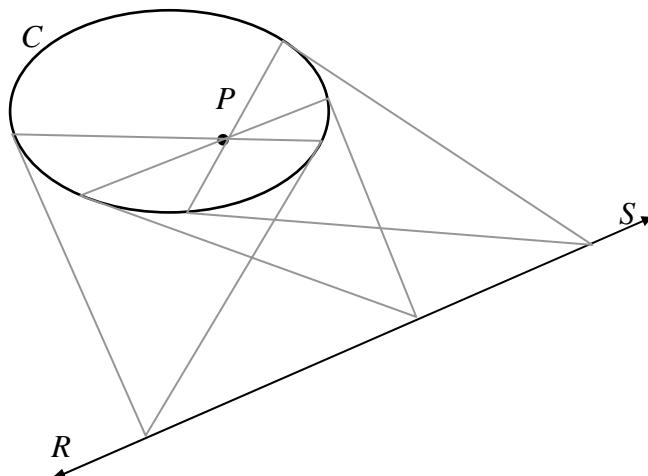
In afdeling 4.4 is die belangrike rol wat kegelsnedes in projektiewe meetkunde speel aangetoon. In hierdie afdeling word verdere projektiewe verbande van kegelsnedes bepaal.

4.7.1 Kegelsnedes, harmoniese en polêre verwantskappe

Projektiewe meetkunde bevredig nie net die beginsel van dualiteit nie, maar besit ook 'n interessante verwantskap wat polariteit tussen punte en lyne genoem word. Om polariteit te verduidelik word van 'n kegelsnede en 'n raaklyn aan die kegelsnede gebruik gemaak. 'n *Raaklyn* aan 'n kegelsnede in die projektiewe vlak word beskou as 'n lyn wat die kegelsnede in slegs een punt sny.

4.7.2 Polariteit

Eienskap 4-1: Gestel C is 'n kegelsnede en P is 'n punt binne C . As enige koord AB van C deur die punt P gaan dan is die snypunte van die raaklyne, aan die kegelsnede by A en B , kollinear (sien Figuur 4-15).



Figuur 4-15

Definisie 4-9:

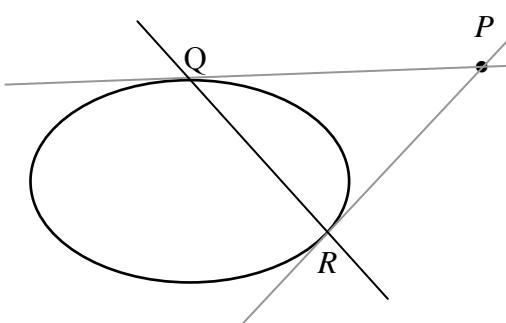
Die lyn RS in

Uit hierdie definisie volg dan dat:

Eienskap 4-2: As C 'n kegelsnede en P 'n punt op C is, dan is die poollyn, ten opsigte van P , die raaklyn aan die kegelsnede by P .

Eienskap 4-3: As C 'n kegelsnede is en P en Q enige punte, dan sal P op die poollyn van Q wees as en slegs as Q op die poollyn van P is.

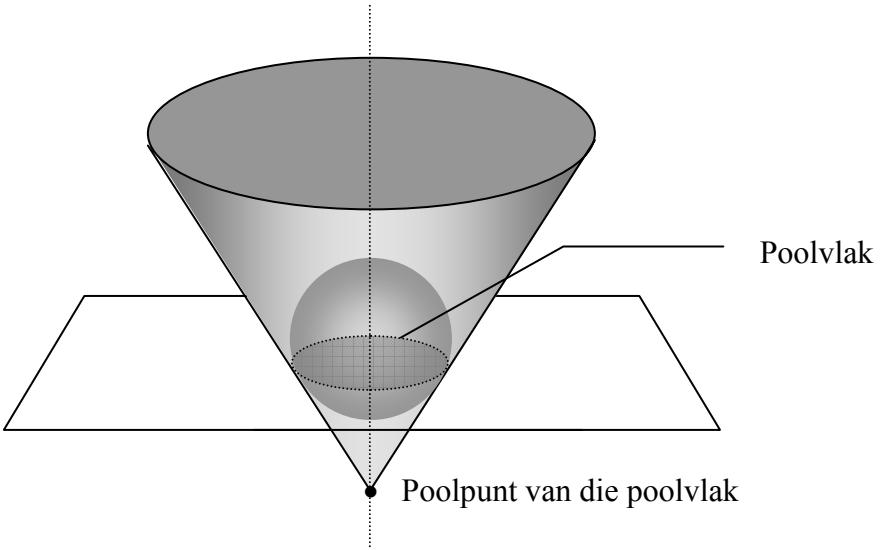
Hierdie definisie en eienskappe maak slegs voorsiening vir 'n poolpunt binne 'n kegelsnede C . Gestel 'n punt P is buite die kegelsnede C (Figuur 4-16), dan kan die poollyn met behulp van Eienskap 4-2 bepaal word. Laat Q en R die punte wees waar die raaklyne van die kegelsnede vanaf P die kegelsnede raak. Omdat die poollyne van Q en R die raaklyne deur Q en R is, is P op beide poollyne. Maar volgens Eienskap 4-3 is beide Q en R dus op die poollyn van P (Spain 1957: 80).



Figuur 4-16

Eienskap 4-4: Gestel C is 'n kegelsnede en P is 'n punt buite C , dan is die poollyn van P die koord QR (dit is die punte waar die raaklyne vanaf P die kegelsnede raak).

Polâre verwantskap behels 'n punt en 'n lyn. Die punt word die poolpunt en die lyn die poollyn genoem. Die poolpunt van 'n lyn l is 'n punt met poollyn l . Die dualiteit van die polâre verwantskap volg vanself. In hoofstuk 3 is die kegelsnede as snitte van 'n kegel gedefinieer. Die verband tussen hierdie driedimensionele figure, die poolpunt en poollyn kan met behulp van 'n Dandelinsfeer aangetoon word. Sien Figuur 4-17 (Thomas 2001).



Figuur 4-17

4.7.3 Kruisverhoudings

Daar is alreeds vermeld dat afstand nie in die projektiewe vlak behoue bly nie. 'n Logiese gevolgtrekking sou wees dat verhoudings dus ook nie behoue bly nie. Daar is 'n tipe verhouding wat wel behoue bly, kruisverhoudings. Laat A , B , C en D vier verskillende punte op 'n lyn p wees. Die *kruisverhouding* (verhouding van verhoudings) van A en B ten opsigte van C en D word voorgestel deur $R(A, B; C, D)$ en gedefinieer as $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ (Ayres 1967: 21).

4.7.4 Harmoniese verwantskap

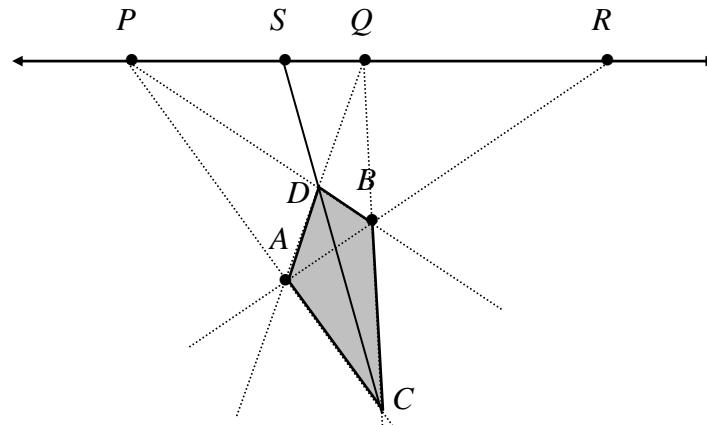
Aangesien ons slegs van 'n ongemerkte liniaal in die projektiewe vlak gebruik kan maak, moet dit moontlik wees om kruisverhoudings te konstrueer sonder enige meting. In hierdie afdeling ondersoek ons een so 'n verhouding, naamlik die harmoniese verwantskap. Om hierdie verhouding te bepaal, word van 'n vierhoek gebruik gemaak. 'n Vierhoek in die projektiewe vlak word soos volg gedefinieer.

Definisie 4-10: 'n *Vierhoek in die projektiewe vlak* is 'n versameling van vier punte, waarvan enige drie punte nie-kollineêr is, en die ses sye wat deur hierdie vier punte bepaal word.

Die punte word die *hoekpunte* en die ses lyne die *sye* van die vierhoek genoem. As A , B , C en D die vier hoekpunte van die vierhoek is, is AB en CD , AC en BD en laastens AD en BC die teenoorstaande sye. Die snydingpunte van die teenoorstaande sye word die *diagonaalpunte* van die vierhoek genoem. Hierdie definisie word gebruik om die harmoniese verwantskap te illustreer.

Definisie 4-11: Vier kollineêre punte A , B , C en D vorm 'n *harmoniese verwantskap* $H(AB,CD)$ as daar 'n vierhoek is waarvan 'n paar teenoorstaande sye in A sny, 'n ander paar deur B , en die oorblywende twee deur C en D respektiewelik. C word die *harmonies toegevoegde* van D ten opsigte van A en B genoem. Die vierhoek self word dan 'n *harmoniese vierhoek* genoem.

Pastoll (1996a: 11) verduidelik 'n wyse waarop die harmonies toegevoegde met behulp van 'n "ongemerkte"-liniaalkonstruksie bepaal kan word: Trek enige lyn (dit word die kontrolelyn genoem) en kies drie punte P , Q en R op die lyn. Trek enige twee lyne deur P en een deur R . Noem die snypunte van hierdie lyne A en B . Trek nou lyne vanaf Q deur punte A en B om op hierdie wyse 'n vierhoek te verkry. Noem die ander twee punte van die vierhoek C en D en verbind dit. Die punt waar die kontrolelyn en CD se verlengde mekaar sny is die punt S , die harmonies toegevoegde van R ten opsigte van P en Q .



Figuur 4-18

Hierdie konstruksie van die harmonies toegevoegde is onafhanklik van die keuse van die vierhoek. Die harmoniese verwantskap is invariant onder 'n projektiwiteit omdat daar geen meting gebruik is in die konstruksie van die harmonies toegevoegde nie. Omdat die harmoniese verwantskap behoue bly onder die transformasies van die projektiewe vlak speel dit 'n belangrike rol in projektiewe meetkunde. Daar is reeds vermeld dat die harmoniese toegevoegde maar net 'n spesiale kruisverhouding is. Die

volgende verband is deur Cederberg (1989: 168) aangetoon (dit word sonder bewys aanvaar):

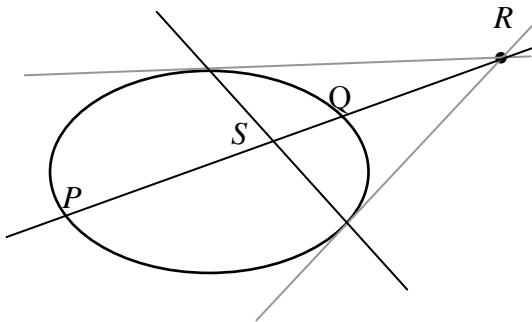
Stelling 4-3: As A, B, C, D vier verskillende elemente van 'n bundel is, dan is
 $R(A, B, C, D) = -1$ as en slegs as $H(AB, CD)$.

Hierdie verband tussen die harmoniese verwantskap en kruisverhouding kan ook in terme van Figuur 4-18 vertolk word:

$$\frac{\text{Sye}_{\text{snypunkt}} 1 \text{ na Diagonaal } 2}{\text{Sye}_{\text{snypunkt}} 2 \text{ na Diagonaal } 2} = \frac{\text{Sye}_{\text{snypunkt}} 1 \text{ na Diagonaal } 1}{\text{Sye}_{\text{snypunkt}} 2 \text{ na Diagonaal } 1} \text{ dus } \frac{PS}{QS} = \frac{PR}{QR}.$$

Hierdie kruisverhouding wat behoue bly onder 'n projeksie gee nog 'n wyse waarop kegelsnedes, sonder om van afmetings gebruik te maak, gedefinieer kan word. Net soos wat 'n sirkel in Euklidiese meetkunde gedefinieer word as die lokus van punte met 'n konstante afstand vanaf 'n punt, kan kegelsnedes in projektiewe meetkunde gedefinieer word as 'n lokus van punte wat 'n konstante kruisverhouding ten opsigte van vier punte (waarvan enige drie nie kollineêr is nie) het. In beide gevalle word die vorm van die kromme gedefinieer in terme van eienskappe wat in die spesifieke soort meetkunde onveranderd onder transformasies is. Die kegelsnedes in Euklidiese meetkunde word in terme van afstand, en die kegelsnedes in projektiewe meetkunde, in terme van kruisverhouding gedefinieer. Die verband tussen kegelsnedes, harmoniese verwantskap en polêre verwantskap volg uit die volgende eienskap:

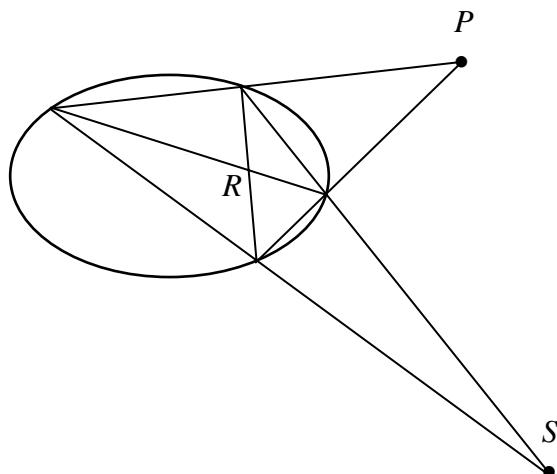
Eienskap 4-5: Gestel C is 'n kegelsnede en R is 'n vaste punt buite C . Laat 'n lyn deur R die kegelsnede C in Q en P sny. Konstrueer die poollyn van R . Dan is S , die snypunt van die poollyn asook die harmonies toegevoegde van R ten opsigte van P en Q .



Figuur 4-19

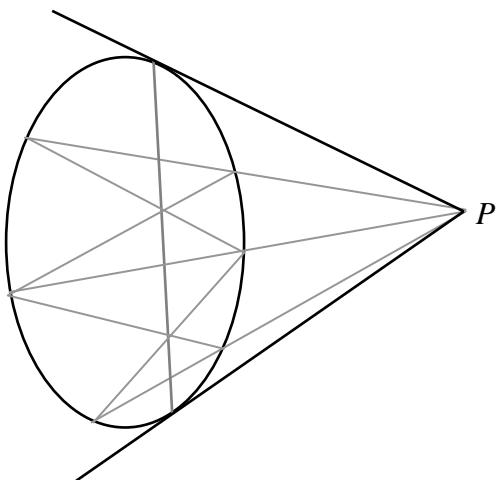
Dit beteken dat $\frac{PS}{QS} = \frac{PR}{QR}$, wat beteken dat die punt S die segment PQ inwendig en uitwendig in dieselfde verhouding verdeel.

Eienskap 4-6: Die poollyn van P gaan deur die punte R en S , die snyding van kruisverbindings se snylyne deur P .



Figuur 4-20

Eienskap 4-6 gee aan ons 'n eenvoudige metode om met behulp van 'n ongemerkte liniaal 'n raaklyn aan 'n kegelsnede te trek (Yates 1974: 44).



Figuur 4-21

Teken drie willekeurige snylyne vanaf die punt waarvan die raaklyn getrek moet word.
Trek die poollyn van P by die kruisverbindings se snydings.

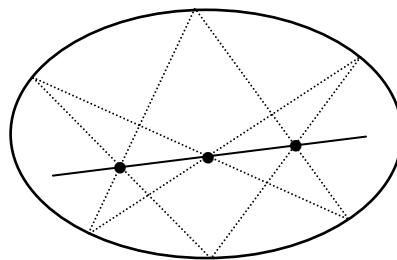
4.7.5 Heksagoon

Hierdie kruisverbindings ontsluit 'n besondere eienskap van kegelsnedes wat gebruik kan word in die konstruksie van kegelsnedes. Pascal het 'n heksagoon gebruik om hierdie eienskappe te beskryf.

Definisié 4-12: 'n *Heksagoon* is 'n versameling van ses verskillende punte, sê $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ wat hoekpunte genoem word, en ses lyne $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6$ en P_1P_6 . Hierdie lyne word die sye van die heksagoon genoem. Die punte P_1 en P_4 , P_2 en P_5 , P_3 en P_6 word pare *teenoorstaande hoekpunte* genoem en die lyne P_1P_2 en P_4P_5 , P_2P_3 en P_5P_6 en laastens P_3P_4 en P_1P_6 *teenoorstaande sye*. Die drie snydingspunte van die teenoorstaande sye word die *diagonaalpunte* genoem.

Die volgende eienskap staan bekend as die stelling van Pascal omdat hy die stelling in 1640 op 17 jarige leeftyd bewys het (Cederberg 1989: 150).

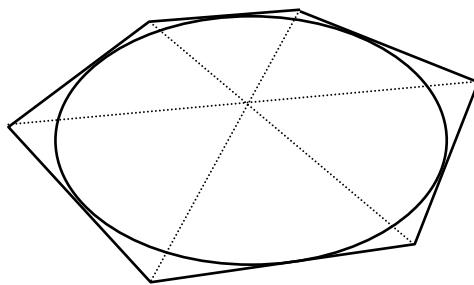
Eienskap 4-7: Die ses hoekpunte van 'n heksagoon word bevat deur 'n kegelsnede as en slegs as die drie diagonaalpunte kollineér is.



Figuur 4-22

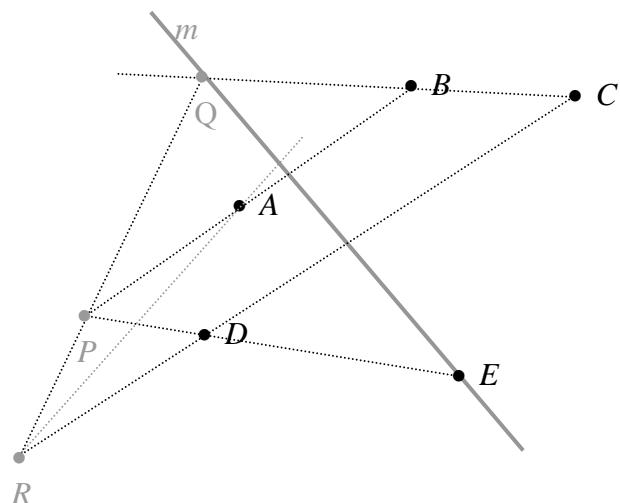
Die duaal van Pascal se stelling is eers in 1806 deur Brianchon bewys.

Eienskap 4-8: Die ses sye van 'n heksagoon is raaklyne aan 'n kegelsnede as en slegs as die lyne wat die drie teenoorstaande hoekpunte verbind in een punt sny.



Figuur 4-23

Met behulp van Pascal se Stelling (Eienskap 4-7) kan die kegelsnede gekonstrueer word. Cederberg (1989: 152) verduidelik die konstruksie soos volg (sien Figuur 4-24 & Figuur 5-22):



Figuur 4-24

Nommer die gegewe vyf nie-kollineêre punte A, B, C, D , en E . Die addisionele sesde punt wat ons soek kan gesien word as die sesde punt, F van die ingeskreve heksagoon $ABCDEF$ (Pascal se stelling). Die diagonale punte is P , die snyding van AB met DE , Q die snyding van BC met EF en R die snyding van CD met FA . Ons weet dat P, Q en R kollinear moet wees. Trek 'n willekeurige lyn m deur E (dit is die lyn EF) en konstrueer die punte P en Q , dan is $R = CD \cap PQ$ en $F = RA \cap m$. Deur die lyn m elke keer op 'n ander plek te kies, kan ander punte van die kegelsnede gekonstrueer word. Hierdie konstruksie is soos alle konstruksies in projektiewe meetkunde slegs met behulp van 'n ongemerkte liniaal gedoen.

4.8 Klassifisering van meetkundes

Die ontwikkeling van nie-Euklidiese meetkunde het histories begin met pogings om te bewys dat die vyfde postulaat (die parallellepostulaat) van Euklides uit die ander vier postulate afgelei kan word. In die vroeë negentiende eeu het wiskundiges die moontlikheid aanvaar dat die vyfde postulaat onafhanklik van die ander vier postulate is. Dat hierdie postulaat definitief onafhanklik is, is in 1868 deur die Italiaanse wiskundige Eugenio Beltrami aangetoon by wyse van 'n reeks hiperboliese meetkundige modelle. Die bekendste van hierdie modelle is die Poincaré-model. Die woord geometrie beteken letterlik 'meting van die aarde'. Hierdie beskrywing van meetkunde was nie gepas nie as gevolg van die ontdekking van nie-Euklidiese meetkunde nie. In 1872 het Felix Klein in sy Erlanger Program (1872) meetkunde soos volg gedefinieer:

A *geometry* is the study of those properties of a set S that remain invariant (unchanged) when the elements of S is subjected to the transformation of some transformation group (Cederberg 1989: 73).

Deur hierdie definisie te gebruik kan meetkunde geklassifiseer word volgens transformasies. Euklidiese meetkunde word dus volgens hierdie definisie beskou as die studie van daardie eienskappe van voorwerpe wat onveranderd gelaat word onder die groep rigiede transformasies (isometrië), naamlik refleksies, translasies en rotasies.

4.8.1 Die absolute kegelsnede

In die ondersoek in afdeling 4.6.1 het ons met die Euklidiese vlak begin en dit uitgebrei om die projektiewe vlak te verkry (Sibley 1998: 247). Die algemene wiskundige benadering is egter net die omgekeerde. Ons begin eerder met die projektiewe vlak en neem iets weg om 'n nuwe soort meetkunde te kry. Euklidiese

meetkunde is dan 'n spesiale geval van projektiewe meetkunde. In die bestudering van projektiewe meetkunde is daar begin met die Euklidiese vlak en dié is uitgebrei, deur ideale lyne en ideale punte by te voeg. Indien daar geen onderskeid tussen die gewone punte en ideale punte gemaak word nie, gee dit aanleiding tot die projektiewe vlak. In hierdie afdeling word aangetoon hoe ander soorte meetkunde verkry kan word deur die projektiewe vlak te verklein. In projektiewe meetkunde kan ideale punte en gewone punte op mekaar afgebeeld word. Die projektiewe vlak kan egter verklein word deur die beperking dat die ideale lyn invariant gelaat moet word onder 'n transformasie. So 'n beperking kan verkry word deur punte in die projektiewe vlak as ideale punte uit te sonder met behulp van 'n Absolute kegelsnede (Cederberg 1989: 190). Die punte op hierdie absolute kegelsnedes word dan as ideale punte in die projektiewe vlak uitgesonder en van die gewone punte onderskei. Deur hierdie punte as ideale punte te beskou, word hierdie punte in die projektiewe vlak verwijder. Dit verklein die projektiewe vlak en gee aanleiding tot 'n ander soort meetkunde.

In Stelling 3-3 is bepaal dat enige kegelsnede algebraës in die vorm $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ geskryf kan word. Met behulp van Euklidiese transformasies is hierdie vergelyking in Stelling 3-12 vereenvoudig tot $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ of $y^2 = 4dx$ vir 'n ellips, hiperbool en parabool. Aangesien die affiene transformasies meer algemeen as die Euklidiese transformasies is, kan die vergelyking verder vereenvoudig word. In die affiene vlak kan die nie-degenereerde kegelsnedes met behulp van 'n affiene koördinate gereduseer word tot een van die volgende kegelvorms (Fishback 1969: 217):

- $x^2 + y^2 = \pm 1$ vir 'n ellips
- $x^2 + y = 0$ vir 'n parabool
- $x^2 - y^2 = 1$ vir 'n hiperbool

Met behulp van projektiewe transformasies (kollinearities) kan hierdie vergelyking verder vereenvoudig word. In die projektiewe vlak gebruik ons drie koördinate om sodoende voorsiening te maak vir ideale punte en lyne. Ons kry dan dat enige puntkegelsnede projektief ekwivalent aan 'n kegelsnede met 'n vergelyking $(x_1)^2 + (x_2)^2 \pm (x_3)^2 = 0$. Dus kan $(x_1)^2 + (x_2)^2 \pm (x_3)^2 = 0$ as die absolute kegelsnede gekies word en in die projektiewe vlak gebruik word. Hierdie vergelyking kan in die vorm

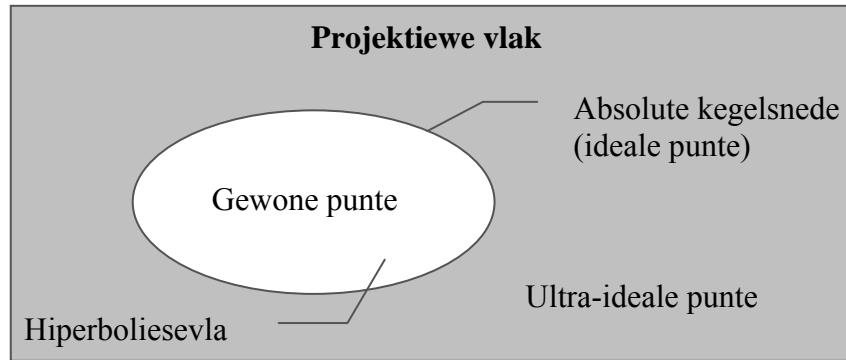
$c[(x_1)^2 + (x_2)^2] \pm (x_3)^2 = 0$ geskryf word waar $c = 0$ of ± 1 (Fishback 1969: 165). Vir elke waarde van c word 'n ander absolute kegelsnede verkry en dus 'n ander soort meetkunde binne in projektiewe meetkunde. As $c = \pm 1$ dan is die vergelyking dieselfde as die vorige vergelyking, maar as $c = 0$ word die vergelyking $x_3 = 0$, dit is die gedegenereerde kegelsnede. In die volgende drie paragrawe word die invloed wat hierdie drie waardes van c het op die soort meetkunde wat gevorm word, ondersoek.

4.8.2 Affiene meetkunde ($c = 0$)

Wanneer die lyn $x_3 = 0$ as die absolute kegelsnede beskou word lewer dit 'n meetkunde tussen projektiewe meetkunde en Euklidiese meetkunde. Hierdie gedegenereerde kegelsnede is die ideale lyn, met al die ideale punte wat bygevoeg is by die Euklidiese vlak om die projektiewe vlak te verkry. In die projektiewe vlak word geen onderskeid tussen ideale punte en gewone punte gemaak nie. Sodra hierdie punte as ideale punte onderskei word, werk ons in die affiene vlak. Die affiene vlak bestaan dus uit alle punte van die projektiewe vlak behalwe die punte op die lyn $x_3 = 0$ wat in hierdie geval as ideale punte beskou word. Dus sal enige affiene transformasie die lyn $x_3 = 0$ onveranderd laat (Sibley 1998: 252). Analities gesien vanuit Klein se definisie vir meetkunde, is affiene meetkunde die verkleining van projektiewe meetkunde. Aangesien affiene meetkunde verkry word deur die ideale punte in projektiewe vlak uit te sonder, bly ewewydigheid wel behoue onder affiene projeksies.

4.8.3 Hiperboliese meetkunde

Indien $c = -1$ dan is die vergelyking van die absolute kegelsnede $(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_3)^2$. Hierdie kegelsnedes verdeel die projektiewe vlak in twee gedeeltes. Die versameling punte waar $(x_1)^2 + (x_2)^2 < (x_3)^2$ word die inwendige van die absolute kegelsnede genoem en die punte $(x_1)^2 + (x_2)^2 > (x_3)^2$ die uitwendige van die kegelsnede. Ons noem die punte op die absolute kegelsnede die ideale punte en die uitwendige punte, die ultra-ideale punte. Die inwendige punte word die gewone punte van die absolute kegelsnede genoem. Die projektiewe vlak waaruit die ideale en die ultra-ideale punte verwyder is, is die hiperboliese vlak.



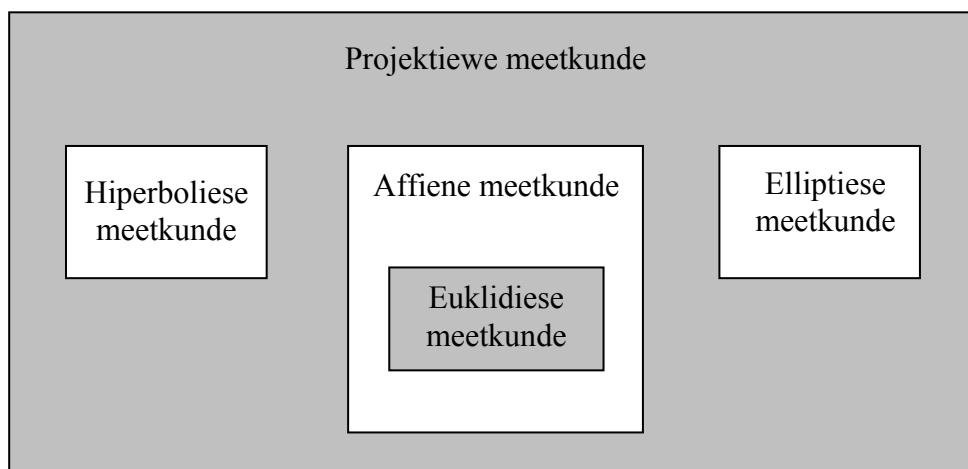
Figuur 4-25

4.8.4 Elliptiese meetkunde

Indien $c = 1$ dan is die vergelyking van die absolute kegelsnede $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0$. Aangesien daar geen ideale punte op hierdie kegelsnedes is nie, bly die hele projektiewe vlak se punte behoue nadat al die ideale punte uit die projektiewe vlak verwyder is. Dus sal daar geen klassifisering van punte as ideaal en normaal in hierdie vlak wees nie (Fishback 1969: 261). Die meetkunde in hierdie vlak staan bekend as elliptiese meetkunde.

4.8.5 Benaming

Die byvoeging van die absolute kegelsnede tot die Euklidiese vlak met $c = 1$ en -1 as $c[(x_1)^2 + (x_2)^2] \pm (x_3)^2 = 0$ gee dus aanleiding tot elliptiese en hiperboliese meetkunde onderskeidelik (sien Figuur 4-26).



Figuur 4-26

Volgens Sibley (1998: 247) en Eves (1960: 280) het Felix Klein die name ellipties en hiperbolies vir die beskrywing van verskillende tipes meetkunde gebruik. Hy het

Lobachevsky en Bolyai se nie-Euklidiese meetkunde hiperbolies genoem, Riemann se nie-Euklidiese meetkunde ellipties, en parabolies vir Euklidiese meetkunde gebruik (Eves 1960: 281). Die keuse van die name word duidelik as ons na die ideale punte in die affiene vlak gaan kyk. Elke lyn in die Euklidiese vlak bevat een ideale punt, in die hiperboliese vlak twee ideale punte en in die elliptiese vlak geen ideale punte nie. Dit laat 'n mens dink aan die definisie van die tipes kegelsnedes in die affienevlak. Die punt kegelsnedes word daar parabolies, hiperbolies en ellipties genoem afhangende van die aantal ideale punte, een of twee of nul onderskeidelik, wat dit bevat. Dit is dus verstaanbaar dat die twee nie-Euklidiese meetkundes hiperbolies en ellipties genoem word. Sibley (1998: 241) verduidelik dit soos volg:

From a projective viewpoint, circles, ellipses, parabolas, and hyperbolas the Euclidian types of conics – are indistinguishable. However, if we arbitrary designate one line k as an ideal line, hyperbolas intersect the ideal line in two points, parabolas intersect the line in one point, and ellipses do not intersect it.

We say that an ellipse contains no ideal points, a parabola contains one ideal point, corresponding to the direction of the axis. Now each line parallel to the axis meets the parabola twice, once as shown above, and again at the ideal point for this direction. Note that the ideal line meets the parabola once so is a tangent at this ideal point. A hyperbola contains two ideal points, corresponding to the directions of the asymptotes. Now each asymptote meets the hyperbola once, so is a tangent at the corresponding ideal point. Other lines parallel to the asymptotes meet the hyperbola twice, once as above, and again at the ideal point. The ideal line meets the hyperbola twice (at these ideal points), so is not a tangent.

Deur metriese eienskappe aan die affiene vlak toe te ken, word Euklidiese meetkunde verkry. Euklidiese meetkunde kan ook as paraboliese meetkunde beskryf word indien die meetkunde volgens bostaande eienskappe gekarakteriseer word (Eves 1960: 281). Eenvoudig gestel, is die historiese oorsprong van die name dus dat in Lobachevsky-Bolyai meetkunde (hiperbolies) daar twee lyne deur 'n punt P ewewydig is aan 'n lyn l , in Riemann meetkunde (ellipties) daar geen lyne ewewydig deur P ewewydig is aan l , en in Euklidiese meetkunde (parabolies) daar slegs een lyn deur P ewewydig aan l is (Eves 1960: 281).

In die Erlanger program (1872) het Felix Klein meetkunde beskryf en geklassifiseer volgens daardie eienskappe wat onveranderd gelaat word onder sekere groepe van transformasies (De Villiers 1996):

- *isometries* - transformations of plane figures which preserve all distances and angles (congruency)
- *similarities* - transformations of plane figures where shape (similarity) is preserved
- *affinities* - transformations of plane figures where parallelism is preserved

- *projectivities* - transformations of plane figures which preserve the collinearity of points and the concurrency of lines
- *topologies* - transformations of plane figures which preserve closure and orientability

Deur van hierdie transformasies gebruik te maak om meetkunde te klassifiseer kry ons 'n soortgelyke klassifikasie as in Figuur 4-26. In die volgende tabel uit Birchfield (1998: 2, Tabel 4-1) word verskillende soort meetkundes en die transformasies wat dit toelaat sowel as die eienskappe wat invariant gelaat word aangedui:

Tabel 4-1

		Soort Meetkunde			
		Euklidiese	Gelykvormig	Affiene	Projektiewe
Transformasies	rotasie	X	X	X	X
	translasie	X	X	X	X
	uniforme skalering		X	X	X
	nie-uniforme skalering			X	X
	skuiwing			X	X
	perspektiwiteit				X
Invariante eienskappe	lengte	X			
	hoek	X	X		
	verhoudings	X	X		
	ewewydigheid	X	X	X	
	snyding	X	X	X	X
	kruisverhouding	X	X	X	X

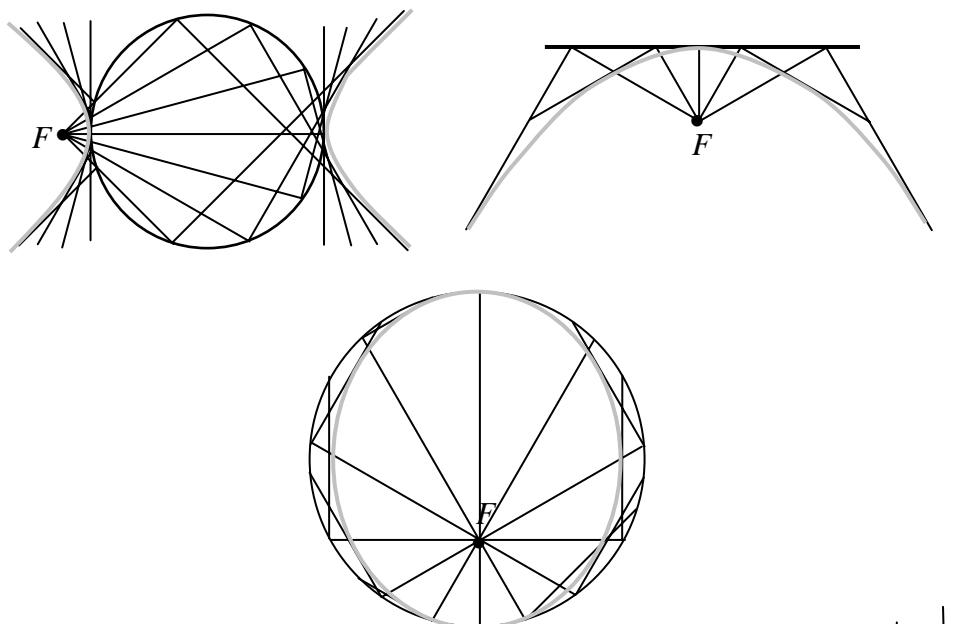
Dit is ook moontlik om deur middel van die aksiomatisering van meetkunde hiperboliese, ellipties en affiene meetkunde te definieer. Tarski het in sy benadering tot meetkunde 11 aksiomas gebruik, Hy was besonder geïnteresseerd in die ryk verskeidenheid uitbreidingsmoontlikhede wat dit tot gevolg het:

Among these extensions are Euclidian affine geometry, hyperbolic and elliptical geometries and a number of less natural items (Szczerba 1986: 910).

4.9 Konstruksies met behulp van omhulsels

Die dual van Pascal, dit is Brianchon se stelling, definieer kegelsnedes volgens raaklyne. In afdeling 4.7.5 is aangetoon dat 'n kegelsnede met behulp van lyne gedefinieer kan word, dit word 'n lynkegelsnede genoem. So 'n konstruksie staan bekend as 'n omhulsel van lyne. Dit beteken dat 'n kegelsnede as die lokus van punte of as die omhulsel van lyne beskryf kan word. Hierdie lokus van lyne kan die maklikste met behulp van sketse geïllustreer word.

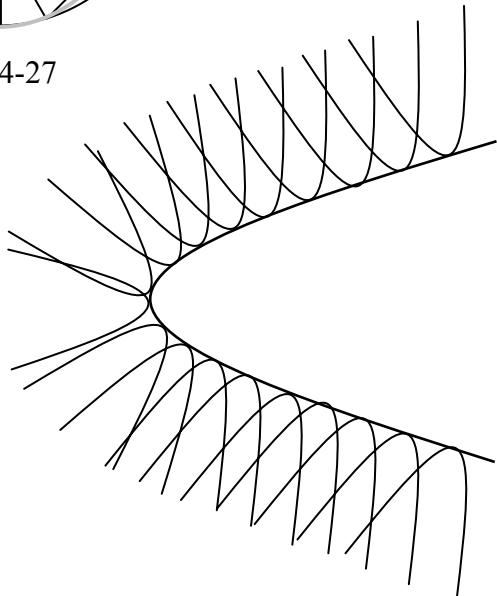
Konstrueer 'n bundel van lyne vanaf 'n punt F na 'n sirkel of lyn. Waar die bundel lyne die sirkel raak, reflekteer dit 90° soos in Figuur 4-27. Die omhulsel van hierdie loodregte lyne vorm 'n kegelsnede.



Figuur 4-27

4.9.1 Bepaling van die vergelyking van 'n omhulsel

In paragraaf 3.9.5 is die konstruksie van kegelsnedes met behulp van loodregte verdellers beskryf. Die kegelsnede is verkry uit die omhulsel van 'n familie van loodregteverdelers. Die *omhulsel* van 'n 'familie' van krommes is 'n nuwe



Figuur 4-28

kromme C , sodanig dat elke lid van die versameling vir C raak. Boltjanskii (1964: 45) verduidelik hoe om die vergelyking van 'n omhulsel te bepaal. In die volgende paragrawe word sy werk gebruik om die vergelykings van omhulsels te bepaal. 'n Familie van krommes kan deur 'n vergelyking met vier veranderlikes (x, y, α en β) voorgestel word, waar x en y koördinate en α en β parameters is. Indien 'n spesifieke waarde aan α en β toegeken word, kan een van die familie van vergelykings bepaal word, maar die hele 'familie' word verkry as α en β alle waardes aanneem. Die vergelyking van die familie word dus beskryf deur die twee vergelykings: $f(x; y; \alpha; \beta) = 0$ en $g(\alpha; \beta) = 0$.

Laat L die 'familie' van krommes voorstel en C die omhulsel van L . Die omhulsel C kan die kromme L by 'n punt P raak. Laat P' 'n punt naby P op die omhulsel C wees. Die krommes L en L' sny mekaar in 'n punt M . Indien P en P' oneindig naby aan mekaar gekies word, is punt P en M oneindig naby aan mekaar. Ons kan dus sê dat elke punt P van die omhulsel die snyding van twee oneindig naby krommes van die familie is. Wiskundig kan dit soos volg beskryf word:

Laat $f(x; y; \alpha; \beta) = 0$ die familie van krommes wees en laat L en L' twee naburige krommes wees.

$$f(x; y; \alpha; \beta) = 0 \quad \dots \quad L$$

$$f(x; y; \alpha + \varepsilon; \beta + \varepsilon) = 0 \quad \dots \quad L'$$

Om die snydingspunt M te bepaal moet die twee vergelykings gelyktydig opgelos word. Die snydingspunt M word dan gegee deur die volgende stelsel vergelykings:

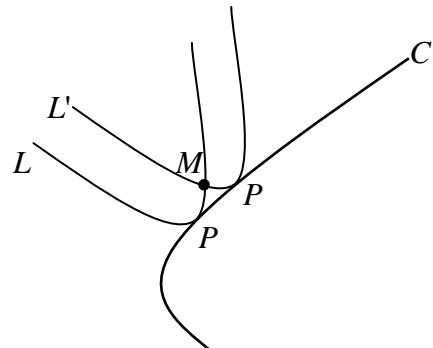
$$f(x; y; \alpha; \beta) = 0 \quad \dots \quad 1$$

$$f(x; y; \alpha + \varepsilon; \beta + \varepsilon) - f(x; y; \alpha; \beta) = 0 \quad \dots \quad 2$$

Die tweede krommes se vergelyking kan deur ε gedeel word en dan kan die krommes oneindig naby aanmekaar geskuif word deur ε na nul te laat nader. Die stelsel word dan

$$f(x; y; \alpha; \beta) = 0 \quad \dots \quad 1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x; y; \alpha + \varepsilon; \beta + \varepsilon) - f(x; y; \alpha; \beta)}{\varepsilon} \dots \quad 3$$



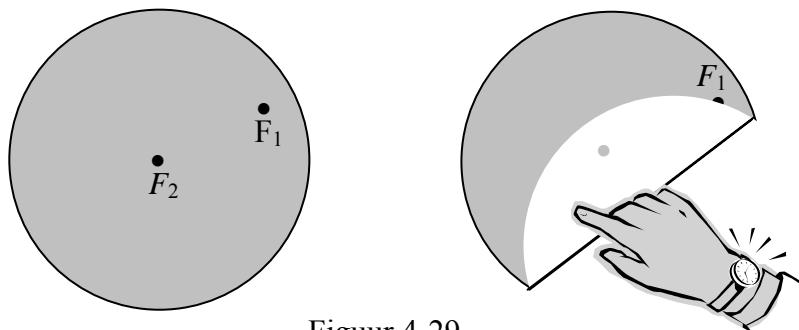
Vergelyking 3 is dus $\frac{d}{d\alpha}[f(x; y; \alpha; \beta)] = 0$. Elke punt op die omhulsel C moet dus die volgende stelsel (waarin α en β ge-elimineer kan word) bevredig:

$$\left. \begin{array}{l} f(x; y; \alpha; \beta) = 0 \\ g(\alpha; \beta) = 0 \\ \frac{d}{d\alpha}[f(x; y; \alpha; \beta)] = f_\alpha \cdot g_\beta - g_\alpha \cdot f_\beta = 0 \end{array} \right\} \text{Stelsel vergelykings}$$

'n Omhulsel van lyne kan ook met behulp van papiervouwing gesimuleer word. In afdeling 3.9.5 is kegelsnedes met behulp van loodregte verdellers gekonstrueer. Sher (1996: 188-193) toon wyses aan waarop hierdie konstruksies met behulp van gevoude papier gedoen kan word. In die volgende afdeling word die vergelyking van hierdie omhulsels bepaal.

4.9.2 Konstruksies met behulp van gevoude papier

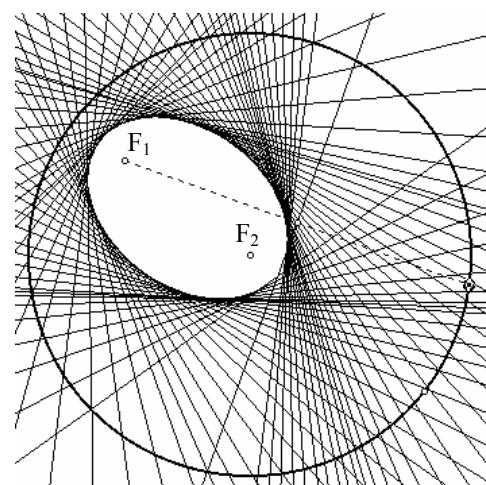
Teken 'n sirkel op 'n papier en merk die middelpunt F_2 . Kies nou enige ander punt F_1 . Vou nou die sirkel sodat die punt F_1 aan die omtrek van die sirkel raak. Ontvou en vou weer sodat 'n ander gedeelte van die omtrek van die sirkel F_1 raak.



Figuur 4-29

Dieselfde konstruksie kan ook met behulp van Geometer's Sketchpad gedoen word (Olive 1996: 1-3). Om die vou in die papier te konstrueer wanneer 'n punt A (enige punt op die omtrek van die sirkel) bo-op punt F_1 gevou word, word die loodregteverdeler van segment AF gekonstrueer.

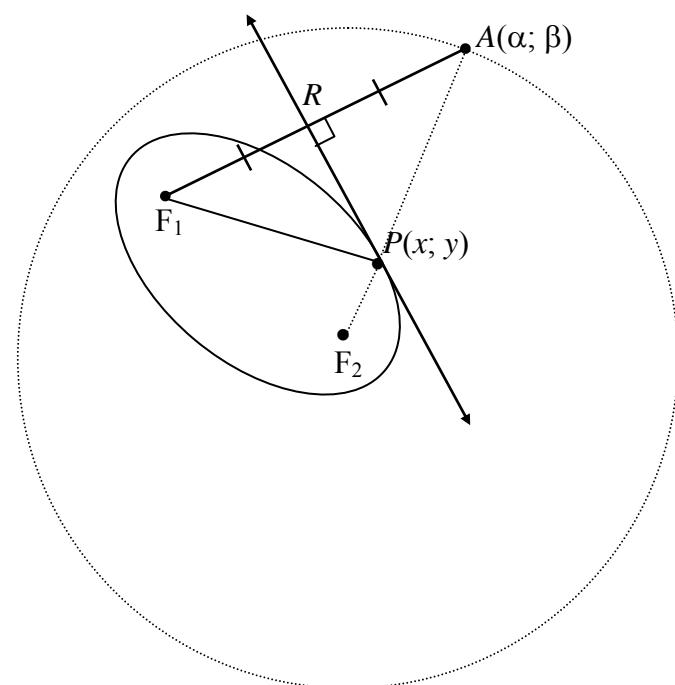
Deur punt A op die omtrek van die sirkel te beweeg word die voue wat die papier maak,



Figuur 4-30

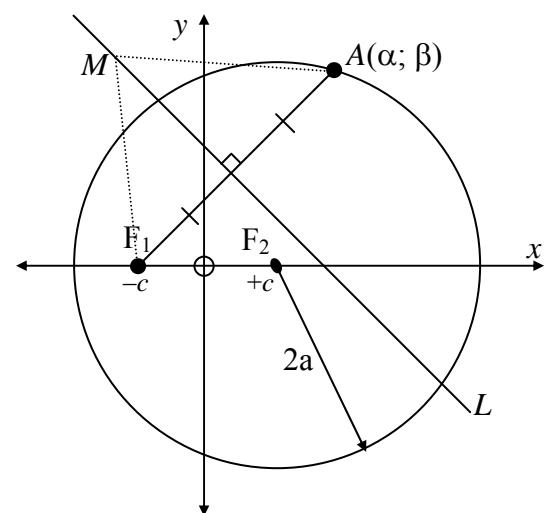
gevorm. Indien punt F_1 binne die sirkel gekies word, vorm die omhulsel van die vroue 'n ellips met brandpunte F_1 en F_2 . As punt F_1 buite die sirkel gekies word vorm die omhulsel 'n hiperbool. Die plasing van punt F_1 is die bepalende faktor in die soort kegelsnedes wat met behulp van hierdie konstruksie gevorm word.

Om aan te toon dat die figuur wat verkry word as F_1 binne die sirkel gekies word 'n ellips is, gebruik ons die eienskap van 'n ellips, soos in afdeling 3.8 aangetoon. Deur $\Delta RPF_1 \equiv \Delta RPA$ te bewys kan aangetoon word dat $PF_1 = PA$. Maar $AF_2 = PF_2 + PA = PF_1 + PF_2$ is die radius van die sirkel. Dus is $PF_1 + PF_2$ 'n konstante en daarom is die omhulsel volgens Stelling 3-14 'n ellips .



Figuur 4-31

Noudat ons weet dat die omhulsel 'n ellips is, is die volgende stap om die vergelyking van die omhulsel te bepaal. In afdeling 3.8.1 is aangetoon dat die vergelyking van 'n omhulsel bepaal kan word deur die volgende stelsel vergelykings op te los:



Figuur 4-32

$$\left. \begin{array}{l} f(x; y; \alpha; \beta) = 0 \\ g(\alpha; \beta) = 0 \\ \frac{d}{d\alpha}[f(x; y; \alpha; \beta)] = 0 \end{array} \right\} \text{Stelsel vergelykings } A$$

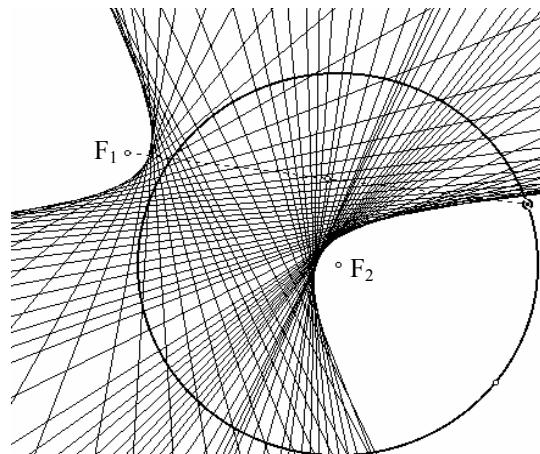
Die berekenings kan vereenvoudig word deur die sirkel so te kies dat die middelpunt van die sirkel F_2 en die radius $2a$ is (Boltyanskii 1964: 69). Laat F_1 'n afstand $2c$ vanaf die middelpunt F_2 wees. Verder word die lyn F_1F_2 gebruik as die x -as en die loodregte verdeler van F_1F_2 as die y -as. Laat $A(\alpha; \beta)$ 'n willekeurige punt op die omtrek van 'n sirkel wees en $M(x; y)$ 'n punt op die loodregte verdeler ML . Dus is $MA = MF_1$ en daarom is $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2cx - c^2 = 0$ en omdat A op die sirkel is, is $(\alpha - c)^2 + \beta^2 = 4a^2$. Dit kan geskryf word as $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + c^2 - 4a^2 = 0$. Om die vergelyking van die omhulsel te bepaal, moet die volgende stelsels vergelykings opgelos word:

$$\left. \begin{array}{l} f(x; y; \alpha; \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2cx - c^2 = 0 \\ g(\alpha; \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + c^2 - 4a^2 = 0 \\ (\alpha - x)\beta - (\beta - y)(\alpha - c) = 0 \end{array} \right\} \text{Stelsel vergelykings}$$

Deur eliminasie van α en β word dit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

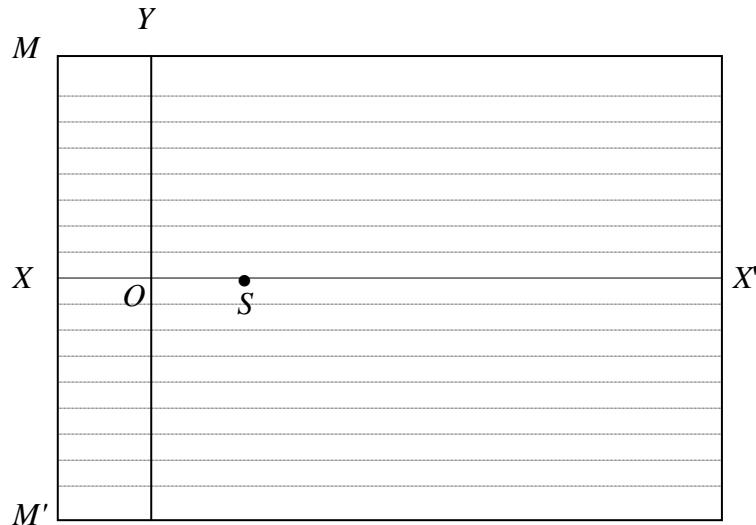
'n Hiperbool kan op dieselfde wyse deur papiervouing verkry word indien punt F_1 buite die sirkel gekies word. Sien Figuur 4-33 wat met Geometer's Sketchpad gedoen is. Om aan te toon dat die figuur wat verkry word 'n hiperbool is, verloop die bewys soos dié van 'n ellips, behalwe dat die hiperbool in terme van verskil tussen afstande gedefinieer word.

'n Parabool kan ook met behulp papiervouing verkry word. Bruchheimer en Hershkowitch (1977: 658) verduidelik dit soos volg: Gebruik 'n A4 papier met lyne op en trek die lyne XX' en MM' . Kies 'n punt S op XX' en trek die middelloodlyn YY' van SX soos in Figuur 4-34. Kies enige lyn l bo OX en vou die papier sodat die punt



Figuur 4-33

op die snyding van l en MM' op S val nadat die papier gevou is. Vou die papier terug en herhaal die prosedure om sodoende 'n omhulsel van lyne te verkry. Die omhulsel is 'n parabool.



Figuur 4-34

4.10 Samevatting

Omdat slegs 'n ongemerkte liniaal in projektiewe meetkunde gebruik mag word, is 'n mens geneig om die moontlikhede in die meetkunde te onderskat. Die ontwikkeling van projektiewe meetkunde het groot wiskundige en filosofiese gevolge (Steen 1994: 648). Dit was onder ander verantwoordelik vir die paradigmaskuif van Newton se meganika na Einstein se relatiwiteitsteorie. Einstein het Riemann se meetkunde gebruik in sy studie oor relatiwiteit. Projektiewe meetkunde beskryf ons sien-wêreld en speel daarom 'n belangrike rol in rekenaargrafika (Woodcock 1993):

Euclidean geometry is tactile because it agrees with the sense of touch but not always with the sense of sight, it deals with lines that never meet but we never see parallel lines. The artist draws parallel lines that converge, introducing foreshortening and perspective to give the eye an illusion of reality.

Volgens Beutelspacher en Rosenbaum (1998) het projektiewe meetkunde, behalwe rekenaargrafika, ook ander belangrike moderne toepassings:

..., in recent years new and important applications have been discovered. Surprisingly, the structures of classical projective geometry are ideally suited for modern communications. We mention, in particular, applications of projective geometry to coding theory and to cryptography.

Kegelsnedes speel 'n belangrike rol in die klassifisering van meetkundes. Die absolute kegelsnede word gebruik om deelmeetkundes vanuit projektiewe meetkunde te konstrueer. Die benaminge van elliptiese, asook hiperboliese meetkunde, getuig van

dié rol van kegelsnedes. Projektiewe meetkunde kan beskou word as die oorkoepelende meetkunde. Die krag hiervan lê in die feit dat as 'n stelling vir projektiewe meetkunde geld, dit ook vir alle deelmeetkundes van projektiewe meetkunde geld. Euklidiese en nie-Euklidiese meetkunde is spesiale gevalle van projektiewe meetkunde.

'n Verrassende eienskap van kegelsnedes is dat kegelsnedes behoue bly onder projektiewe transformasies. Die verklaring vir hierdie verskynsel berus in die feit dat kegelsnedes met 'n ongemerkte liniaal gekonstrueer kan word. Die eenvoudigste wyse waarop projektiewe meetkunde bestudeer kan word is met behulp van skaduwees vanaf 'n ligbron. Afhangende van die soort ligbron word óf affiene (son as bron), óf projektiewe (lig as bron) projeksies verkry. Skadumeetkunde maak projektiewe meetkunde toeganklik vir leerders aangesien ondersoeke tuis of in die klaskamer gedoen kan word. Mansfield (1985: 15) glo dat projektiewe meetkunde op so 'n wyse aangebied kan word dat dit vir laerskoolleerders toeganklik kan wees. Om dit te staaf het hy in 'n artikel lesse, wat handel oor projektiewe meetkunde, vir 10-jariges ontwikkel.

Kegelsnedes het interessante eienskappe soos wat in Pascal se stelling na vore kom. Die terme kegelsnedes, harmoniese verwantskap en polariteit is onderling verwant. Hierdie eienskappe kan gebruik word om kegelsnedes te beskryf en te konstrueer sonder om van enige afmetings gebruik te maak. 'n Kegelsnede word uniek deur vyf punte bepaal waarvan drie nie kolineêr is nie. Dit word gedoen deur van projektiwiteit tussen twee bundels van lyne gebruik te maak. Kegelsnedes kan ook met behulp van gevoude papier gekonstrueer word. Hierdie konstruksies kan verklaar word deur van die beginsel van dualiteit (waaraan die projektiewe vlak voldoen) gebruik te maak. Dit beteken dat as dit moontlik is om 'n kegelsnede in terme van punte te beskryf moet dit ook moontlik wees om dit in terme van lyne te beskryf. Om dit te doen maak ons gebruik van 'n *omhulsel van lyne*.

Hoofstuk 5: Kegelsnedes as integrerende faktor in die SA kurrikulum

In hoofstuk 2 is die noodsaaklikheid van 'n geïntegreerde kurrikulum aangetoon. 'n Geïntegreerde benadering bevorder die ontwikkeling van hoërordedenke. Dit bevorder probleemoplossingsvermoë gee aan leerders (ryk of arm, seun of dogter, blank of swart) 'n regverdige geleentheid om sukses op skool te behaal. In hoofstuk 3 het ons gesien dat die ondersoek na kegelsnedes 'n wye verskeidenheid van tradisionele skoolwiskundetemas behels. 'n Geïntegreerde benadering skep ook geleenthede waarin die wissel spel tussen algebra en meetkunde duidelik sigbaar is. Hoofstuk 4 handel oor die rol van kegelsnedes in wiskunde, en in besonder in skadumeetkunde of projektiewe meetkunde. Met behulp van hierdie projektiewe benadering is meer eienskappe van kegelsnedes ontdek. Die integrerende rol van kegelsnedes het ook in hierdie hoofstuk na vore gekom. Die gebruik van meetkundige konsepte soos gelykvormigheid en kongruensie is sentrale temas in die ondersoek na parallelle- en punt-projeksies in skadumeetkunde. Uit hoofstukke 3 en 4 is dit duidelik dat die studie van kegelsnedes 'n wye verskeidenheid wiskundige aktiwiteite moontlik maak wat wiskunde van verskillende afdelings integreer. Dit lei byvoorbeeld tot die integrering van meetkunde, algebra, analitiese meetkunde en trigonometrie. Beide die Euklidiese en die projektiewe benaderings tot kegelsnedes skep onderriggeleenthede waarin verkenning en ontdekking 'n kernrol kan speel. Dit skep verder geleenthede vir praktiese aktiwiteite soos die konstruksie van kegelsnedes met behulp van papiervouwing. 'n Eenvoudige vraag soos waarom kegelsnedes behoue bly onder projeksies (skadus) kan byvoorbeeld aanleiding gee tot 'n reeks aktiwiteite wat uiteindelik kan lei tot die definiëring van kegelsnedes in terme van punte en lyne. Bo en behalwe dat kegelsnedes geleenthede skep vir eenvoudige aktiwiteite lei dit ook tot die gebruik en ontwikkeling van meer gevorderde wiskunde.

Alhoewel kegelsnedes dus as 'n integrerende faktor kan dien, is dit belangrik om te bepaal of dit geskik is vir die skoolwiskundekurrikulum en of die gebruik daarvan ooreenkomsdig die uitgangspunte van die kurrikulum is. In die lig van hoofstukke 3 en

4 word die mate waarin, en wyse waarop kegelsnedes as integrerende faktor in die kurrikulum gebruik kan word, in hierdie hoofstuk ondersoek.

5.1 *Ontleding van die kurrikulum*

In die kurrikulum word op 'n ongestruktureerde wyse na die gebruik van kegelsnedes en die wyses van integrasie verwys. Die kurrikulum verwys dus op 'n onsamehangende wyse na integrasie en die gebruik van kegelsnedes. Om hierdie rolle te verstaan is dit belangrik om die struktuur van die dokument, waarin die kurrikulumdoelstellings verduidelik word, te verstaan.

Die kurrikulumdokument bestaan uit drie hoofstukke. Hoofstuk 1 is die inleiding en gee die algemene beginsels van die Graad 10- tot 12-Nasionale Kurrikulumdoelstellings. Dit handel oor die ontwerp en eienskappe van die dokument asook oor die soort leerder op wie die kurrikulum gerig is. Hierdie hoofstuk verduidelik dat uitkomsgbaseerde onderwys die grondslag vir die kurrikulum vorm. Hierdie uitkomsgbaseerde kurrikulum streef daarna om alle leerders optimaal te ontwikkel (Departement van Onderwys 2000a: 3). Die uitkomste moedig 'n leerdergesentreerde onderrigbenadering, aktiwiteitgesentreerde onderrigbenadering en probleemgesentreerde onderrigbenadering aan. Die wiskunde-uitkomste word gebaseer op kritieke en ontwikkelingsuitkomste wat deur die Grondwet geïnspireer is.

The Critical Outcomes require learners to be able to (Departement van Onderwys, 2002a: 4):

1. identify and solve problems and make decisions using critical and creative thinking
2. work effectively with others as members of a team, group, organisation and community
3. organise and manage themselves and their activities responsibly and effectively
4. collect, analyse, organise and critically evaluate information
5. communicate effectively using visual, symbolic and/or language skills in various modes
6. use science and technology effectively and critically showing responsibility towards the environment and the health of others
7. demonstrate an understanding of the world as a set of related systems by recognising that problem solving contexts do not exist in isolation

Uit die eerste kritieke uitkoms kom die algemene beginsel van 'n probleemgesentreerde kurrikulum wat op hoërordedenke, naamlik kritiese en kreatiewe denke, fokus na vore. Die sewende kritieke uitkoms dui op die gebruik van probleme in konteks van die leerder se leefwêreld, terwyl die sesde een die gebruik van tegnologie noem.

5.1.1 Integrasie in die kurrikulum

In hierdie afdeling word die kurrikulum ontleed met die doel om die verskillende vorme van integrasie wat in die kurrikulum voorkom, te bepaal.

5.1.1.1 Die integrasie van wiskunde met ander vakke

In die eerste hoofstuk van die kurrikulumdokument word die beginsel van integrasie in die kurrikulum bespreek:

Integration is achieved within and across subjects and fields of learning. The integration of knowledge and skills across subjects and terrains of practice is crucial for achieving applied competence as defined in the NQF. Applied competence aims at integrating three discrete competences – namely, practical, foundational and reflective competences. In adopting integration and applied competence, the NCS Grades 10-12 (Schools) seeks to promote an integrated learning of theory, practice and reflection (Departement van Onderwys, 2002a: 4).

Hieruit kan afgelei word dat die *integrasie oor verskillende vakke* heen wel een van die kurrikulum beginsels is.

5.1.1.2 Die integrasie van wiskunde met die leefwêreld

Die tweede hoofstuk van die kurrikulumdokument handel spesifiek oor die vak wiskunde en verduidelik die definisie, doel, omvang, leeruitkomste en skakeling met loopbane. Wiskunde word soos volg gedefinieer:

Mathematics enables creative and logical reasoning about problems in the physical and social world and in the context of mathematics itself. It is a distinctly human activity practised by all cultures. Knowledge in the mathematical sciences is constructed through the establishment of descriptive, numerical and symbolic relationships. Mathematics is based on observing patterns which with rigorous logical thinking, leads to theories of abstract relations. Mathematical problem solving, enables us to understand the world and make use of that understanding in our daily lives. Mathematics is developed and contested over time by social interaction through both language and symbols (Departement van Onderwys, 2002a: 9).

Hierdie definisie gaan van die veronderstelling uit dat daar 'n verband tussen hoërordedenke en wiskunde bestaan. In hoofstuk 2 is die verband tussen hoërordedenke, 'n geïntegreerde kurrikulum en probleemoplossing in wiskunde ondersoek en verduidelik. Dit strook met die bogenoemde definisie van wiskunde wat die belangrike rol van probleemoplossing in die onderrig en leer van wiskunde beklemtoon. Die drie bronne van probleme wat ons in die onderrig van wiskunde kan gebruik, is ons werklike wêreld, sosiale wêreld en probleme uit die konteks van wiskunde self. Wat integrasie betref, verduidelik hierdie definisie van wiskunde die belangrikheid daarvan dat wiskunde met die werklike wêreld geïntegreer word deur gebruik te maak van probleemoplossing. Hierdie gedagte word verder verduidelik:

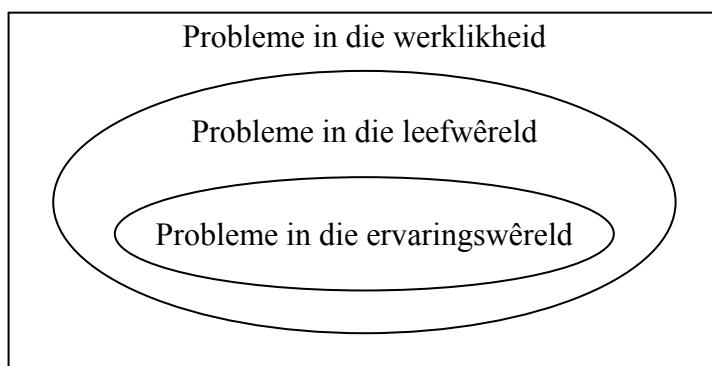
A central purpose of Mathematics in the FET band is establishing an authentic connection between mathematics as a discipline and the application of mathematics in real-world contexts (Departement van Onderwys, 2002a: 9).

Die kurrikulum sien modellering as die brug tussen wiskunde as 'n dissipline en die toepassing van wiskunde. Die tweede hoofstuk van die kurrikulumdokument handel oor die uitkomste en assessoringsstandaarde. Dit bevat onder meer voorgestelde inhoud wat gebruik kan word in die bereiking van die assessoringsstandaarde:

This will state the learning outcomes, assessment standards and notes on proposed content that could be used to achieve assessment standards (Departement van Onderwys 2002a: iii).

Dit is belangrik om daarop te let dat die woord 'could' beteken dat die kurrikulum hier ruimte laat vir die gebruik van ander inhoud. In afdeling 2.1 wat handel oor konstruktivisme, het die belangrikheid van die bou op leerders se voorkennis sterk na vore gekom. Dit is waarom dit belangrik is dat die onderrig by die leerders se ervaringswêreld moet aansluit. Daar is egter 'n verskil tussen die werklike wêreld (real-world), die leefwêreld en die ervaringswêreld van die leerder.

Die werklikheid omvat die leefwêreld, terwyl die leefwêreld weer die ervaringswêreld insluit (sien Figuur 5-1). Die rede hiervoor is omdat die ervaringswêreld Euklidies van aard is, terwyl die leefwêreld 'n groter klas van transformasies toelaat. In die ervaringswêreld is die gebruik van Newton se meganika byvoorbeeld voldoende, terwyl dit in die wêreld waarin ons leef waarin vinnig bewegende voorwerpe (soos lig en elektrone) voorkom, nie voldoende verklarings vir verskynsels bied nie.



Figuur 5-1

Hiebert *et al* (1996: 18) waarsku teen 'n eng benadering in wat as probleme in die onderrig van wiskunde beskou kan word:

Our concern rests with the narrowness of this approach. Real-life or everyday problems are one context, but only one context, for reflective inquiry.

Die RME (Realistic Mathematics Education) vermy hierdie onderskeid tussen probleme in terme van die oorsprong van die probleem. Hulle vereis dat die reeks van onderrigaktiwiteite se vertrekpunt 'n eksperimentele werklikheid vir die leerders moet wees. Probleme moet 'n werklikheid wees in die sin dat leerders onmiddellik op 'n wiskundige betekenisvolle wyse daarby betrokke kan raak. Cobb (2000: 318) verduidelik:

As a point of clarification, it should be stressed that the term *experientially real* means only that the starting points should be experienced as real by the students, not that they have to involve realistic situations.

'n Probleem moet volgens die beginsels van die RME van so aard wees dat die leerders op 'n wiskundige betekenisvolle wyse by die probleem betrokke kan raak. Met ander woorde die probleem moet op die leerders se wiskundige voorkennis gegrond wees.

5.1.1.3 Die integrasie van meetkunde met die res van die kurrikulum

Om ander wyses waarna die kurrikulum na integrasie verwys te verstaan, is dit belangrik om daarop te let dat die kurrikulum in vier leeruitkomste verdeel word. Die leeruitkomste beskryf nie die inhoud van die kurrikulum of die metode waarop dit onderrig moet word nie (Departement van Onderwys 2002a: 6). Dit beskryf die kennis, vaardighede en waardes wat die leerders moet verkry. Die leeruitkomste van die kurrikulum is:

- Leeruitkoms 1 (Getal en getalverwantskappe): Die leerder moet in staat wees om getalle te herken, te beskryf, voor te stel en om met getalle en hulle verhoudings te werk om sodoende met selfvertroue probleemplossingsituasies te skat, te bereken en te kontroleer.
- Leeruitkoms 2 (Patrone, funksies en algebra): Die leerder moet in staat wees om 'n wye versameling funksies te ondersoek, te analyseer, te beskryf en voor te stel en verwante probleme op te los.
- Leeruitkoms 3 (Vorm, ruimte en meting): Die leerder moet in staat wees om die eienskappe van twee- en driedimensionele ruimte te beskryf, voor te stel, te analyseer en eienskappe van vorms te verduidelik en te verantwoord.
- Leeruitkoms 4 (Datahantering en waarskynlikheid): Die leerder moet in staat wees om data in te samel en te gebruik, om statistiese en waarskynlikheidsmodelle daar te stel en om relevante probleme op te los.

Hierdie leeruitkomste word in die kurrikulum (Departement van Onderwys 2002a: 13) verder verduidelik. Onder Leeruitkoms 3 (wat handel oor vorm, ruimte en meting) word onder andere gestel:

The study of Shape, Space and Measurement enables the learner to connect Shape, Space and Measurement to other Learning Outcomes within Mathematics and where possible to other subjects (Departement van Onderwys 2002a: 13).

Hieruit kom 'n tweede integrasiegedagte na vore, dit handel oor die gebruik van meetkunde in ander leeruitkomste. Hierdie wyse van integrasie is in die Connected Geometry projek as integrasiebeginsel gebruik. Goldenberg (1999: 194), wat die hoof ondersoekbeampte van die projek was, verduidelik die krag van die integrasie van meetkunde met algebra soos volg:

Geometry's deep connections to other mathematical topics and to nonmathematical interests could help connect a larger and more diverse group of students with rich mathematics.

Geometry's traditional isolation from the rest of the school curriculum made it a strategically easy point to enter, and yet (if we did our work right) afforded us an opportunity to get a crowbar into the rest of the curriculum.

Die doel van hierdie projek was om wiskunde aantreklik en uitdagend vir hoëskoolleerders te maak deur 'n kultuur van eksplorasie in die klaskamer te bevorder, deur leerders se ervaring met verskillende afdelings van wiskunde met mekaar te verbind, en om wiskunde met die res van die leerder se leefwêreld te verbind. Hierdie gedagtes word ook sterk in die Suid-Afrikaanse kurrikulum weerspieël. Afdeling 2.3.1 van hierdie navorsing verduidelik waarom dit belangrik is dat meetkunde- en algebra-onderrig nie van mekaar geskei word nie. Die kurrikulumdokument sluit hierby aan as dit in Leeruitkoms 3 verwys na die gebruik van meetkunde in die onderrig van algebra (Departement van Onderwys 2002a: 13):

The study of Shape, Space and Measurement enables the learner to link algebraic and geometric concepts through analytic geometry

The study of Shape, Space and Measurement enables the learner to link the use of trigonometric relationships and geometric properties to solve problems

Die eerste opmerking vestig ons aandag op die gebruik van analitiese meetkunde en op die feit dat dit gebruik kan word om meetkunde en algebra te integreer. Moise (1990: 249) verduidelik die gebruik van analitiese meetkunde in sy beskrywing van Descartes se werk:

His greatest contribution to mathematics was the discovery of the coordinate systems and their application to problems of geometry. Ever since then algebra and geometry have worked together, to the advantage of both (Departement van Onderwys 2002a: 13).

'n Voorbeeld van die gebruik van analitiese meetkunde in die integrering van meetkunde en algebra kom in afdeling 3.4 voor.

5.1.1.4 Die integrering van tegnologie in onderrig en leer

Die eerste opmerking oor die gebruik van tegnologie kom onder Leeruitkoms 3 (wat handel oor vorm, ruimte en meting) voor:

The study of Shape, Space and Measurement enables the learner to use construction and measurement or dynamic geometry software for exploration and conjecture (Departement van Onderwys 2002a: 13).

Die kurrikulum plaas dus nie baie klem op die gebruik van tegnologie nie. Die gebruik van tegnologie word beperk tot die opsionele gebruik van meetkundesagteware, soos byvoorbeeld Geometer's Sketchpad en Cabri. Dit word verder beperk tot die gebruik daarvan vir ontdekkingsdoeleindes in meetkunde. Dit is slegs 'n alternatief vir potlood- en liniaalkonstruksies en meting. In die vierde hoofstuk van die kurrikulumdokument, wat handel oor assessering, word die gebruik van tegnologie sterker beklemtoon:

Investigations are to be carried out with the assistance of whatever technology is available and assessed in accordance with the technology used. Dynamic geometry software assists considerably in carrying out investigations. This does not imply that the use of electronic technology is imperative, paper and pencil and paper folding is quite acceptable (Departement van Onderwys 2002a: 13).

Nadat de Villiers (1994: 41) die voordele van die gebruik van tegnologie in modellering aangetoon het, waarsku hy:

It is therefore high time our school (and university) curriculum wakes up from its pre-technology slumber, and becomes more relevant with respect to the increasing technolization of society.

Daar moet ook gewaarsku word teen die verkeerde gebruik van tegnologie in die klaskamer. Alhoewel die gebruik van tegnologie essensieel is en leerders kan help om wiskundige denkvaardighede te ontwikkel, kan dit ook nutteloos wees indien dit verkeerd gebruik word:

Simply putting computers and calculators in the hands of students won't do it. What's needed is a restructuring of the curriculum and an approach to technology that allows students to experience the thrill of mathematical research (Cuoco & Goldenberg 1996: 32).

Die beperkte en opsionele gebruik van tegnologie in die kurrikulum is verstaanbaar in die Suid-Afrikaanse konteks solank as wat min skole rekenaarlaboratoriums en grafiese sakrekenaars het.

5.1.2 Kegelsnedes in die kurrikulum

In hierdie afdeling word die kurrikulum ontleed met die doel om die gebruik van kegelsnedes in die kurrikulum te ondersoek. Daar word op verskillende wyses in die

kurrikulum melding gemaak van die gebruik van kegels en kegelsnedes. Alhoewel die assessoringsstandaarde slegs die vlak van die uitkomste beskryf, word daar tog na kegelsnedes verwys in hierdie beskrywings:

We know this when the learner analyses, describes and represents the properties of and relationships between geometric solids by investigating the effect of a plane cutting a right circular cone in various ways (Departement van Onderwys 2002a: 27).

We know this when the learner analyses, describes and represents the properties of and relationships between geometric solids by determining the surface area and volume of geometric objects (including the right circular cone, the tetrahedron and pyramid on a square base) (Departement van Onderwys 2002a: 27).

We know this when the learner demonstrates a basic understanding of the contested nature and development of geometry through history and some familiarity with other geometries such as spherical geometry... (Departement van Onderwys 2002a: 31).

The learner is able to investigate, analyse, describe and represent a wide range of functions and solve related problems (Departement van Onderwys, 2002a: 24).

We know this when the learner generates as many graphs as necessary by means of point by point plotting to test $y = a(x + p)^2 + q$ (Departement van Onderwys 2002a: 19)

We know this when the learner demonstrates a basic understanding of the contested nature and development of geometry through history and some familiarity with other geometries such as spherical geometry (Departement van Onderwys 2002a: 31)

In die afdeling van die kurrikulum wat handel oor die gebruik van spesifieke inhoud waarmee die assessoringsstandaarde bereik kan word, word verder na die gebruik van kegelsnedes verwys:

The possibility of using more than one plane cutting the solid offers an opportunity of distinguishing the rating of performance at higher levels (Departement van Onderwys 2002a: 46).

The loci of other conic sections can be used in rubrics indicating higher performance (Departement van Onderwys 2002a: 46).

Stretches can be looked at as an extension in transformation geometry. The use of stretches in establishing the equation of the ellipse from the circle is an example of a useful application (Departement van Onderwys 2002a: 46).

Kegelsnedes kom dus op verskillende plekke en wyses in die kurrikulum voor. Hierdie feit versterk die moontlikheid om kegelsnedes in die kurrikulum as 'n integrerende faktor te kan gebruik. Behalwe vir die bogenoemde direkte verwysings na kegels en kegelsnedes is daar talle indirekte verwysings. Ons het ook in hoofstukke 3 en 4 gesien dat die werklike krag van die kegelsnedes lê in die talle wiskundige konsepte (waarna die kurrikulum verwys) wat dit saamtrek in die ondersoek daarvan.

5.2 Kegelsnedes as integrerende faktor in die kurrikulum

In afdeling 5.1.1 en 5.1.2 is vier vorme van integrasie en verwysings na kegelsnedes wat in die kurrikulum voorkom respektiewelik aangetoon. In hierdie afdelings word

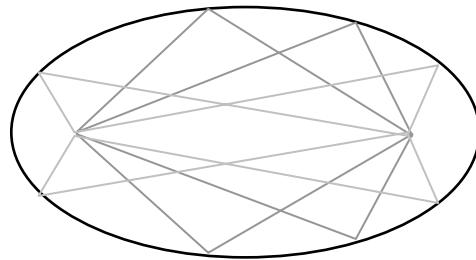
die integrerende rol van kegelsnedes in elk van die vier integrasievorme ondersoek. Die vraag in hierdie afdeling is nie hoe die onderrig moet plaasvind nie, maar slegs oor die integrasiemoontlikhede van kegelsnedes in elk van die vier tipes integrasievorme waarna die kurrikulum verwys.

5.2.1 Kegelsnedes in ons leefwêreld

Die kurrikulum vereis die integrering van wiskunde as vak met toepassings in leerders se leefwêreld. Daarom word die voorkoms en toepassings van kegelsnedes in die leefwêreld in hierdie afdeling aangedui en eienskappe (sien afdeling 3.8) soos onder ander weerkaatsingseienskappe gebruik. Soos alreeds verduidelik in afdelings 4.2 en 4.4 kan al drie kegelsnedes deur middel van beligting of skaduwees verkry word. Ons kry dieselfde effek ook in rekenaargrafika en kuns waar perspektief 'n belangrike rol speel.

5.2.1.1 Ellipse in ons leefwêreld

Alhoewel 'n sirkel eenvoudiger lyk as 'n ellips is dit ellipse wat die meeste in ons alledaagse lewe 'gesien' word. Die rede hiervoor is dat elke sirkel wat vanuit 'n hoek waargeneem word, as ellips gesien kan word. Daarom sien ons ellipse in die waarneming van 'n glas water, motorbande, CD's, ens. 'n Ander voorbeeld is as 'n ronde glas met water in, skuins gehou word, dan vorm die water 'n ellips teen die wand van die glas. Ellipse word nie net gesien nie, maar ook gebruik in toepassings. Nywerhede maak gebruik van elliptiese ratte en semi-elliptiese vere (Fuller & Tarwater 1986: 122). 'n Nuttige eienskap van kegelsnedes met baie toepassingsmoontlikhede is die refleksieve eienskap (sien afdeling 3.8). Enige lig, klank of



Figuur 5-2

sein wat ontstaan by een brandpunt word deur die ander brandpunt gereflekteer. As 'n snoekertafel 'n elliptiese vorm het en die bal vanaf een brandpunt geskiet word, sal dit altyd deur die ander brandpunt beweeg. Hierdie beginsel word in litotripsie, 'n mediese prosedure vir die behandeling van nierstene gebruik. Die pasiënt word in 'n elliptiese tenk met water geplaas sodat die niersteen by een fokuspunt is. Skokgolwe met hoë energie word dan by die een brandpunt genereer om sodoende die nierstene by die ander brandpunt te verbrokkel. Dieselfde beginsel word ook gebruik in die konstruksie

van fluistergalerye soos in die St. Paul Katedraal in Londen. Die plafon het 'n elliptiese vorm wat veroorsaak dat indien 'n persoon by die een brandpunt fluister kan 'n ander persoon dit by die ander brandpunt van die ellips hoor.

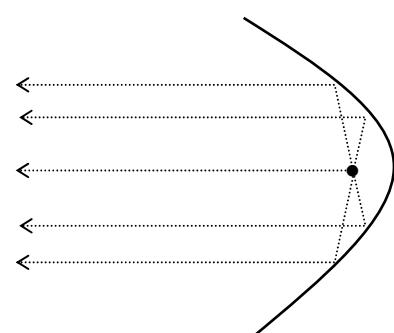
5.2.1.2 Hiperbole in ons leefwêreld

Loran (Long Range Navigation) is 'n hiperboliese radionavigasiestelsel wat hoofsaaklik vir langafstand-navigasie op see gebruik word. Indien die middelpunte van twee konsentriese sirkels die bron van 'n radiosein is, sal die gesinkroniseerde seine mekaar in die vorm van 'n kegelsnede sny. Hierdie beginsel vorm die basis van hiperboliese radionavigasie wat bekend staan as Loran. Die stelsel werk met behulp van 'n reeks senders wat sterk pulse teen 'n frekwensie van 2 Mhz uitstuur. Hierdie senders stuur sirkelvormige patronen uit wat Moiré-patrone vorm. Dit is juis hierdie eienskap wat gebruik word om die oorsprong van klank, soos 'n geweerskoot, te bepaal. Vanuit die tydsverskil wat die klank neem om twee persone op verskillende plekke te bereik, kan die afstand van die persone ten opsigte van die geweer bepaal word. Die geweer wat die skoot gevuur het behoort dan op 'n been van die hiperbool te wees met die twee persone by die brandpunte. Die presiese posisie van die geweer wat iewers op die kromme lê, kan met behulp van 'n derde persoon bepaal word. Enigeen van die eerste twee persone kan saam met die derde weer 'n hiperbool bepaal waar hierdie laaste twee persone op die brandpunte is. Op hierdie wyse word twee hiperbole verkry wat mekaar sny. Die skoot is dus op hierdie snypunt afgevuur (Fuller & Tarwater 1986: 132).

'n Supersoniese vliegtuig se skokgolf het die vorm van 'n kegel, dit sny die grond in die vorm van 'n hiperbool. Dit klank tref dus elke punt op die hiperboliese kromme terselfdertyd. Verskillende mense op die kromme hoor die klank op dieselfde tydstip.

5.2.1.3 Parbole in ons leefwêreld

Soos alle kegelsnedes besit parbole ook die refleksieve eienskap. Die refleksieve eienskap van 'n parabool word in antennas, satellietskottels, radioteleskope, ligte en mikrofone gebruik. Indien 'n gloeilamp by die brandpunt van 'n paraboliese weerkaatser geplaas word, word die lig ewewydig aan die as van die parabool weerkaats. Op hierdie wyse



Figuur 5-3

word 'n sterk gekonsentreerde straallig gevorm. Vir hierdie rede het die hoofligte van 'n motor 'n paraboliese oppervlak. Die gloeilamp word by die brandpunt geplaas vir 'n sterk gekonsentreerde straal en voor die fokus vir 'n swakker straal. Die omgekeerde word weer by paraboliese antennas gebruik. Hier word alle inkomende seine en golwe, parallel aan die as van die paraboliese antenna na die brandpunt, waar die ontvanger geleë is, gereflekteer. Die grootste paraboliese spieël wat bestaan, word in 'n teleskoop wat in die Kaukasusberge in Rusland geleë is, gebruik. Indien 'n paraboliese weerkaatser na die son gerig word, sal enige voorwerp by die brandpunt verhit. Vandaar die woord brandpunt of 'fokus' wat in Latyn 'vuurmaakplek' beteken. Groot antennas soos dié in die Mojave woestyn in Kalifornië is 'n paraboloid en het ook 'n hiperboliese subreflektor. Dit help om die gewig van die ontvanger of sender nader aan die antenna te plaas en is tweedens geriefliker vir die elektronika (Parzynski 1984: 294). Die werking van die antenna is gebaseer op die weerkaatsingseienskappe wat in Stelling 3-18 en Stelling 3-19 verduidelik is. Sommige van die toepassings van parabole maak deel uit van ander vakgebiede soos fisika. Daarom word die feit dat 'n kanonkoeël in 'n paraboliese baan beweeg eerder in afdeling 5.2.3 bespreek.

5.2.2 Integrasie van meetkunde en algebra

In die kurrikulum word die gebruik van meetkunde, dit is Leeruitkoms 3 wat handel oor vorm, ruimte en meting, in die onderrig en leer van die ander leeruitkomste genoem. Leeruitkoms 1 handel oor getalle en getalverwantskappe, Leeruitkoms 2 oor funksies en algebra, Leeruitkoms 3 oor meetkunde en Leeruitkoms 4 oor statistiek. Uit hoofstukke 3 en 4 waarin die kegelsnedes wiskundig logies ontwikkel is, is dit duidelik dat die gebruik van kegelsnedes nie toepaslik is vir die onderrig en leer van Leeruitkoms 1 en 4 nie. Daarteenoor het die ondersoek die toepaslikheid van kegelsnedes in die onderrig en leer van Leeruitkomste 2 en 3 aangetoon, dit is die integrering van patronen, funksies en algebra met vorm, ruimte en meting. In afdelings 3.4, 3.5, 3.7, 3.9 en 4.6 is aangetoon dat kegelsnedes gebruik word om 'n wye versameling funksies te ondersoek, analyseer, beskryf, voor te stel en verwante probleme op te los. In afdelings 3.2, 3.6, 3.9.1, 4.4, 4.5, 4.7 en 4.9 is aangetoon hoedat kegelsnedes se eienskappe in 2- en 3-dimensionele ruimte beskryf, voorgestel, geanalyseer, verduidelik en verantwoord kan word. Die gelyktydige gebruik van meetkunde en algebra en die impak daarvan kan in 3.4 en 3.9.3 gesien word. Een van die beskrywings van Leeruitkoms 1 vra van leerders om analitiese meetkunde in te

span om algebraïese en meetkundige konsepte met mekaar te verbind. Dit is presies wat deur middel van kegelsnedes gedoen is in afdeling 3.4.

5.2.3 Integrasie met ander vakke

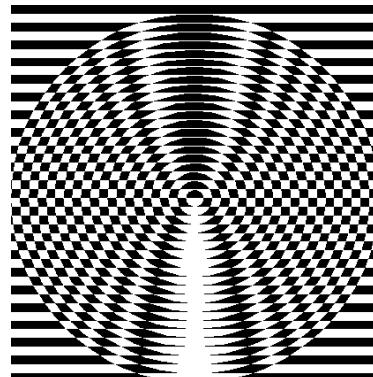
In afdeling 5.2.1 is aangetoon dat kegelsnedes algemeen in ons leefwêreld voorkom. Baie van die toepassings van kegelsnedes val in ander vakgebiede soos fisika en tegniese tekene. Met die gebruik van kegelsnedes is dit moeilik om tussen die integrasie met die werklike wêreld en ander vakke te onderskei, want baie toepassings in die werklike wêreld is huis in ander vakke.

5.2.3.1 Fisika

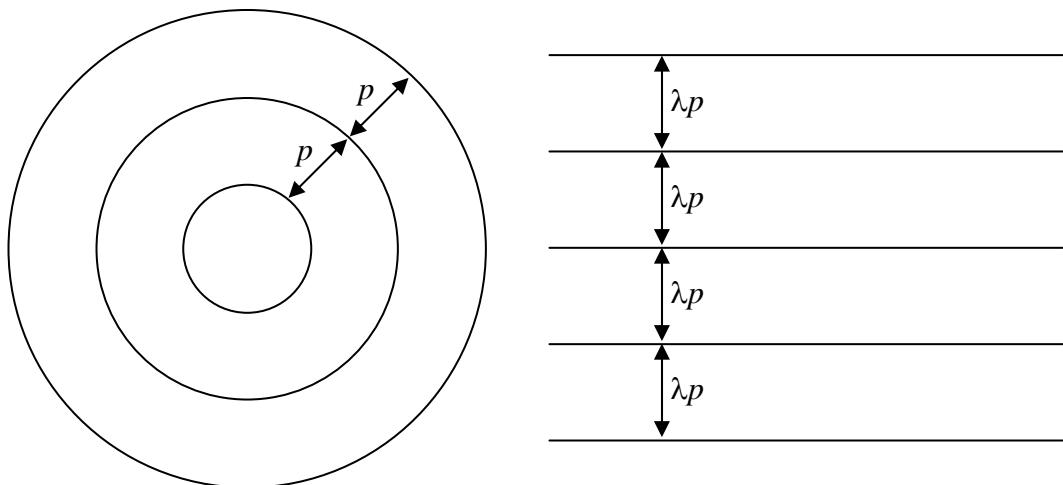
'n Werklike fisiese situasie waar al drie kegelsnedes voorkom is in Moiré-patrone. Moiré-patrone kom voor wanneer 'n herhaalde semi-deurskynende patroon bo-oor 'n ander patroon geplaas word om 'n derde patroon te vorm (Cullen 1990: 370). Dieselfde effek word ook verkry as twee lae materiaal (sy) op mekaar gestoompars word. Hierdie effek word soos volg in die praktyk gebruik:

The scientific applications of the mathematical theory of overlapping geometric patterns range from wave interference phenomena on physics to detection of stress patterns in metals and aberrations in lenses (Cullen 1990: 370)

'n Algemene toepassing van die Moiré-effek kom in die meting van klein afstandsverskille na vore. Die rede hiervoor is omdat 'n klein beweging 'n grootskaalse verandering in die Moiré-patroon veroorsaak. Dit maak dat klein afstande bepaal kan word deur die groter afstandsveranderings in die Moiré-patrone te meet. Al drie kegelsnedes kan gekarakteriseer word in terme van Moiré-patrone wanneer die een patroon bestaan uit ewewydig gelyk gespasieerde lyne en die ander patroon uit konsentriese sirkels wat gelyke afstande van mekaar af is. In Figuur 5-5 is die Moiré-patroon byvoorbeeld 'n parabool. Die radiusse van die sirkels in Figuur 5-6 vergroot telkens met gelyke grote, p , wat die grein van die rooster genoem word. Die afstande tussen die horisontale lyne is λp . λ is 'n positiewe konstante ($\lambda > 0$) en word die grein van die lyne genoem. Dus kan die stelsel lyne en sirkels in Figuur 5-6 soos volg voorgestel word: $x^2 + y^2 = (mp)^2$ en $y = n(\lambda p)$ waar m en n alle heelgetalle is.

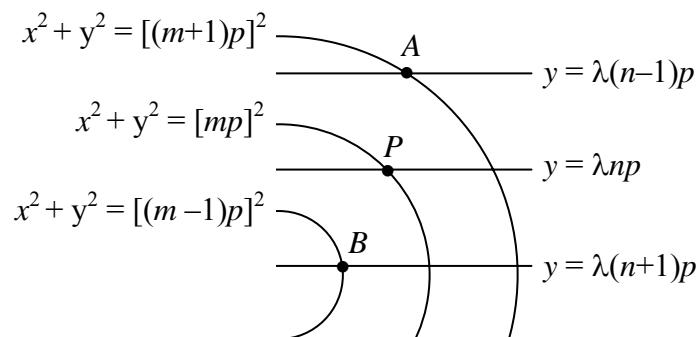


Figuur 5-5



Figuur 5-6

Die Moiré-patroon word gevorm deur die snydingspunte van die twee patronen. Laat $P(m; n)$ 'n snydingspunt wees van $x^2 + y^2 = (mp)^2$ en $y = n(\lambda p)$ vir $\lambda > 0$ en $p > 0$. Daar bestaan verskillende moontlikhede vir B in hierdie geval. Daarom is daar nog 'n voorwaarde wat moet geld: $m + n = k$ waar k 'n konstante getal is. In Figuur 5-7 is $m + n$ wel konstant by die punte A , P en B . Die versameling van alle krommes, wat deur verskillende waardes van k gegenereer word, is 'n *Moiré-patroon*. Die oog kan egter slegs daardie Moiré-patroon waarneem waar die punte A , B en P naby aan mekaar is.



Figuur 5-7

Die vergelyking van die Moiré-patrone kan algebraïes bepaal word deur die volgende stelsel vergelykings op te los:

$$x^2 + y^2 = (mp)^2 \quad \dots \quad (1)$$

$$y = n(\lambda p) \quad \dots \quad (2)$$

$$m + n = k \quad \dots \quad (3)$$

Vervanging van (3) in (2) gee $y = (k - m)\lambda p$ wat geskryf kan word as

$$m = \frac{y}{\lambda p} - k \quad \dots \quad (4)$$

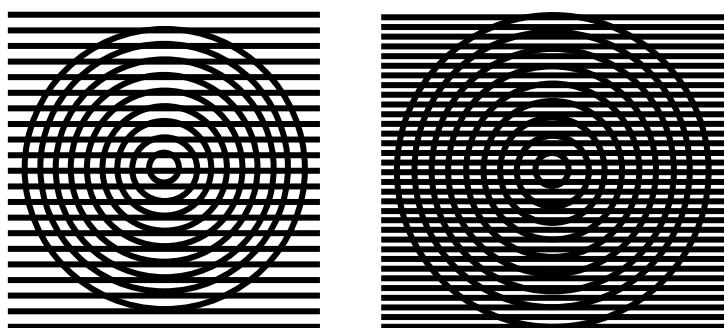
$$\text{Vervanging van (4) in (1) gee } \lambda^2 x^2 + (\lambda^2 - 1)y^2 + 2\lambda k p y - k^2 \lambda^2 p^2 = 0 \quad \dots \quad (5)$$

Vergelyking (5) is die vergelyking van 'n kegelsnede aangesien $\lambda > 0$. Om die tipe kegelsnede te bepaal kan, Tabel 3-4 gebruik word. $B^2 - 4AC$ is in hierdie geval dus $-4\lambda^2(\lambda^2 - 1)$. As $\lambda^2 - 1 = 0$ dan is die grafiek 'n parabool, indien $\lambda^2 - 1 < 0$ 'n hiperbool en as $\lambda^2 - 1 > 0$ 'n ellips. Maar $\lambda > 0$ dus kan Tabel 3-4 uitgebrei word:

Tabel 5-1

Kegelsnede s	e	Hoek β van snyvlak	Koëffisiënte	Aantal y-afsnitte van kegelsirkel	Moiré-patroon
Parabool	$e = 1$	$\beta = 90^\circ - \theta$	$B^2 - 4AC = 0$	1	$\lambda = 1$
Hiperbool	$e > 1$	$\beta > 90^\circ - \theta$	$B^2 - 4AC > 0$	2	$0 < \lambda < 1$
Ellips	$e < 1$	$\beta < 90^\circ - \theta$	$B^2 - 4AC < 0$	0	$\lambda > 1$

Dus is die Moiré-patroon 'n parabool as die grein van die sirkels en lyne dieselfde is, 'n ellips as die grein van die lyne groter as dié van die sirkels is, en 'n hiperbool ellips as die grein van die sirkels kleiner as dié van die lyne is.



Figuur 5-8

Die vorm van die Moiré-patroon kan ook met behulp van die lokusdefinisie (in terme van 'n lyn en 'n punt) verduidelik word. Om dit te doen is die werk van Cullen (1990: 372) in hierdie afdeling gebruik. Volgens dié lokusdefinisie is 'n kegelsnede die versameling van alle punte P sodat die verhouding tussen die afstande van 'n vaste punt P en 'n vaste lyn l konstant is. Soos alreeds in afdeling 3.6.3 vermeld, word hierdie vaste verhouding die eksentrisiteit van die kegelsnede genoem.

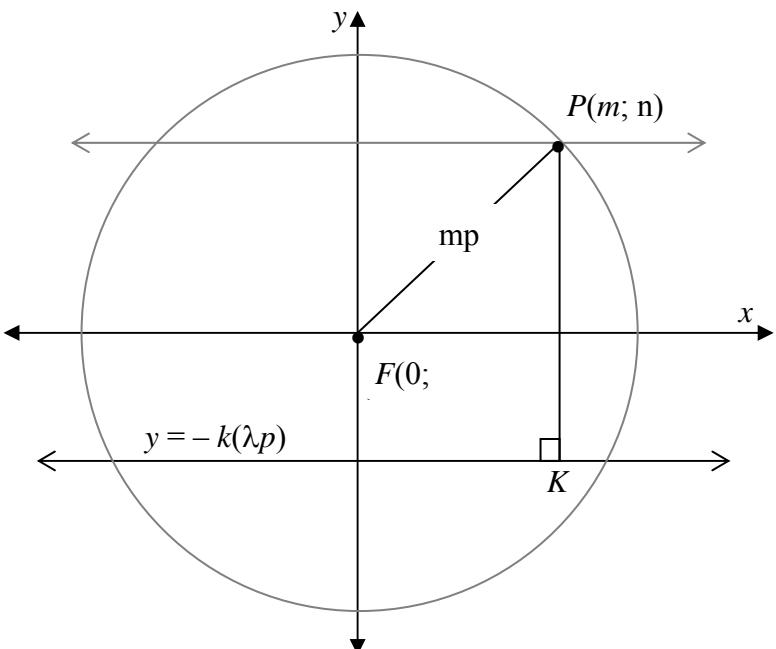
Laat l die lyn $y = -k(\lambda p)$ voorstel en die vaste punt die punt $F(0; 0)$ wees. As P die punt $(m; n)$ is, is $PF = mp$ en $PK = n(\lambda p) + k(\lambda p)$ in Figuur 5-9. Dit volg uit die figuur sowel as vergelykings (1) en (2). Dus is P op die kegelsnede met eksentrisiteit $e =$

$$\frac{PF}{PK} = \frac{mp}{\lambda p(n+k)} = \frac{1}{\lambda} \text{ omdat uit (3) volg dat } m+n=k.$$

Hieruit kan ons aflei dat

- as die grondoppervlak van die sirkelvormige rooster gelyk is aan die grondoppervlak van die lyne (dit is $\lambda = 1$) word 'n familie van parabole gevorm met gemeenskaplike fokus $F(0; 0)$ en riglyne $y = -kp$, waar $k \in \text{heelgetalle}$
- as die grondoppervlak van die lyne groter is as dié van die sirkels (dit is $\lambda > 1$) word 'n familie van ellipse gevorm. Elke ellips het een fokuspunt $F(0; 0)$ en eksentrisiteit $1/\lambda$.
- as die grondoppervlak van die lyne kleiner is as dié van die sirkels (dit is $0 < \lambda < 1$) word 'n familie van hiperbole gevorm. Elke hiperbool het een fokuspunt $F(0; 0)$ en eksentrisiteit $1/\lambda$.

Moiré-patronen skep die geleentheid om die kegelsnedes op 'n informele

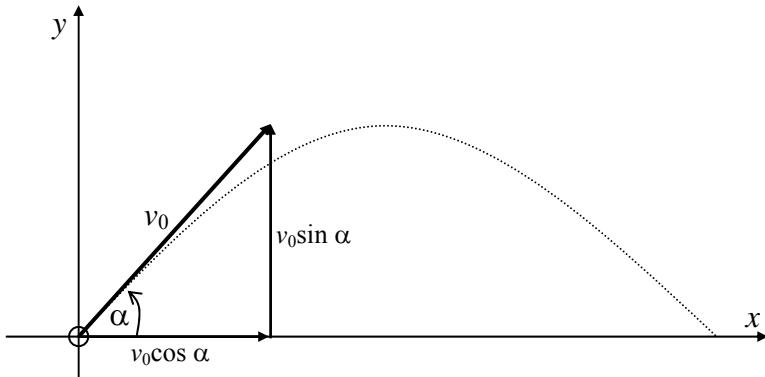


Figuur 5-9

wyse in die onderrig- en leersituasie te gebruik. Maletsky (1973: 244-246) en Byrne (1966: 348-350) het wyses aangetoon waarop Moiré-patronen, wat deur twee

sirkelvormige roosters voortgebring word, in die onderrig van hiperbole en ellipse gebruik kan word. In afdeling 5.4.1.1 word van hierdie metodes aangepas en gedeeltelik gebruik.

'n Verdere toepassing van kegelsnedes in fisika is projektielbeweging. Wanneer 'n voorwerp in die lug gegooi of geprojekteer word is die trajek van die voorwerp 'n parabool. Die lugweerstand mag 'n klein invloed hê sodat dit nie 'n perfekte parabool is nie. Die ontdekking van hierdie verskynsel het dit vir kanonniers moontlik gemaak om die pad wat die kanonkoeël sal volg, indien dit teen 'n spesifieke hoek geprojekteer word, te bepaal. Laat byvoorbeeld 'n klip teen 'n opwaartse snelheid van v_0 m/s en teen 'n hoek α , met die horizontale-as, geprojekteer word. Die lugweerstand is weglaatbaar klein, daarom is daar slegs 'n vertikale krag, swaartekrag, wat op die klip inwerk. Laat die klip vanaf die oorsprong gegooi word. Die snelheid in die x -rigting is $v_0\cos\alpha$ m/s en in die y -rigting $v_0\sin\alpha$ m/s, maar as gevolg van die swaartekrag moet $\frac{1}{2}gt^2$ van die vertikale komponent afgetrek word.



Figuur 5-10

Daarom is $x = (v_0\cos\alpha)t$ en $y = (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$. Deur substitusie en deur t die onderwerp van die formule te maak gee dit $y = (\tan\alpha)x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. Die vergelyking

kan geskryf word as $y = ax + bx^2$ en is dus 'n parabool. Om die maksimum horizontale afstand wat die koeël bereik te bepaal, bepaal ons eers die tydstip wat die kanonkoeël die grond tref. Dus stel ons $y = 0$ in die vergelyking wat die hoogte van die kanonkoeël gee: $y = (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$. Dus is $0 = (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ en hieruit kan t

bepaal word: $t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$ want $t \neq 0$ (want ons soek na die ander t -waarde, nie $t = 0$).

Hierdie t -waarde kan nou in die x -waarde ($x = (v_0 \cos \alpha)t$) vervang word om sodoende die vertikale afstand te bepaal wat die kanonkoeël afgelê het. Dus is $x =$

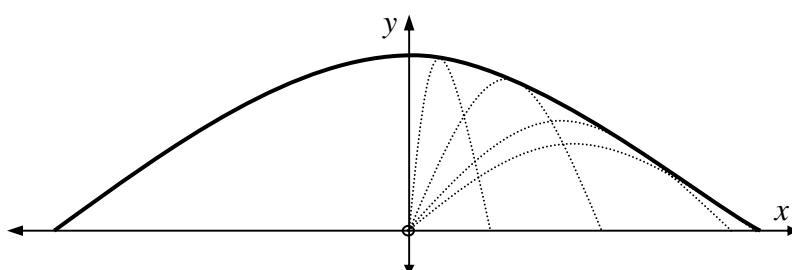
$\frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$ en dit vereenvoudig tot $x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$. Die maksimum waarde van $\sin 2\theta$ is 1 en dit is as $2\theta = 90^\circ$, met ander woorde as $\theta = 45^\circ$. Dus om die kanonkoeël sover moontlik te skiet, moet dit teen 'n hoek van 45° geprojekteer word en die

maksimum vertikale afstand kan bepaal word deur $x = \frac{v_0^2}{g}$.

Ons weet nou wat die maksimumafstand is. Die volgende vraag is nou, indien hierdie kanon gebruik word om na vliegtuie te skiet, waar gaan die vliegtuie veilig

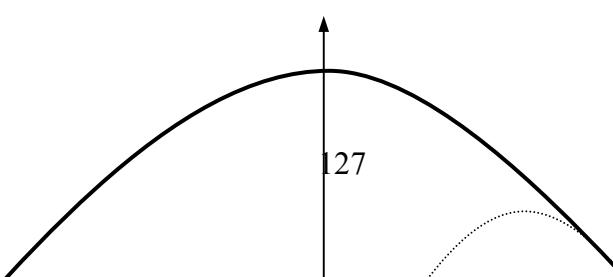
wees? Die vergelyking van die projektiel word gegee deur $y = (\tan \alpha)x - \frac{gx^2}{2v_0 \cos^2 \alpha}$

wat geskryf kan word as $y = ax + bx^2$ waar v_0 m/s die beginsnelheid is. Indien die hoek α tussen 0° en 180° beweeg, word 'n reeks of familie van parbole verkry. Hierdie 'familie' van parbole se buiterand of omhulsel vorm weer op sy beurt 'n nuwe parabool wat bekend staan as die *parabool van veiligheid*. Dit is dus buite hierdie parabool wat die projektiel nie die vliegtuig kan tref nie.



Figuur 5-11

Dieselde effek sien ons ook by sekere soorte tuinsproeiers. Om die vergelyking van hierdie omhulsel te bepaal word Boltjanskii (1964: 5) se werk gebruik. Die eerste stap is om die beginsnelheid v_0 in x - en y -koördinate op te breek, sê v_{0x} en v_{0y} .



Uit Figuur 5-10 volg dat by enige punt A op die parabool is $x = \alpha t$ en $y = \beta t - \frac{1}{2} gt^2$.

Dus is $t = \frac{x}{\alpha}$ en deur in vervanging word $y = \frac{\beta x}{\alpha} - \frac{gx^2}{2\alpha^2}$, dit kan ook geskryf word as $gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2y = 0$. Volgens die stelling van Pythagoras is $\alpha^2 + \beta^2 - v_0^2 = 0$. Dus word die omhulsel se vergelyking volgens afdeling 4.9.1 gegee deur die volgende stelsel vergelykings:

$$f(x; y; \alpha; \beta) = gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2y$$

$$g(\alpha; \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - v_0^2$$

$$\frac{d}{d\alpha}[f(x; y; \alpha; \beta)] = f_\alpha \cdot g_\beta - g_\alpha \cdot f_\beta = 0$$

Die stelsel word in hierdie geval volgens Boltyanskii (1964: 5):

$$gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2y = 0 \quad \dots \quad (6)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - v_0^2 = 0 \quad \dots \quad (7)$$

$$2\alpha\beta y + (\alpha^2 - \beta^2)x = 0 \quad \dots \quad (8)$$

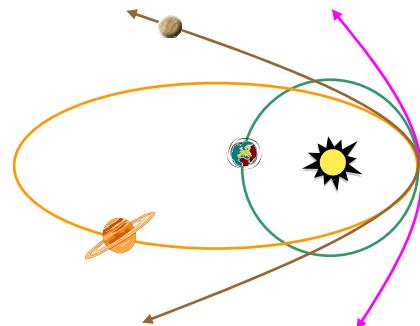
Dan word (6) $\times \beta - (8) \times \alpha$: $g\beta x^2 - 2\alpha\beta^2x + 2\alpha^2\beta y - \alpha(\alpha^2 - \beta^2)x - 2\alpha^2\beta y = 0$ wat vereenvoudig tot $g\beta x^2 - \alpha(\alpha^2 + \beta^2)x = 0$. Deur vergelyking (7) te vervang word dit

$g\beta x^2 - \alpha v_0 x = 0$ en dus is $\alpha = \frac{g\beta}{v_0^2} x$. Vervanging in vergelyking (8) lewer dan

$\frac{2g\beta^2 y x}{v_0^2} + \frac{g^2 \beta^2 x^3}{v_0^4} - \beta^2 x = 0$ en dus is die vergelyking van die omhulsel $y = \frac{v_0}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2$. Dus is die omhulsel of die parabool van veiligheid weer 'n parabool.

5.2.3.2 Aardrykskunde en sterrekunde

Die vroeë Griekse en Babiloniese astronome het geglo dat die planete in 'n sirkelvormige baan om 'n 'vaste' aarde beweeg, maar in die 17de eeu het Johannes Kepler ontdek dat die planete in elliptiese bane om die son beweeg met die son baie naby aan een van die fokuspunte (Resnikoff & Wells 1973: 334; Spradley 1991: 38). Newton het sy wette geformuleer vanaf Kepler se omvattende astronomiese data en toe aangetoon dat Kepler se wette afgelei kan word vanaf syne. Volgens Newton se universele gravitasie wet bestaan daar 'n krag tussen enige twee voorwerpe, naamlik $F = \frac{GMm}{r^2}$



Figuur 5-13

waar G die gravitasiekonstante, M en m die massas van die voorwerpe en r die afstand tussen die voorwerpe is. Kepler se drie wette lui soos volg:

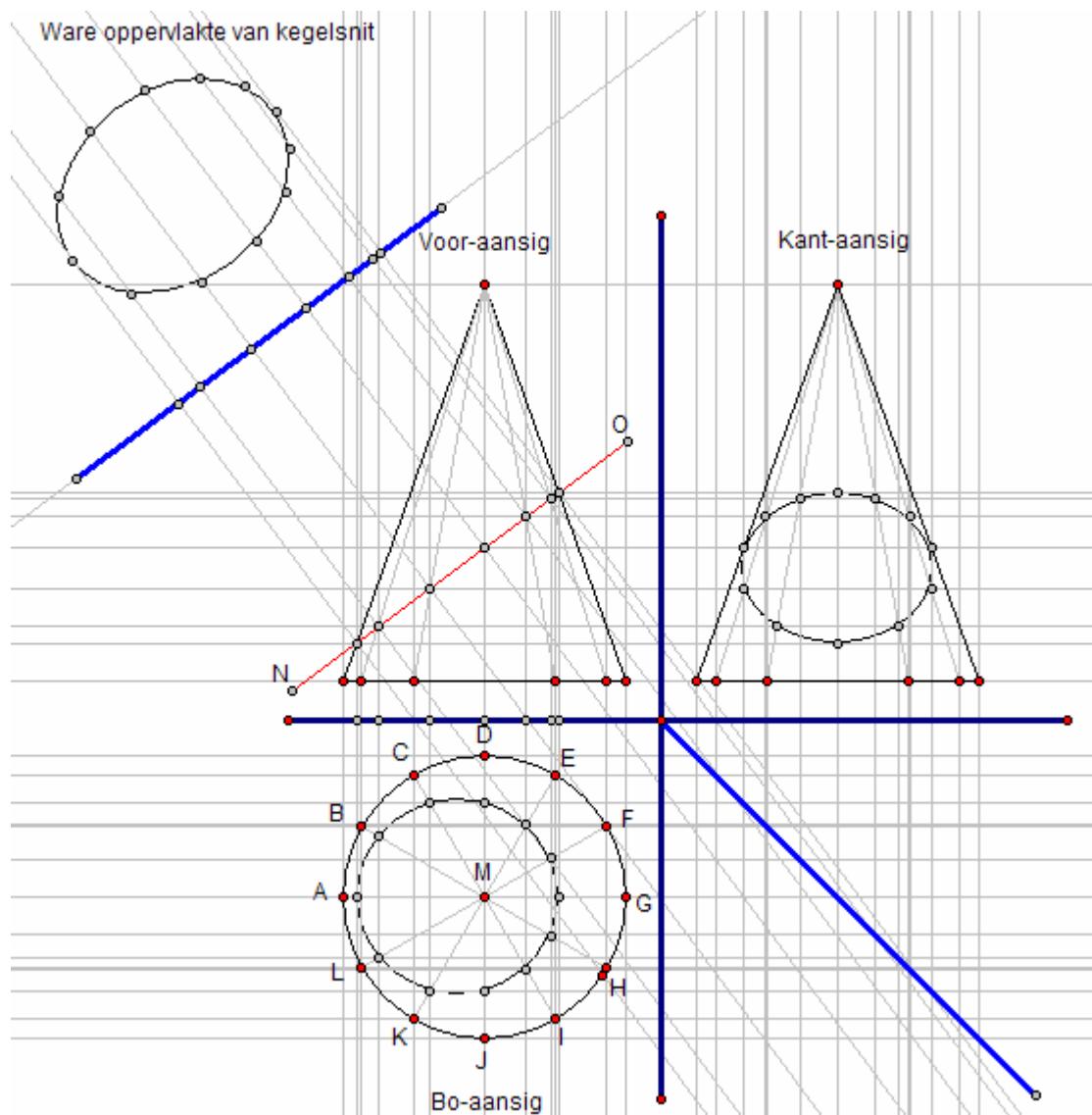
- Die wentelbaan van elke planeet beskryf 'n ellips waarvan die son 'n brandpunt is.
- Die verbindinglyn tussen die son en die planeet dek gelyke areas in gelyke tye soos wat die planeet in die elliptiese baan beweeg.
- Die verhouding van die omwentelingsperiode van twee planete se kwadraat is gelyk aan die verhouding van die halwe hoofas se derde mag.

Die wentelbane van die komete kan egter ook 'n hiperbool of parabool vorm. Die komete met paraboliese bane gaan eenkeer verby die son, verlaat ons sonnestelsel, en kom nooit weer terug nie. Ons sien voorbeeld van alle tipe kegelsnedes as wentelbane in gravitasieveld. Die bepalende faktore wat die aard van die wentelbaan bepaal is die spoed en massa van die objek in die baan. Indien 'n planeet te stadig verby 'n ster beweeg sal die ster die planeet intrek, maar as die planeet weer te vinnig beweeg sal die planeet in 'n hiperboliese of paraboliese baan verby die ster beweeg. As die rigting en die spoed van die planeet reg gekies word, sal die planeet se baan 'n geslote ellips vorm (Resnikoff & Wells 1973: 338). Die wentelbaan van sommige planete soos Venus se eksentrisiteit is so klein dat dit byna 'n sirkel vorm (Proia & Menghini 1984: 203). Mercurius het aan die ander kant 'n groot eksentrisiteit van ongeveer 0.206. Die aarde se wentelbaan om die son is byna 'n sirkel ('n ellips met eksentrisiteit van

ongeveer 0,0167). As die aarde se spoed met 'n faktor van 1,4 verhoog sou word, dan sou die aarde se wentelbaan van 'n ellips na 'n parabool verander het, en sou die aarde ook die sonnestelsel verlaat het. Dieselfde gedagte geld ook by komete. In 1986 was Haley se komeet van die aarde af sigbaar. Hierdie komeet beweeg in 'n elliptiese baan om die son met 'n eksentrisiteit van 0,967 (Broughton 1986: 87).

5.2.3.3 Tegniese tekene en kuns

In die kurrikulum vir Tegniese Tekene word na 1^{ste} en 3^{de} graadse ortografiese projeksies verwys. Dit handel onder meer oor snydings (ware vorm) van vaste liggeme soos kegels. Hierdie wyse van voorstelling is alreeds in 1525 deur Albrecht gebruik om kegelsnedes in skilderye voor te stel. In 'n poging om driedimensionele voorwerpe realisties op 'n tweedimensionele doek voor te stel het die Renaissance skilders hulle tot meetkunde gewend (Sibley 1998: 226). Dieselfde geld ook vir Tegniese Tekene, volgens Donnarumma (2001: II-2) is dit gegrond op projektiewe meetkunde. Die skilders het na wiskundige verbande gaan soek om diepte in skilderye te kry. Die oorspronklike gedagte van projektiewe meetkunde het dus ontstaan uit die studie van perspektiwiteit in kuns (Bix 1994: 263). Dus sluit die ondersoek na kegelsnedes by tegniese tekene en kuns aan. In Figuur 5-14 is projeksies in tegniese tekene met behulp van GSP (The Geometer's Sketchpad) gekonstrueer. Hierdie konstruksie gee 'n kant-aansig en bo-aansig van die kegelsnede [CD: Tegniese tekene.gsp]. Die gedagte van projeksies in tegniese tekene sluit aan by die projeksie wat in afdeling 4.1 tot 4.4 bespreek is. Die voordeel van 'n dinamiese meetkundesagtewareprogram soos GSP is dat die snylyn ON beweeg kan word en dat die snydingsvlakke ooreenkomstig verander. Die volgende afdeling handel huis oor hierdie dinamiese gebruik van GSP in die konstruering van kegelsnedes.



Figuur 5-14

5.2.4 Integrasie van dinamiese meetkundesagteware

Visualiseringsagtewarepakkette soos The Geometer's Sketchpad, Cabri, Algebra Xpresser, Graphmatica en 3-D Geometry het 'n rykdom van visualiseringsmoontlikhede ontlok. Hierdie sagteware het 'n hernude belangstelling in visualisering ontlont (NCTM 2000a: 25). Die gebruik van 'n program soos The Geometer's Sketchpad kan 'n kragtige instrument in die onderrig en leer van wiskunde wees:

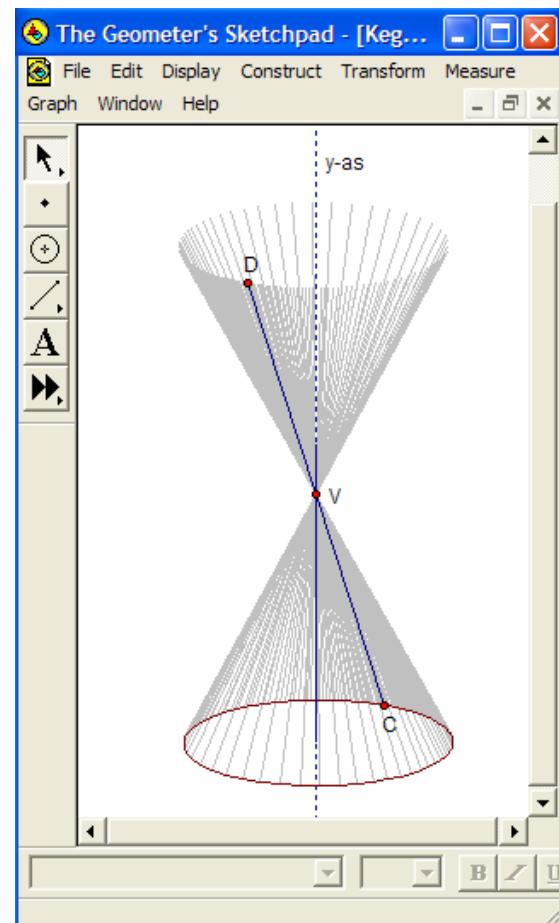
Appropriate uses of technology tools can enhance mathematics learning and teaching, support conceptual development of mathematics, enable mathematics investigations by students and teachers, and influence what mathematics is taught and learned (Wilson 2001).

Russell (1996) waarsku:

There has not been enough discussion linking what occurs inside the student's mind during their sessions in visual environments to cognitive theories in general.

Wat ons volgens Sibley (1998: 59) wel weet is dat visualiseringsagtewarepakkette aandag trek: "Eye-catching pictures and computing prowess easily attract attention". Maar Sibley (1998: 59) waarsku dat visualisering nie noodwendig tot beter verstaan lei as daar nie aandag aan die wiskundekonsepte agter die visuele objekte gegee word nie. Dit is daarom belangrik dat leerders die wiskunde agter visuele konstruksies verstaan of dat leerders hulle wiskundige idees gebruik om konstruksies te skep. Santos-Trigo en Espinosa-Perez (2002: 48-49) waarsku teen die gebruik van tegnologie sonder bestaande kennis oor kegelsnedes:

However, it is clear that for students to observe and identify, in this case, ellipses, hyperolas, etc. it seems necessary to have previous knowledge or experiences regarding these figures.

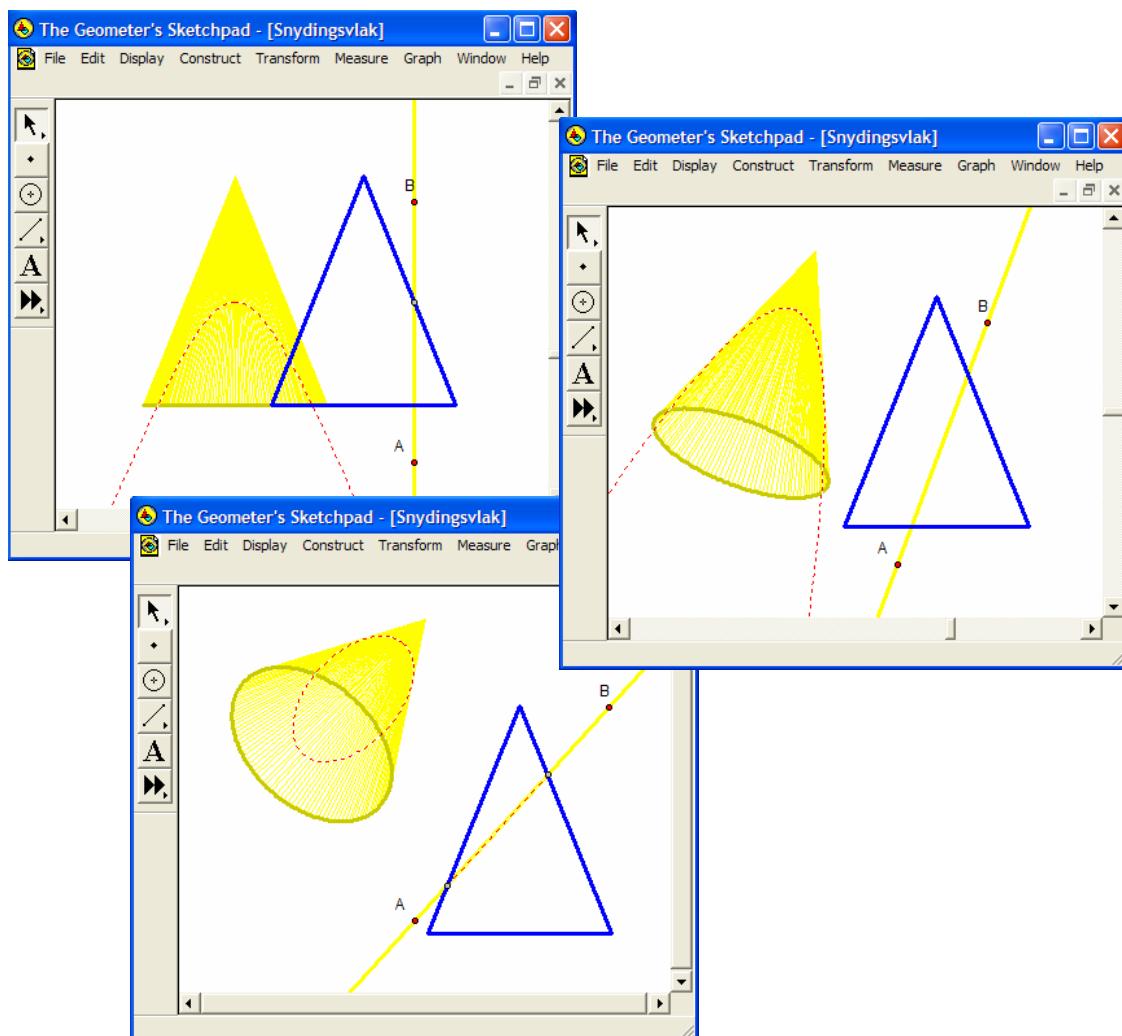


Figuur 5-15

In hierdie studie word GSP4 (Geometer's Sketchpad) gebruik omdat die program maklik is om aan te leer en omdat dit in skole dwarsoor die wêreld gebruik word omdat dit toepaslik, eenvoudig en kragtig is. In hierdie afdeling word die gebruik van GSP in die ondersoek na kegelsnedes aangetoon. Die Geometer's Sketchpad konstruksies in hierdie afdeling is op die wiskundige ondersoeke in hoofstukke 3 en 4 gebaseer (sien Olmstead [1998: 428-434] vir meer konstruksies). Hierdie GSP4 konstruksies is op die ingesluite CD beskikbaar. Die kernelemente van elke konstruksie word kortlik bespreek om sodoende integrasiemoontlikhede uit te lig. Die eerste konstruksie handel oor die definisie van 'n kegel met behulp van 'n kegelgenereerde in afdeling 1.6.3. Hierdie definisie is in Figuur 5-15 gebruik om die kegel te genereer [CD: Kegelsnde.gsp]. So 'n dinamiese

konstruksie gee 'lewe' en betekenis aan 'n definisie en maak die definisie meer verstaanbaar.

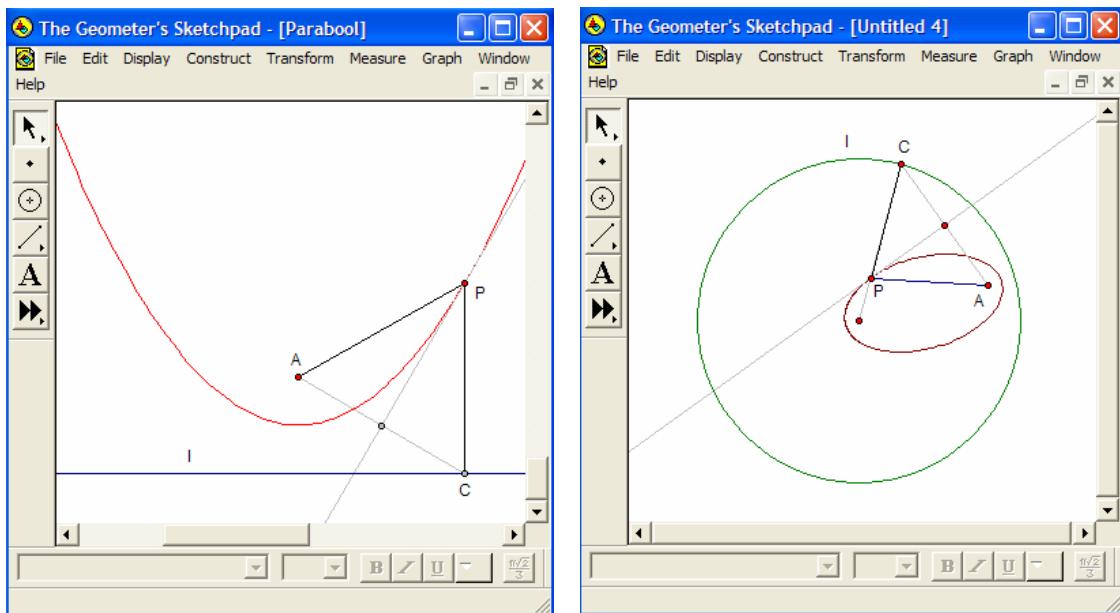
In Figuur 3-2 is een van die kegelsnedes wat deur die snyvlak gegenereer word, aangetoon. Die voordeel van die gebruik van dinamiese meetkundesagteware is dat die snyvlak (of lyn) beweeg kan word om sodoende alle moontlike snydinge te verkry. In Figuur 5-14 (p131) word hierdie kragtige voordeel alreeds aangetoon. 'n Ander kragtige eienskap van GSP is die gebruik van die lokusfunksie en die nasporing van lyne en punte. Hierdie eienskappe is gekombineer om die driedimensionele beeld van die kegelsnede (sien Figuur 5-16) en die ware vorm van die snyvlak AB te konstrueer [CD: Snydingsvlak.gsp].



Figuur 5-16

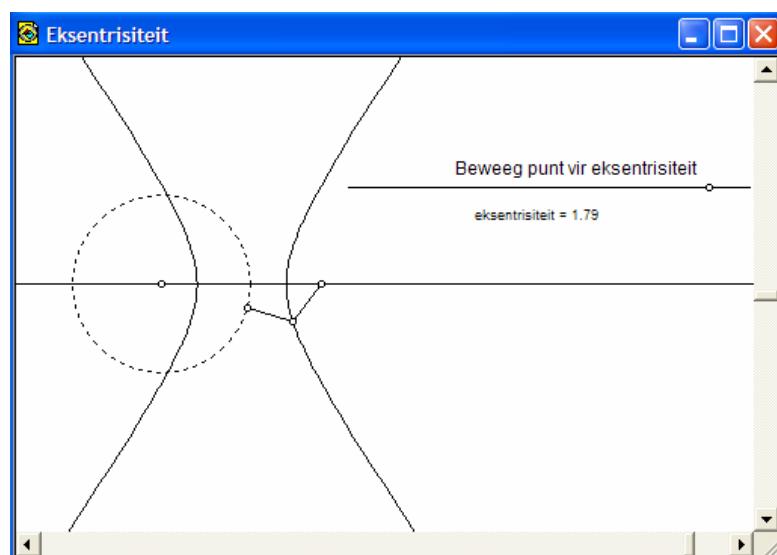
In afdeling 3.4 is aangetoon dat die verskillende tipes kegelsnedes met behulp van 'n lokus gedefinieer kan word. Daar bestaan verskillende wyses waarop die

verskillende tipes kegelsnedes met behulp van lokusse gedefinieer kan word. 'n Parabool kan byvoorbeeld gedefinieer word as die lokus van die punt P wat gelyke afstande van 'n lyn l en 'n punt A is. In Figuur 5-17 (links) is die parabool gekonstrueer deur van 'n middellooddlyn gebruik te maak [CD: Parabool lyn&punt.gsp]. Deur kongruensie kan aangetoon word dat $AP = PC$. Punt A is die fokus en lyn l is die riglyn van die parabool.



Figuur 5-17

Deur van gelyke afstande gebruik te maak kan die hiperbool en ellips ook met behulp van 'n lokus gedefinieer word. In plaas van die gelyke afstand van 'n lyn en punt, soos in die geval van 'n parabool, word gelyke afstande vanaf 'n lyn en sirkel gebruik. Afhangende van waar die punt A in Figuur 5-17 (regs) is, binne of buite die sirkel, sal 'n ellips en hiperbool onderskeidelik gevorm word [CD: Ellips]

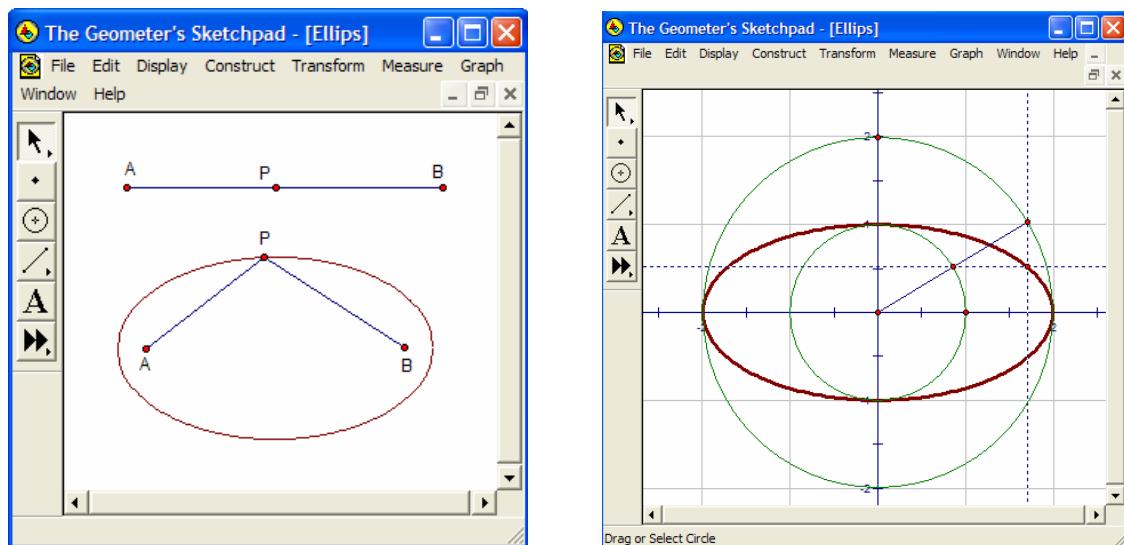


Figuur 5-18

lyn&sirkel.gsp].

Die tipe kegelsnede kan bepaal word deur die eksentrisiteit te bepaal. In afdeling 3.6.3 is die verband tussen die eksentrisiteit en die soort kegelsnede aangetoon. In Figuur 5-18 word die verskillende kegelsnedes met behulp van die eksentrisiteit gekonstrueer.

Kegelsnedes kan ook gekonstrueer word deur die eienskappe wat in afdeling 3.8 aangetoon is en in 3.9.1 gebruik is. Dit kan aangetoon word dat Figuur 5-19 (regs) ook indirek van hierdie eienskappe gebruik maak. In Figuur 5-19 (links) is 'n ellips

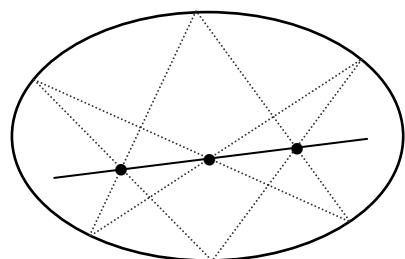


Figuur 5-19

gekonstrueer deur van die feit gebruik te maak dat $AP + PB$ konstant moet wees [CD: Ellips – Afstand.gsp].

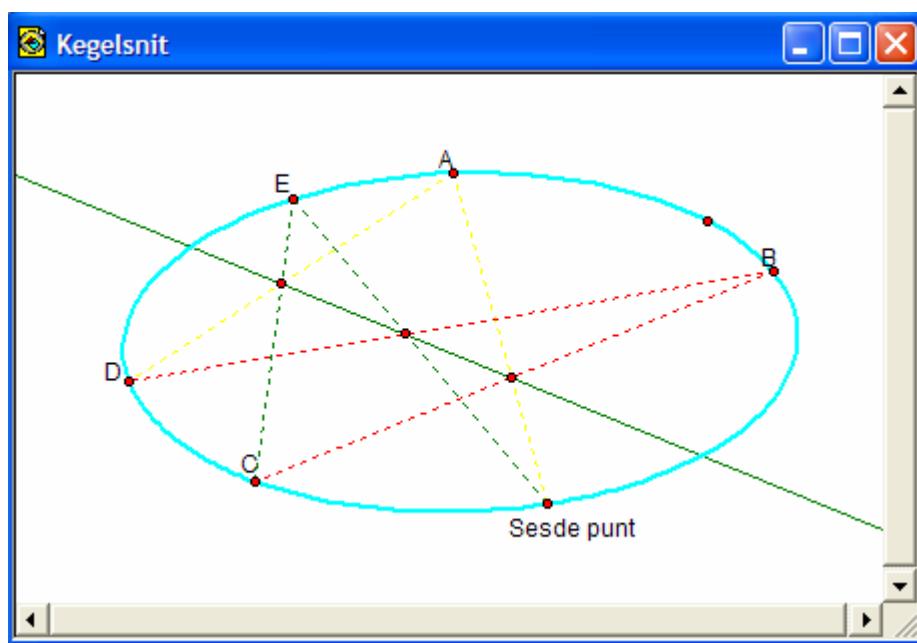
In afdeling 3.9.2 is 'n metode waarop 'n ellips wat in die vorm $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ met behulp van twee sirkels gekonstrueer kan word. Hierdie metode is geskik vir die gebruik van GSP aangesien die punt wat die ellips genereer se lokus bepaal kan word (sien Figuur 5-19 regs).

'n Kegelsnede word uniek bepaal deur vyf punte (Mathews 1995: 206). Dit beteken dat deur elke vyf punte, waarvan enige drie nie-kollineêr is nie, een unieke kegelsnede gekonstrueer kan word. In afdeling 4.7.5 is 'n wyse aangetoon waarop 'n sesde



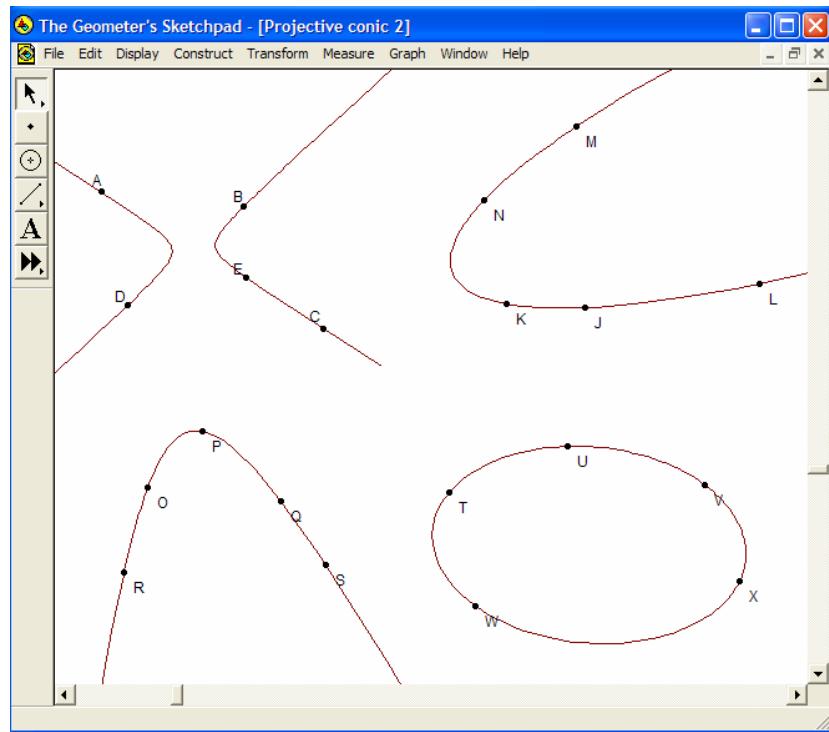
Figuur 5-20

punt van 'n kegelsnede vanaf vyf gegewe punte gekonstrueer kan word. Hierdie konstruksie is op Pascal se stelling gebaseer wat stel dat die ses hoekpunte van 'n heksagoon op 'n kegelsnede is as en slegs as die drie diagonaal punte kollineêr is. Die konstruksie van die sesde punt, soos in Figuur 5-20 en Figuur 5-21, kan met behulp van die dinamiese funksie van GSP gebruik word om die hele kegelsnede te genereer [CD: Kegelsnede – Pascal.gsp].



Figuur 5-21

Indien die vyf punte rond geskuif word, word verskillende soorte kegelsnedes gedefinieer soos wat in Figuur 5-22 aangetoon word.



Figuur 5-22

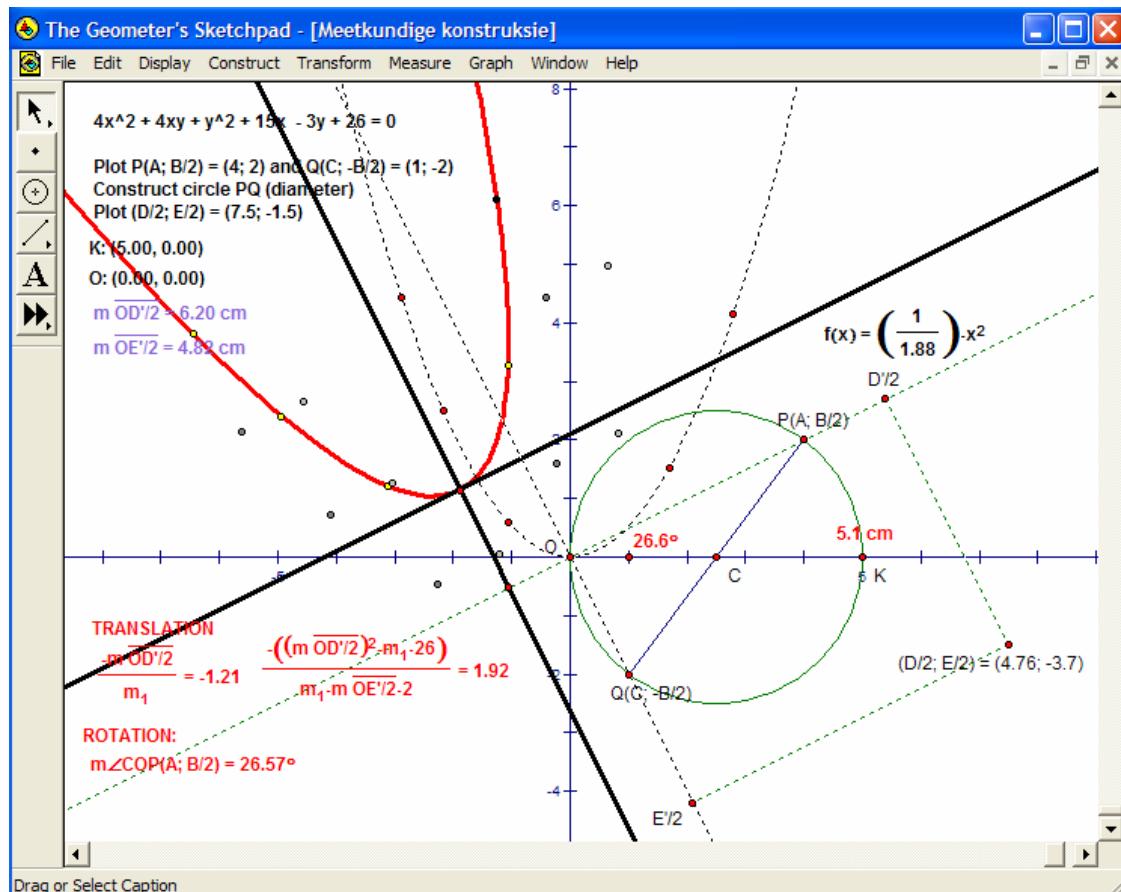
'n Wyse waarop die voordele van integrasie van meetkunde, algebra en dinamiese meetkundesagteware duidelik na vore kom is in die meetkundige metode om 'n kegelsnede vanuit die standaardvergelyking, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, met behulp van Geometer's Sketchpad te konstrueer. Hierdie metode of prosedure is in afdeling 3.9.4 bespreek. Die waarde van hierdie metode is nie net die eenvoudige konstruksiemetode nie, maar veral die wiskundige motivering daarvan. As voorbeeld word die grafiese voorstelling van $4x^2 + 4xy + y^2 + 15x + 26 = 0$ in GSP gedoen [CD: Meetkundige konstruksie.gsp]. Die konstruksie volg uit afdeling 3.9.4 en is soos volg gedoen:

- Konstrueer die punte $(A; B/2) = P(4; 2)$ en $(C; -B/2) = Q(1; -2)$.
- Konstrueer die kegelsirkel met PQ as middellyn en verbind P en Q met die kleinste x -afsnit.
- Lees die x -afsnitte $(0; 5,1)$ en die hoek θ (26.6°) af.
- Die soort kegelsnede volgens Tabel 3-3 is die grafiek 'n parabool.
- Konstrueer \hat{x} -as||MP, \hat{y} -as||MQ en die punt $(D/2; E/2) = (4,76; -3,7)$.
- Projekteer die punt $(4,76; -3,7)$ ortogonaal op die \hat{x} , \hat{y} -assestelsel en lees die koördinate af. In hierdie geval is dit $(6,2; -4,82)$.

Die parabool $x'^2 = \frac{-\hat{E}}{\lambda} y'$ met ander woorde $y = \left(\frac{1}{1.88}\right)x^2$ moet dus eers $26,6^\circ$ roeteer

word en daarna 'n \hat{x} -translasie, $x' = -\hat{D}/2\lambda = -1,21$ en 'n \hat{y} -translasie, $y' = \frac{\left(\frac{\hat{D}}{2}\right)^2 - \lambda F}{\lambda \hat{E}}$

$= 1,92$. Dit sal die voorstelling van die oorspronklike vergelyking $4x^2 + 4xy + y^2 + 15x + 26 = 0$ wees.



Figuur 5-23

Daar bestaan verskillende wyses om kegelsnedes met behulp van GSP te konstrueer. Die gebruik van omhulsels in die konstruering van kegelsnedes is alreeds in afdeling 4.9 bespreek. Die gebruik van kegelsnedes in hul integrerende rol skep talle moontlikhede vir ondersoeke en ontdekingsaktiwiteite met behulp van dinamiese meetkundesagteware. In hierdie ondersoeke is die wissel spel tussen meetkunde en algebra duidelik. Die konstruksies van kegelsnedes met Geometer's Sketchpad gebruik wiskundige beginsels en eienskappe van kegelsnedes. Dus is wiskundige begrip 'n vereiste vir die konstruering van kegelsnedes. Een van die beste

voorbeeld van integrasie is die Geometer's Sketchpad konstruksie in Figuur 3-30. Hierdie konstruksie handel oor meetkunde, algebra en trigonometrie. Selfs 'n rotasie en translasies en ander sirkeleienskappe is gebruik. Dit vereis verder die gebruik van gevorderde skoolalgebra, meetkunde en trigonometrie om te verduidelik waarom die metode werk.

5.3 Die rol van kegelsnedes in Leeruitkomste 2 en 3

In afdeling 5.1.1 is die belangrikheid van die integrasie van Leeruitkomste 2 en 3 aangetoon en afdeling 5.2.2 het oor die rol van kegelsnedes in hierdie integrasie gehandel. Hierdie afdeling fokus op die gebruik van kegelsnedes in die bereiking van Leeruitkomste 2 en 3.

5.3.1.1 Die gebruik van kegelsnedes en Leeruitkoms 2

Leeruitkoms 2 handel oor patronen, funksies (Departement van Onderwys 2002a: 12):

Learners should:

- understand various types of patterns and functions
- use symbolic forms to represent and analyse mathematical situations and structures
- use mathematical models and analyse change in both real and abstract contexts

The mathematical models constructed of the situations may be represented in different ways: in words, as a table of values, as a graph or as a computational procedure (formula or expression).

The additional information we need to generate is mostly of the following five types:

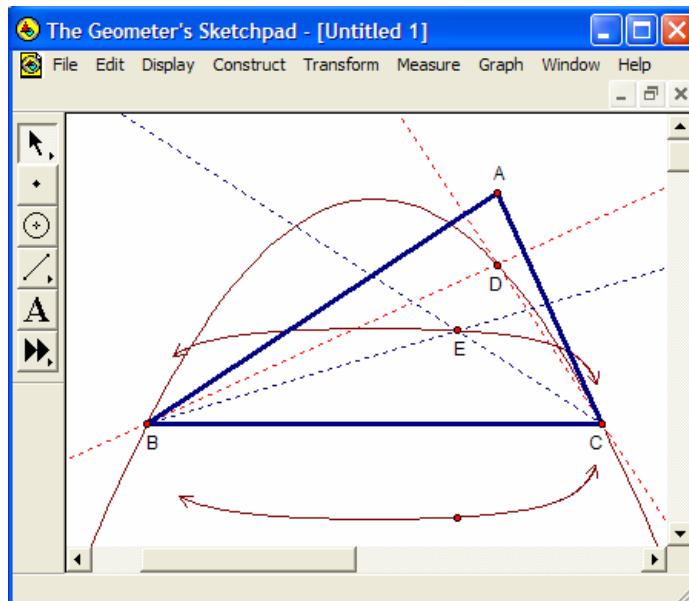
- 1) finding values of the dependent variable (finding function values)
- 2) finding values of the independent variable (solving equations)
- 3) describing and using the behaviour of function values(increasing and decreasing functions, rate of change, gradient, derivative, maxima and minima, periodicity)
- 4) finding a function rule (formula)
- 5) transforming to an equivalent expression ("manipulation" of algebraic expressions)

It is important that the learning programme provides for appropriate experiences of all five problem-types and that it develops the underlying concepts and techniques to enable learners to experience the power of algebra as a tool to solve problems. The emphasis is on the objective of solving problems and not on the mastery of isolated skills (such as factorisation) for their own sake.

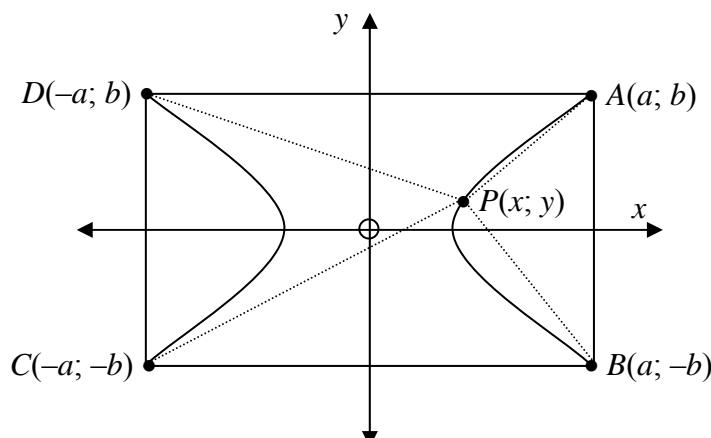
In die lig van hoofstukke 3 en 4 is dit duidelik dat kegelsnedes gebruik kan word in die eerste drie punte van die bogenoemde uitkoms. Die redes hiervoor is dat hoofstuk 3 juis oor patronen en funksies en die algebraïese simboliese vorme van kegelsnedes handel. In hierdie hoofstuk is wiskundige situasies en strukture ondersoek. Afdeling 5.2.3.1 handel oor die wiskundige modellering van realistiese situasies. Kegelsnedes skep verder ook geleenthede om veranderings in abstrakte situasies te analiseer. 'n

Voorbeeld hiervan is die volgende probleem gestel deur Bakst (1966: 28): Gestel ons het 'n gegewe driehoek met vaste basis en oppervlak. (Net die toppunt van die driehoek kan beweeg word.) Dan is die lokus van die snydingspunte van die hoekhalveerders en hoogtelyne onderskeidelik 'n ellips en hiperbool (sien Figuur 5-24) [CD: Snydingspunte.gsp]. Bakst (1966: 28-31) toon dit aan deur slegs van skoolwiskunde gebruik te maak.

'n Ander voorbeeld van 'n abstrakte wiskundige situasie waarin kegelsnedes voorkom is die volgende probleem soos gestel deur professor M de Villiers: Laat $ABCD$ 'n reghoek wees. Bepaal die lokus van die punt P , in die inwendige van $ABCD$ waar $\hat{APB} + \hat{DPC} = 180^\circ$. Die lokus is in hierdie geval 'n hiperbool. Indien die koördinate van die reghoek soos in Figuur 5-25 gekies word, vereenvoudig dit die situasie en is die vergelyking van die hiperbool

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1.$$


Figuur 5-24



Figuur 5-25

Wiskundige modellering waarin kegelsnedes 'n rol speel kom in sowel praktiese as abstrakte of teoretiese situasies voor. Daarom kan Leeruitkoms 2 wat handel oor patronen en funksies met behulp van kegelsnedes bereik word. In afdeling 5.2.1 is ook na verskillende modelleringsmoontlikhede verwys. Die beweging van die planete kan byvoorbeeld met behulp van kegelsnedes gemoduleer word. In afdeling 5.2.1.3 is twee voorbeelde van die wiskundige modellering geïlustreer, naamlik die beweging van 'n kanonkoeël en die paraboliese reflektor. Hierdie wiskundige modelle is op verskillende wyses voorgestel: woorde, grafiek en simboliese uitdrukking. Aktiwiteite wat handel oor soortgelyke konstruksies soos dié in afdeling 3.9.2 en 3.9.3 kan gebruik word in die onderrig en leer van punte 1 tot 5 in die bogenoemde Leeruitkoms.

Die kurrikulum noem in Leeruitkoms 2 differensiasie en optimalisering (Departement van Onderwys 2002a: 25):

We know this when the learner:

- establishing and using the following rules of differentiation:

$$Dx[f(x) \pm g(x)] = Dx[f(x)] \pm Dx[g(x)]$$

$$Dx[k \cdot f(x)] = k \cdot Dx[f(x)]$$

- solving problems involving optimization and rates of change.

Die gebruik van differensiasie in die wiskundige ontwikkeling en praktiese toepassings kom in afdelings 4.9.1 en 5.2.3.1 voor. Dit is waar die vergelyking van die omhulsels bepaal word. Optimalisering is een van die toepassings van integrasie. Optimaliseringsaktiwiteite wat op kegelsnedes gebaseer is, kom in die werk van Scher (2002: 60-66) voor. 'n Optimaliseringsprobleem waar 'n ellips gebruik word is die volgende:

'n Brand moet geblus word deur water met 'n emmer in die rivier te skep. Waar is die beste plek om water in die rivier te gaan haal? Anders gestel moet $PR + RV$ geoptimaliseer word deur dit so klein moontlik te maak (sien Figuur 5-26).

As $PR + RV = k$, waar k 'n konstante is, lewer dit 'n ellips met P en V as brandpunte. Indien k so gekies word dat die gekonstrueerde ellips aan die rivier raak sal die raakpunt die punt wees wat die minimum afstand lewer.

5.3.1.2 Die gebruik van kegelsnedes in Leeruitkoms 3

Leeruitkoms 3 handel oor vorm, ruimte en meting (Departement van Onderwys 2002a: 13):

The learner is able to describe, represent, analyse and explain properties of shapes in 2- and 3-dimensional space with justification.

The teaching and learning of Shape, Space and Measurement in the FET Band must build on experiences from the GET Band to make more formal and extended levels of knowledge accessible. Aspects that are important to the attainment of this Learning Outcome include location, visualisation and transformation. Learners' previous knowledge becomes deeper, they engage with new tools that can be used in a range of applications, and they become more proficient in processes leading to proof.

The study of Shape, Space and Measurement enables the learner to:

- explore relationships, make and test conjectures and solve problems involving geometric figures and geometric solids
- investigate geometric properties of 2- and 3- dimensional figures in order to establish, justify and prove conjectures
- link algebraic and geometric concepts through analytic geometry
- link the use of trigonometric relationships and geometric properties to solve problems
- use construction and measurement or dynamic geometry software for exploration and conjecture
- analyse natural forms, cultural products and processes as representations of shape and space
- investigate the contested nature of geometry throughout history and develop an awareness of other geometries
- use synthetic, transformation or other geometric methods to establish geometric properties

- connect Shape, Space and Measurement to other Learning Outcomes within Mathematics and where possible to other subjects

Kegelsnedes is 'n kragtige wyse waarop die tussenspel tussen twee- en driedimensionele figure geïllustreer word. Die feit dat die oorsprong van die kegelsnedes meetkundig van aard is, en dat dit gevisualiseer kan word sonder die gebruik van algebraïese notasie en simbole maak dit 'n gesikte onderrigtema vir Leeruitkoms 3.

Die gebruik van kegelsnedes in die integrering van algebraïese en meetkundige konsepte deur van analitiese meetkunde gebruik te maak is in afdeling 3.4 aangetoon. In die bepaling van die algemene vergelyking van kegelsnedes in Stellings 3.1 tot 3.3, is gebruik gemaak van analitiese meetkunde. In afdeling 4.6.1 is koördinate vir die projektiwe vlak bepaal en met behulp van hierdie koördinaatvlak is die vergelyking van die kegelsnedes bepaal. Die gebruik van algebra, meetkunde, analitiese meetkunde en trigonometrie kan nie geskei word nie. In afdeling 3.6.3 is trigonometrie byvoorbeeld gebruik om die eksentrisiteit uit die meetkundige beskrywing te bepaal. Die gebruik van trigonometriese verwantskappe kom ook in die toepassings van kegelsnedes in afdeling 5.2.3.1 voor. Meer nog, die trigonometriese verwantskappe is afkomstig van sirkels en word gebaseer op gelykvormigheid, terwyl gelykvormigheid 'n tema van skadumeetkunde is.

In Leeruitkoms 3 word verwys na transformasies. Transformasies speel 'n belangrike rol in die vereenvoudiging van die algemene vergelyking van die verskillende kegelsnedes (sien afdeling 3.7). Deur die gebruik van rotasie en translasie is die algemene vergelyking, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, van die kegelsnede vereenvoudig tot $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ in die geval van 'n ellips en hiperbool en $y^2 = 4dx$ by 'n parabool. In Figuur 5-23 is ook van translasies en 'n rotasie gebruik gemaak om die kegelsnede meetkundig met behulp van 'n kegelsirkel te konstrueer. Die kurrikulum verwys ook na 'n nie-Euklidiese transformasie:

Stretches can be looked at as an extension in transformation geometry. The use of stretches in establishing the equation of the ellipse from the circle is an example of a useful application (Departement van Onderwys 2002a: 46).

Interessante verwantskappe en eienskappe van kegelsnedes is in afdeling 3.8 en 4.7 aangetoon en dié eienskappe is gebruik in die praktiese toepassings in afdeling 5.2.1. Hierdie eienskappe is in hoofstuk 3 wiskundig bewys en die verwantskappe in

hoofstuk 4 is deurgaans verduidelik. Die gebruik van kegelsnedes skep dus talle geleenthede vir ontdekking, ondersoeke en die oplos van probleme.

Kegelsnedes speel 'n belangrike rol in die historiese ontwikkeling van wiskunde. Hierdie rol is alreeds in afdeling 3.1 en 4.1 aangetoon. Die geskiedenis van perspektiwiteit in skilderye skep die geleentheid vir die onderrig en leer van nie-Euklidiese meetkunde. In hierdie geskiedenis kom die idee van 'n soort meetkunde waarin hoeke, afstande en verhoudings nie behoue bly nie, na vore. Ondersoeke met skaduwees lei tot die ontdekking dat 'n kegelsnede se skadu steeds 'n kegelsnede bly. Die implikasie hiervan is dus dat kegelsnedes sonder die gebruik van hoeke, afstande en verhoudings beskryf kan word. In afdeling 4.8 is die belangrike rol van kegelsnedes in die definiëring van ander tipes meetkunde aangedui. Ander tipes nie-Euklidiese meetkunde waarvan die kurrikulum melding maak is Taxicab meetkunde. In twee afsonderlike artikels het Prevost (1998: 304-307) en Natsoulas (1989: 39-47) ontdekingsaktiwiteite, wat handel oor kegelsnedes, gepubliseer.

5.4 Onderrig van kegelsnedes

Die volgende stap in die navorsingsproses is die ontwikkeling van 'n reeks aktiwiteite wat gebruik kan word in onderrig en leer. Hierdie proses sal die navorsing wat tot op hierdie stadium in hoofstukke 2 tot 5 gedoen is, saambind tot 'n logiese geheel vanuit 'n onderrigperspektief. Cobb (2000: 316) glo dat hierdie aktiwiteite, en die volgorde daarvan, deur die leerdoelstellings, die beplande leerproses en die wyse waarop die onderwyser glo dit sal ontwikkel bepaal word:

In M. Simon's (1995) terms, this first step involves the formulation of a hypothetical learning trajectory that is made up of three components: learning goals for students, planned learning or instructional activities, and a conjectured learning process in which the teacher anticipates how students' thinking and understanding might evolve when the learning activities are enacted in the classroom.

Die reeks aktiwiteite wat ontwikkel moet word, moet gebaseer word op die beginsels wat in hoofstuk 2 na vore gekom het:

- Die onderrig moet aansluit by die leerder se reeds bestaande kennis en moet sover moontlik deur die leerders gevisualiseer word.
- Die onderrigaktiwiteite moet 'n geïntegreerde eenheid wees.
- Probleemgesentreerde onderrig moet gevolg word.
- Geïntegreerde onderrig moet nagestreef word.

Hierdie psigologiese en pedagogiese beginsels is belangrik maar nie voldoende om die onderrigaktiwiteite en die volgorde daarvan in detail uit te spel nie. Vir meer detail kan die historiese ontwikkeling van kegelsnedes ondersoek word. Kieran (1992: 413) het bevind dat die histories-kenteoretiese perspektief van algebra dit meer verstaanbaar en betekenisvol vir die leerders maak. Volgens Harper (1987: 85) se bevindings is die rede hiervoor dat algebraïese konseptuele ontwikkeling op dieselfde wyse plaasvind as waarin algebra histories ontwikkel het. Poincaré, Branford en Polya beveel daarom aan dat die inhoud van wiskunde in dieselfde volgorde as waarin dit oorspronklik histories ontwikkel het, aan die leerders bekend gestel moet word. Die leerders moet volgens Polya tydens die onderrig hierdie groot stappe van die wiskundiges herontdek. Harper (1987: 85) sluit hierby aan: "...the sequencing of conceptual acquisition appears to parallel that which is to be detected through a study of history of mathematics". Hy kom dan ook tot die volgende gevolg trekking:

Here the study suggest that across all topic areas in mathematics there is a rich and potentially profitable field of research and guidance upon curriculum sequencing might be sought through an historical analysis of its development.

Die kritieke aspekte wat uit die historiese ontwikkeling na vore kom is:

- Euklidiese benadering tot kegelsnedes gaan die projektiewe benadering vooraf.
- Die gebruik van 'n koördinaatvlak kom eers nadat die basiese konsepte oor kegelsnedes ontwikkel is.
- Die Griekes het aanvanklik 'n enkel kegelsnede gebruik. Apollonius het eers later 'n dubbelkegelsnede gebruik om die hiperbool, parabool en ellips te definieer.

Empiriese navorsing wat deur die jare gedoen is, kan ook as bron van inligting dien. Cobb (2000: 317) motiveer dit soos volg:

What is required is an *instructional theory*, however tentative and provisional, that gives rise to conjectures about possible means of supporting students' reorganization of their mathematical activity. A theory of this type embodies positive heuristics for the process of supporting students' development that have emerged in the course of prior teaching experiments conducted by both a particular research group and the research community more generally.

So 'n teorie wat homself al bewys het, is dié van die RME (realistic mathematics education) wat deur die Freudenthal Instituut in Nederland ontwikkel is en ook in die VSA gebruik word. Die eerste vereiste van die RME handel oor die aansluiting by die leerders se voorkennis.

Die beginpunt van die reeks van onderrigaktiwiteite moet 'n eksperimentele werklikheid vir die leerders wees en dit moet van so aard wees dat die leerders persoonlik, onmiddellik, direk, betekenisvol en wiskundig daarby betrokke kan raak.

Cobb (2000: 318) verduidelik die woord 'eksperimentele werklikheid':

As a point of clarification, it should be stressed that the term *experientially real* means only that the starting points should be experienced as real by the students, not that they have to involve realistic situations. Thus, arithmetic tasks presented by using conventional notation might be experientially real for students for whom the whole numbers are mathematical objects. In general, conjectures about the possible nature of students' experiential realities are derived from psychological analyses.

Die eerste vereiste handel oor die voorkennis, maar is baie spesifieker oor die beginpunt van die onderrig. Aangesien die RME se eerste vereiste vir alle leerders gelyktydig in 'n klas geld, sal die eksperimentele werklikheid waarmee begin word eenvoudiger van aard moet wees.

'n Tweede vereiste van die RME is:

Die beginpunt moet geregverdig kan word in terme van die potensiële eindpunt van die reeks van onderrigaktiwiteite (Cobb 2000: 318).

Hierdie is seker die moeilikste, maar ook die belangrikste vereiste om aan te voldoen. Cobb (2000: 318) verduidelik dat hierdie beginsel konsistent is met empiriese evaluasies wat die belangrike rol van analogieë, metafore, prototipes en intuïsie beklemtoon:

This implies that students' initially informal mathematical activity should constitute a basis from which they can abstract and construct increasingly sophisticated mathematical conceptions as they participate in classroom mathematical practices. At the same time, the situations that serve as starting points should continue to function as paradigm cases that involve rich imagery and thus anchor students' increasingly abstract mathematical activity.

'n Logiese opbou van idees soos in hoofstukke 3 en 4 help om die logiese rol van die beginpunt in terme van die eindpunt te bepaal. In die bewys en volgorde van stellings kan byvoorbeeld die kerngedagte waarop aktiwiteite berus bepaal word. Hiermee word nie bedoel dat die onderrigaktiwiteit wiskundig logies saamgestel word nie. Die wyse en volgorde waarop leer plaasvind is die bepalende faktor vir die volgorde van die aktiwiteite. Die derde vereiste van die RME handel oor die ontwikkeling van simboliese modelle:

Die reeks onderrigaktiwiteite moet ook aktiwiteite bevat waarin leerders simboliese modelle skep en ontwikkel uit informele wiskundige aktiwiteite.

In hoofstukke 3 en 4 is kegelsnedes wiskundig benader, dit is nie noodwendig die volgorde waarop die aktiwiteite saamgestel moet word nie. Dit kan eerder as die

eindresultaat van die onderrigaktiwiteite gesien word. Die waarde van hierdie wiskundig-logiese samestelling lê onder ander in die feit dat die begin en eindpunt van die onderrigaktiwiteite daaruit bepaal kan word. Daar is verskillende wyses waarop kegelsnedes gedefinieer kan word. Die vraag is watter definisie die beste in die onderrig gebruik kan word. Uit hoofstukke 3 en 4 is dit duidelik dat daar verskillende wyses bestaan waarop kegelsnedes gedefinieer kan word:

- a) 'n Ellips is die kromme wat verkry word as 'n kegel so gesny word dat die inklinasiehoek van die snyvlak, β , en die die semi-vertikale hoek, θ , sodanig is dat $\beta < 90^\circ - \theta$.
- b) 'n Ellips is die lokus van 'n punt P wat nader aan 'n vaste punt as 'n vaste lyn af is.
- c) 'n Ellips is die nie-gedegenereerde kromme waarvan die standaarvergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ met $B^2 - 4AC < 0$.
- d) 'n Ellips is die kromme waarvan die standaardvergelyking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is, as die xy -koördinaat stelsel reg gekies word.
- e) 'n Ellips is die vlak kromme waarvan vir enige punt op die kromme die som van die afstande vanaf twee punte konstant is.
- f) 'n Ellips is die kromme wat verkry word as 'n flits teen 'n sekere hoek teen 'n plat oppervlakte lig.

Die logiese verband tussen definisies a), b), c), d) en e) is in hoofstuk 3 aangetoon. Daar bestaan wyses waarop meetkundig aangetoon kan word dat definisies b) en d) direk uit definisie a) volg (Atkinson 1987: 183-184). Net so het DeTemple (1990: 191-192) meetkundig aangetoon dat definisie d) direk uit a) volg deur van gelykvormigheid gebruik te maak. In afdeling 4.4 is die verband tussen f) en a) aangedui. Dieselfde geld ook vir hiperbole en parabole. Definisies a), b), c) en f) stel al drie kegelsnedes deur middel van een sentrale gedagte voor. Daarom glo Viertel (1969: 13) dat dit as vertrekpunt moet dien:

It seems unfortunate to this writer that most, if not all, modern textbooks give three different definitions for the ellipse, parabola, and hyperbole, whereas a single definition would be historically, aesthetically, and pedagogically sounder.

As gevolg van die eenvoud van definisies a) en b), maar ook die krag daarvan, kan dit as vertrekpunt dien van 'n reeks onderrigaktiwiteite.

Die eindpunt van so 'n geïntegreerde onderrig kan wees dat die leerders op verskillende wyses die eenheid van kegelsnedes verstaan en kan gebruik om probleme in die praktyk op te los. In hierdie pad, van vertrekpunt na eindpunt, moet Leeruitkomste 2 en 3 van die kurrikulum bereik word. Verder moet die pad van die begin na die eindpunt 'n reeks onderrigaktiwiteite moontlik maak waarin leerders simboliese modelle skep en ontwikkel uit informele wiskundige aktiwiteite. Uit hoofstukke 3 en 4 is dit duidelik dat die definiëring van kegelsnedes in terme van 'n lyn en 'n punt 'n beginpunt is wat aan bogenoemde vereiste voldoen. Die rede is eerstens dat hierdie definisie kragtig genoeg was om die algemene kwadratiese vergelyking, wat alle kegelsnedes voorstel, te bepaal. Hieruit is die ander wyses waarop kegelsnedes gedefinieer kan word, bepaal. Verder is die verskillende kegelsnedes met behulp van translasies en 'n rotasie vereenvoudig. Ander redes waarom hierdie definisie as vertrekpunt geneem word, is omdat eienskappe van kegelsnedes en die toepassings daarvan vanuit hierdie definisie ondersoek kan word. Die Freudenthal Instituut gebruik in hulle benadering twee verskillende definisies as vertrekpunt, naamlik gelyke afstande tussen 'n lyn en punt, en gelyke afstande tussen 'n punt en sirkel soos geïllustreer in Figuur 5-17 (Freudenthal Instituut 1998: 25-33). Die nadeel van hierdie vertrekpunt is dat twee verskillende definisies gebruik word en dat die verband tussen hierdie definisies en die snitte in 'n kegel nie direk volg nie. Die bepaling van die meer algemene kwadratiese vergelyking van kegelsnedes volg ook nie direk uit hierdie definisie nie.

5.4.1.1 Vertrekpunt

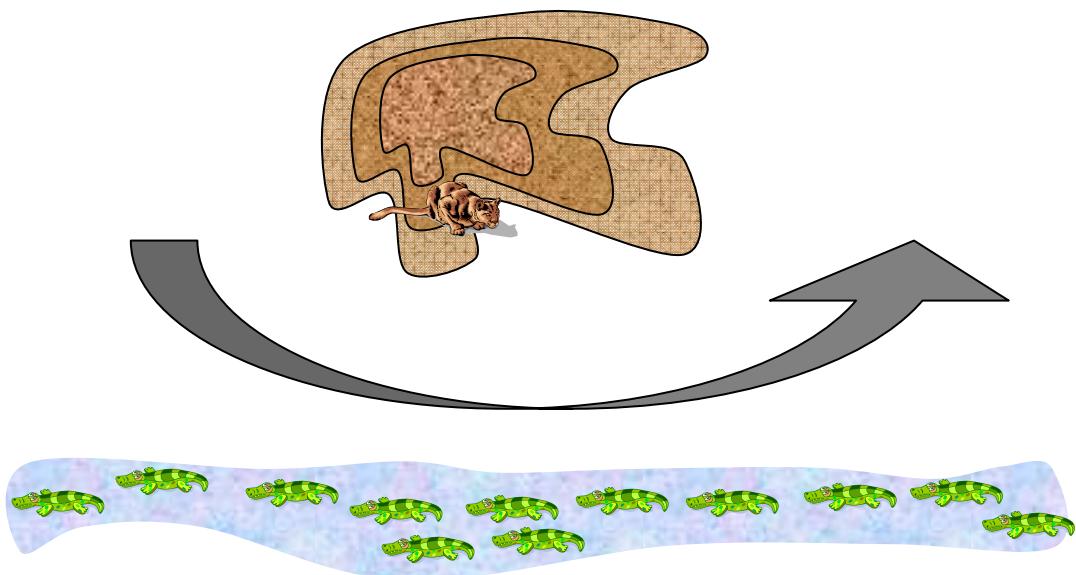
Die aktiwiteite en toepassings moet op die leerders se potensiaalvlak wees en op hulle bestaande kennis bou. Dit mag dalk met die eerste oogopslag lyk of die wiskunde in hoofstukke 3, 4 en 5 te moeilik mag wees vir leerders. In die verband merk Viertel (1969: 13) dat:

There seems to be no good reason for taking what could be regarded as enormous liberties with the original notion of the conic sections. It is argued that the unified treatment is too difficult for the students concerned? This writer holds that it is not. The algebra involved in deriving the equations of the ellipses and hyperbola, starting with a focus, a directrix, and an eccentricity, is (if anything) easier than that involved in deriving them from the other definitions.

In die tradisionele kurrikulumbenadering word leerders se vermoë om te ontdek en wiskunde te doen onderskat. Dit is belangrik dat leerders die geleentheid gegun word om moeiliker probleme op te los. Aan die ander kant is dit moontlik om die aktiwiteite

so te skep dat alle leerders gestimuleer word maar ook sukses kan behaal. Hierdie afdeling handel oor die vertrekpunt van die reeks onderrigaktiwiteite wat van so aard moet wees dat die leerders persoonlik, onmiddellik, direk, betekenisvol en wiskundig daarby betrokke kan raak. Daar is alreeds in die vorige afdeling gemotiveer waarom die vertrekpunt die definisie van die kegelsnedes in terme van 'n lyn en punt moet wees. Om dit te vereenvoudig sodat alle leerders sonder formele voorkennis daarby betrokke kan raak kan die aktiwiteit soos volg saamgestel word (Stols 2002:18):

Aktiwiteit 1a) Daar is leeu en krokodille op 'n wildplaas. Die figuur toon 'n lugvoorstelling van die rivier met die krokodille en die berg met die leeu.



Indien jy van die een kant na die ander kant wil stap en jy wil altyd net sover van die krokodille as van die leeu af wees omdat jy ewe bang is vir hulle, watter roete sal jy loop? Dis dalk beter om die situasie te illustreer deur 'n model waarin die leeu voorgestel word deur 'n punt en die rivier met krokodille deur 'n lyn.

• Leeu

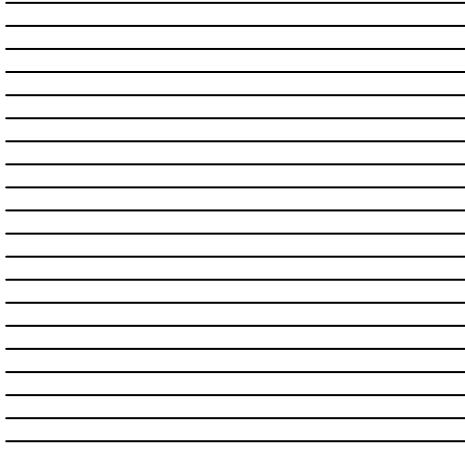
Rivier

Aktiwiteit 1b): Gestel die persoon is banger vir die leeu as vir die krokodille en wil altyd twee keer verder van die leeu as die krokodille af wees, hoe sal die pad nou lyk. Bepaal nog 'n roete aan die anderkant van die rivier wat aan dieselfde vereistes voldoen.

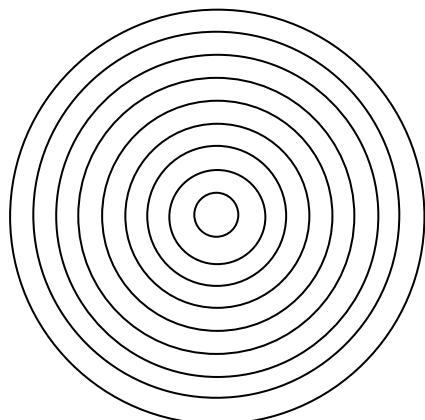
Aktiwiteit1c): Gestel die persoon is banger vir die krokodille as vir die leeu en wil altyd twee keer verder van die krokodille as van die leeu af wees, hoe sal die pad nou lyk. Wat se soort grafiek word in elke geval gevorm?

Aktiwiteit 2): Doen die Aktiwiteite 1a) tot c) deur van die meegaande A4-transparante gebruik te maak (Miller 1970: 657-659). Probeer om die lokus meer akkuraat te bepaal.

Alle lyne is 1 cm van mekaar af.

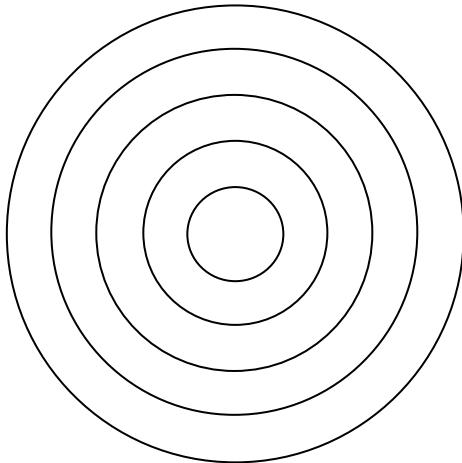


Die verskil in die konsentriese sirkels se radiusse 1 cm.



Alle lyne is 2 cm van mekaar af.

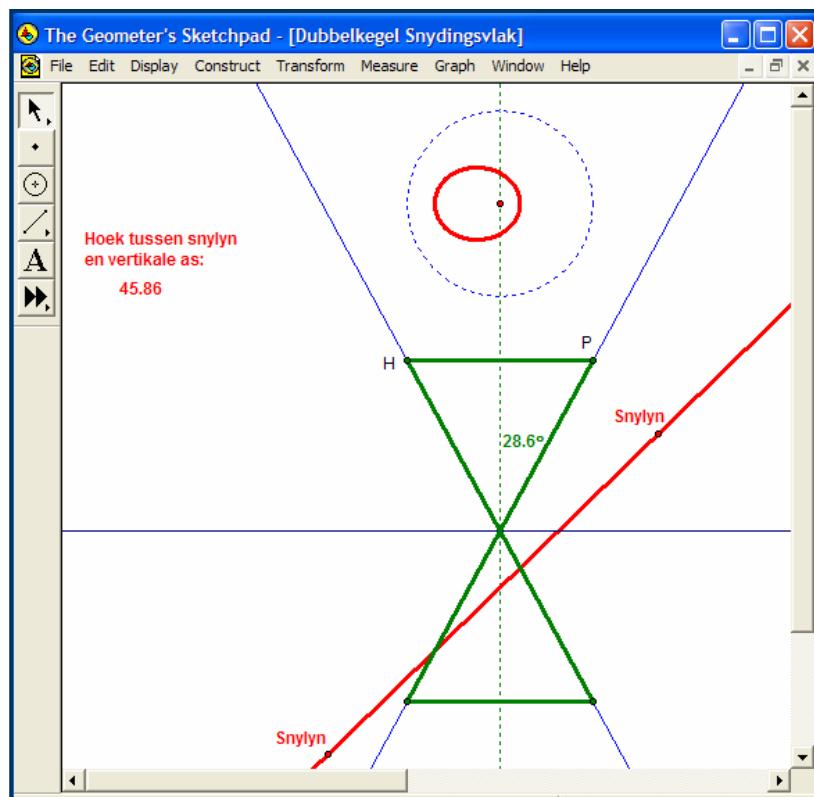
Die verskil in die konsentriese sirkels se radiusse 2 cm.



In plaas van transparante kan kegel-grafiekpapier gebruik word. Rose (1974: 604) beskryf hierdie papier in 'n artikel wat handel oor eenvoudige wyses om kegelsnedes te konstrueer.

Aktiwiteit 3a): Vorm 'n kegel uit klei. Watter tipe randfigure kan met behulp van snedes verkry word?

Aktiwiteit 3b): Gebruik die volgende GSP konstruksie (sien Figuur 5-27) om 'n hiperbool, parabool en ellips in terme van die hoek van die snydingsvlak te definieer [CD: Dubbelkegel snydingsvlak.gsp]. Noem voorbeelde waar jy al parabole, hiperbole en ellipse gesien het. Soek in tydskrifte of bring fisiese voorbeeldes klas toe.

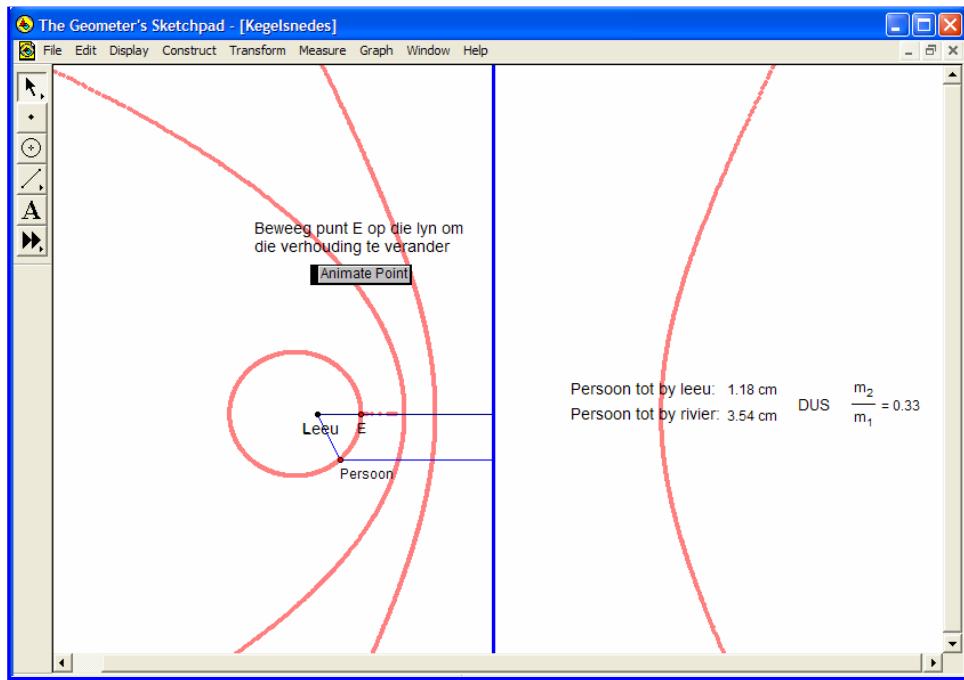


Figuur 5-27

Aktiwiteit 4): Gebruik die volgende GSP konstruksie om 'n hiperbool, parabool en ellips te definieer [CD: Kegelsnedes – lyn&punt.gsp]. Om die posisie van punt P te verander moet die punt E geskuif word. Die verhouding $\frac{\text{Persoon tot leeu}}{\text{Persoon tot rivier}}$ staan as die eksentrisiteit bekend en word met die letter e voorgestel.

Voltooi die volgende tabel:

Kegelsnede s	Eksentrisiteit	Hoek β van snyvlak
Parabool		
Hiperbool		
Ellips		



Figuur 5-28

Aktiwiteit 5): Gee transparante soos in Aktiwiteit 2, maar met 'n fyner patroon sodat die Moiré-patrone duidelik sigbaar is as dit op mekaar geplaas word. Watter grafiese vorm hierdie patronen? Wys voorbeeld van materiaal wat hierdie patronen vorm. Wat is die verband tussen hierdie Moiré-patrone en aktiwiteite 1 en 2.

Hierdie vertrekpunt (aktiwiteite) is van so aard dat leerders persoonlik, onmiddellik, direk, betekenisvol en wiskundig daarby betrokke kan raak. Die vertrekpunt kan ook in terme van die eindpunt verantwoord word. Dit is die algebraïese vereniging van verskillende benaderings tot kegelsnedes en die toepassing daarvan op probleme in die praktyk.

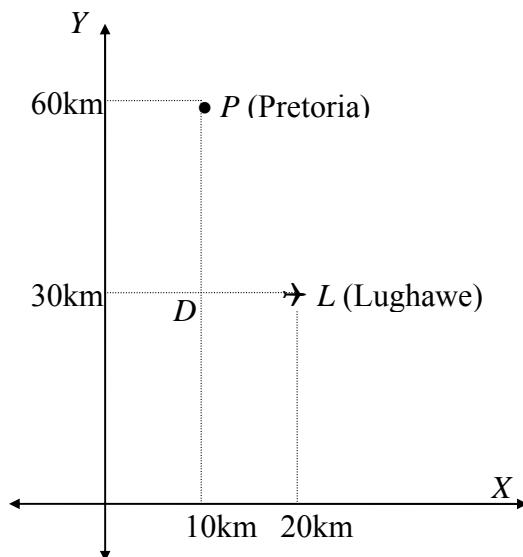
5.4.1.2 Simboliseringsaktiwiteite

Die derde onderrigbeginsel wat die RME stel is dat die reeks onderrigaktiwiteite leerders die geleentheid gee om simboliese modelle uit informele wiskundige aktiwiteite te skep en te ontwikkel. Hierdie modelleringsaktiwiteit sluit volgens Cobb (2000: 319) 'n wye verskeidenheid van aktiwiteite in:

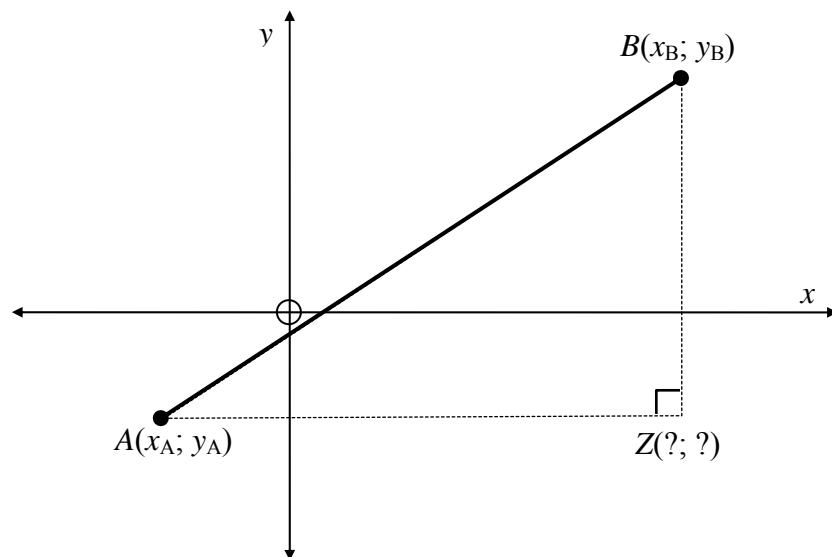
This modeling activity might entail making drawings, diagrams, or tables, or it could entail developing informal notations or using conventional mathematical notations

Die volgende aktiwiteit toon 'n wyse waarop meetkunde en algebra in analitiese meetkunde gebruik word om die kegelsnedes in terme van wiskundige simbole uit te druk.

Aktiwiteit: Bepaal die afstand tussen Pretoria en die lughawe.



Dit was nou een spesifieke geval. Bereken nou die afstand tussen twee punte $A(x_A; y_A)$ en $B(x_B; y_B)$ in terme van x_A , y_A , x_B en y_B . Die lyn AB is nie noodwendig vertikaal of horisontaal nie.



Voltooi: Die afstand tussen enige twee punte $A(x_A; y_A)$ en $B(x_B; y_B)$ kan bepaal word deur die formule $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Dit staan as die afstandsformule bekend.

Hierdie formule kan gebruik word om die vergelyking van sekere lokusse te bepaal.

- a) Toon aan dat $x^2 - 6x + 4y + 21 = 0$ die vergelyking van die lokus van die punt $P(x; y)$ as P gelyke afstande vanaf die punt $A(3; -4)$ en die reguitlyn $y = -2$ is. Wat se soort grafiek is dit? Teken die grafiek op 'n assestelsel met behulp van 'n tabel en toon aan dat drie van die punte op die grafiek wel gelyke afstande vanaf $A(3; -4)$ en die reguitlyn $y = -2$ is.
- b) Toon aan dat $3y^2 + 8y - x^2 + 6x - 9 = 0$ die vergelyking van die lokus van die punt $P(x; y)$ as P twee keer die afstand van die punt $A(3; -4)$ as van die lyn $y = -2$ is. Watter soort grafiek is dit?
- c) Toon aan dat $4x^2 - 24x + 3y^2 + 28y + 36 = 0$ die vergelyking van die lokus van die punt $P(x; y)$ as P twee keer die afstand van die punt $A(3; -4)$ as van die lyn $y = -2$ is. Watter soort grafiek is dit?

5.5 Samevatting

Die kurrikulum noem vier vorme van integrasie. Die gedagte wat die sterkste na vore kom is die integrering van *wiskunde en die leefwêreld* deur middel van probleemoplossing. Laasgenoemde word as die sterkste vorm gesien omdat dit in die kurrikulum se definisie van wiskunde ingebou is. 'n Direkte gevolg van hierdie definisie is die feit dat die sentrale doelstelling van wiskunde in graad 10 tot 12 die daarstelling van 'n geloofwaardige verwantskap tussen wiskunde as 'n dissipline en die toepassing van wiskunde in die konteks van ons leefwêreld is (Departement van Onderwys 2002a: 9). 'n Wesenlike gevraar indien daar net op hierdie vorm van integrasie gefokus word, is dat individuele onderwerpe nie gesien word as iets wat deel is van 'n groter geheel nie. Cuoco (2001: 169) verduidelik die gevraar hieraan verbonde:

..., because individual topics are not recognized as things that fit into a larger landscape, the emphasis on a topic may end up being on some low-level application instead of on the mathematically important connections it makes.

Daarom is die ander vorme van integrasie net so belangrik. Ander vorme van integrasie is dié van *wiskunde met ander vakke*, en die gebruik van *meetkunde (Leeruitkoms 3) in die res van die kurrikulum*. 'n Opsionele vorm van integrasie waarna die kurrikulum ook verwys is die gebruik van *dinamiese meetkundersagteware*. In afdeling 5.2 is aangetoon dat kegelsnedes as integrerende faktor in al vier vorme van integrasie gebruik kan word.

Die kurrikulum verwys op verskillende plekke na kegelsnedes. Die wiskundige ontwikkeling in hoofstukke 3 en 4 sowel as die toepassings van kegelsnedes in afdelings 5.2.1 en 5.2.3 toon dat kegelsnedes geskik is om leeruitkomste 2 en 3 te bereik. Kegelsnedes gee aanleiding tot aktiwiteite wat aan die drie beginsels van die RME voldoen. Die gebruik van kegelsnedes skep die geleentheid vir 'n dieper, relevante, konseptueel ryk, probleemgesentreerde en geïntegreerde onderrig-leersituasie.

Hoofstuk 6: Samevatting en gevolgtrekking

Kennis en vaardighede wat vandag vir ons belangrik is, is nie noodwendig die kennis wat ons in die toekoms gaan help nie. Tegnologiese ontwikkeling het byvoorbeeld tot gevolg gehad dat akkurate optellings- en berekeningsvaardighede nie meer vandag belangrik is nie. Net so sal sekere kennis en vaardighede wat vandag essensieel is nie in die toekoms belangrik wees nie:

Thinking about the future is risky business. Past experience tells us that today's first graders will graduate high school most likely facing problems that do not yet exist. Given the uncertain needs of the next generation of high school graduates, how do we decide what mathematics to teach? Should it be graph theory or solid geometry? Analytic geometry or fractal geometry? Modeling with algebra or modeling with spreadsheets? These are the wrong questions, and designing the new curriculum around answers to them is a bad idea (Cuoco, Goldenberg & Mark 1996: 375).

Die vraag is hoe wiskunde onderrig moet word om leerders vir die toekoms voor te berei? Hierdie voorbereiding van leerders vir vandag en die toekoms is 'n kerndoelstelling van die kurrikulum. Kritiese en kreatiewe denke word gesien as basiese vaardighede wat benodig word in die 21ste eeu:

These skills are necessary for people to have in our rapidly changing, technologically oriented world (Cotton 1991).

In hoofstuk 1 is aangetoon dat 'n klein persentasie van die huidige leerders daarin slaag om eksamentype vrae, wat kritiese en kreatiewe denke vereis, op te los. Hierdie probleem kan aangespreek word deur die kurrikulum te verander sodat dit fokus op die ontwikkeling van hoërordedenke. Die vraag is hoe 'n kurrikulum moet lyk wat fokus op die ontwikkeling van hoërordedenke? In hierdie studie is aangetoon dat meer geïntegreerde kurrikulumprogramme die ontwikkeling van hoërordedenke aanhelp.

6.1 *Oorsig van die studie*

Die gedagte van 'n geïntegreerde Graad 10- tot 12-kurrikulum is nog 'n betreklike onontwikkelende veld in Suid-Afrika. Alhoewel geïntegreerde benaderings in die VSA en Holland bekend is, is daar weinig op die graad 10 tot 12 vlak gedoen wat integrasie betref. Die probleem met graad 10 tot 12 is om 'n tema te vind wat op die betrokke leerders se vlak is, relevant en breed genoeg om leerders vir verdere studie voor te berei. In hierdie navorsing is die integrerende rol van kegelsnedes aangetoon. Hierdie

ondersoek is vanuit vier perspektiewe benader, naamlik 'n psigologiese, pedagogiese, wiskundige en 'n historiese perspektief.

Conics as an Integrating Factor in the FET Curriculum

Why Integration?

Essential skills for future

Higher order Thinking Skills:
Critical and creative thinking

- ~ 0.22% of Black African students from state schools passed Mathematics with a 55%+ (HS) in 2000
- 20% of exam paper: Questions that need higher order thinking skills

Integration improve higher order thinking skills

The degree of understanding is determined by the number and the strength of the connections. A mathematical idea or procedure or fact is understood thoroughly if it is linked to existing networks with stronger or more numerous connections - Hubert and Carpenter

A way to create a more connected knowledge structure the underlying relationships between different concepts in the curriculum must be highlighted

Luper et al (1998) & Battista (2000) came to the conclusion: "Comparing the growth in achievement revealed that, as a group, the CIMP students improved more than those of the non-CIMP students. Moreover, approximately 40 percent of Black African and African American students in the CIMP group showed more growth than both the CIMP group as a whole and the corresponding students in the non-CIMP group."

Arkansas 8th Grade Benchmark Exam, February 1999

FET Curriculum

Principles:

- Social transformation: Remove educational balanced from the past
- Outcomes based: Activity & Learner base
- High knowledge & Skills
- Integration & Applied competence

Integration in FET Curriculum

- Other subject areas
- Algebra & Geometry
- Geometry software
- Mathematics & real world

Why Conic Sections?

The conics were first defined as the intersection of a right circular cone of varying vertex angle; a plane perpendicular to an element of the cone - Apollonius 262-190 BC

Euclidian

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Classification based on discriminant $B^2 - 4AC$:

- $B^2 - 4AC < 0$: ellipse
- $B^2 - 4AC = 0$: parabola
- $B^2 - 4AC > 0$: hyperbola

Non Euclidian

Parallel lines intersect

Outcomes 2: Patterns, functions and algebra & Outcomes 3: Shape, space and measurement

Projective Geometry

Shadow geometry

Hyperbolic geometry	Affine geometry	Elliptical geometry
Shadow (out)	Parallel projection	
	Euclidean Geometry	

Transformations

Rotation: $B = 0$
 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Translation: $D = E = 0$
 $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$

Ellipse Parabola Hyperbola

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $y = mx + c$

Properties

$a+b=c$ $a-b=c$ $a=b$

Reflective properties

FET

Properties

Affine: Shear & Stretch
Ellipse: $x^2 + y^2 = +1$ or -1
Parabola: $y = x^2$
Hyperbola: $x^2 - y^2 = 1$

Projective: Collinearities
Ellipse, Parabola & Hyperbola:
 $x^2 + y^2 = +1$ or -1

Principal of duality

Figuur 6-1

Figuur 6-1 is 'n voorstelling van die plakkaat wat die hooflyne van hierdie studie voorstel (in Engels aangesien dit as plakkaat by die NRF Research School in Julie 2003 en by die AMESA konferensie in Junie 2003 gebruik is). Die studie handel oor die gebruik van kegelsnedes as integrerende faktor in skoolwiskunde, meer spesifiek graad 10 tot 12. Daar is dus twee komponente, eerstens waarom integrering en tweedens waarom kegelsnedes as integrerende faktor gebruik kan word. In hoofstuk 2 is die belangrikheid van integrasie vanuit 'n psigologiese en pedagogiese perspektief aangedui. In hoofstuk 3 en 4 is kegelsnedes wiskundig ondersoek en is die belangrike rol wat dit in wiskunde en in die geskiedenis van wiskunde speel aangetoon. In hoofstuk 5 is die gebruik van kegelsnedes vanuit die nuut voorgestelde graad 10- tot 12-kurrikulum ondersoek.

6.1.1 Psigologiese perspektief

Die teoretiese raamwerk van verstaan van Hiebert en Carpenter is in hoofstuk 2 gebruik om aan te toon hoe dat 'n goed verbinde kennisstruktuur hoërordedenke kan bevorder. Dit vereis dat verwantskappe tussen kennis erken en gebruik moet word. Volgens hierdie raamwerk is dit belangrik dat die onderrig eerstens aansluit by die leerder se bestaande kennis en tweedens dat dieselfde wiskundige begrip op verskillende wyses benader word om sodoende verstandsvoorstellings te integreer. Onderrig wat dus lei tot veelvuldige verbindingen tussen konsepte sal gevvolglik lei tot 'n hoër graad van verstaan (Dreyfus 1991: 32). Om so 'n geïntegreerde kennisstruktuur te ontwikkel en te bevorder moet die onderlinge verbande en verwantskappe in die kurrikulum in die onderrig verreken word. Daarom moet 'n kurrikulum volgens die NCTM (2000a: 15): "be coherent, focused on important mathematics, and well articulated across the grades". 'n Koherente kurrikulum word soos volg verduidelik (NCTM 2000a: 16):

A coherent curriculum effectively organizes and integrates important mathematical ideas so that students can see how the ideas build on, or connect with, other ideas, thus enabling them to develop new understandings and skills

6.1.2 Pedagogiese perspektief

Om die te bepaal of 'n geïntegreerde onderrigbenadering die ontwikkeling van hoërordedenke bevorder, is empiriese resultate (in afdeling 2.4.1) van bestaande geïntegreerde kurrikulumprojekte in die VSA ontleed. Die fokus was op die impak van geïntegreerde kurrikulumprojekte op hoërordedenke en

probleemoplossingsvaardighede. 'n Groot verskeidenheid empiriese resultate deur verskillende navorsers op verskillende geïntegreerde projekte dui daarop dat 'n geïntegreerde kurrikulum hoërordedenke en probleemoplossingsvaardighede bevorder.

Die volgende aanhaling vat die bevindings saam:

This (integrated) approach to curriculum design has been proven to be a very effective method for teaching and learning. Students learn best when the subjects taught are connected and related to common goals. When an integrated curriculum is adopted, schools can expect its students to think at a higher level, to improve attendance and self-esteem, and to perform at a higher level on test and classroom assignments (State Board of Education 1999).

Nog belangriker vir ons Suid-Afrikaanse konteks is dat die geïntegreerde kurrikulumprogramme alle leerders gehelp het, maar in besonder swart Amerikaanse leerders en leerders uit armer gebiede. 'n Geïntegreerde kurrikulum verseker dus dat 'n diverse groep leerders by skoolwiskunde baat en die geleentheid het om wiskundige konsepte deeglik te bemeester. Dit is in lyn met die doel van uitkomsgebaseerde onderwys wat die fondament van Suid-Afrika se kurrikulum is. Dit streef om alle leerders in staat te stel om tot hulle volle potensiaal te ontwikkel (Departement van Onderwys 2002a: 4).

The National Curriculum Statement Grades 10-12 (Schools) aims to develop a high level of knowledge and skills for learners. It sets up high expectations of what all South African learners can achieve. Social justice requires that those sections of the populations previously disempowered by the lack of knowledge and skills should be empowered. The NCS specifies the minimum standards of knowledge and skills to be achieved at each grade and sets high achievable standards in all subjects.

Die empiriese resultate bevestig dus nie net die geldigheid van die teoretiese raamwerk nie, maar toon ook dat 'n meer geïntegreerde kurrikulumbenadering kan meewerk om hierdie doel, naamlik om alle leerders volgens hulle volle potensiaal te ontwikkel, te verwesenlik.

6.1.3 Wiskundige perspektief

Hoofstukke 3 en 4 fokus op die logiese struktuur en die onderlinge verwantskappe tussen die konsepte wat handel oor kegelsnedes. John Dewey het al meer as 'n eeu gelede gesê dat kennis vir onderrig beide logies en psigologies gestruktureer of georganiseer moet word (Ball 2003). Hoofstuk 3 handel oor die Euklidiese benadering tot kegelsnedes waarin afstande en hoekmeting 'n sentrale rol speel. In hierdie hoofstuk is kegelsnedes deur middel van 'n lokusdefinisie met behulp van afstande vanaf 'n lyn en punt gedefinieer (sien Figuur 6-1 die tweede kolom) asook in terme van 'n hoek van snydingsvlak met 'n kegel. Die verband tussen hierdie twee

benaderings is in afdeling 3.6 beskryf en word in Figuur 3-6 aangetoon. Vanuit hierdie definisie is die algemene algebraïese vergelyking van die kegelsnedes bepaal. Die voordeel van die eerste twee bogenoemde benaderings is dat dit nie 'n koördinaatvlak vereis nie. Die tipe kegelsnede wat gevorm word hang af van die inklinasiehoek en die eksentrisiteit. Die algebraïese beskrywing van kegelsnedes, deur van 'n lokus gebruik te maak, lewer die tweedegraadse vergelyking $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Dié vergelyking verteenwoordig alle kegelsnedes. Deur van Euklidiese transformasies, in hierdie geval 'n translasie en rotasie, gebruik te maak kan die algebraïese vergelyking van kegelsnedes verder vereenvoudig word: In die geval van 'n ellips en hiperbool vereenvoudig dit na $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ en by 'n parabool na $y^2 = 4dx$. Die eenheid van die drie benaderings (lokus, snedes met 'n kegel en die algebraïese vergelyking) word in Tabel 3-2 aangetoon en kan ook in Figuur 3-6 gesien word.

In hoofstuk 4 is die rol van kegelsnedes in projektiewe meetkunde, waarin afstand en hoekmeting nie meer onveranderlik is nie, gedefinieer en beskryf. Aangesien afstand en hoekmeting nie onveranderlik is onder projektiewe transformasies nie, maar kegelsnedes wel, beteken dit dat kegelsnedes gedefinieer kan word sonder om van afstand en hoekmeting gebruik te maak. Kollineariteit van punte en die samevallendheid van lyne is eienskappe wat wel in die projektiewe vlak behoue bly onder transformasies. In hoofstuk 4 is aangetoon dat kegelsnedes in terme van hierdie eienskappe beskryf kan word. 'n Eenvoudige wyse waarop hierdie ondersoekte in die klaskamer kan plaasvind, is met behulp van skaduwees vanaf 'n ligbron. Afhangende van die soort ligbron word óf affiene (son as bron), óf projektiewe (lig as bron) projeksies verkry. Alhoewel die tipe kegelsnede nie behoue bly onder skadumeetkunde (indien dit die skadu van 'n puntbron is) nie, bly die projeksie wel 'n kegelsnede. 'n Kegelsnede word uniek deur vyf punte, waarvan geen drie kollineér is nie, bepaal. Daar bestaan verskillende wyses om kegelsnedes deur vyf punte te konstrueer. In afdeling 4.5 is Pascal se stelling gebruik om so 'n konstruksie te maak. Hierdie beginsel is toegepas om kegelsnedes in Figuur 5-22 met Geometer's Sketchpad deur vyf punte te konstrueer. In hoofstuk 4 is ander konstruksiemetodes ook ondersoek. Kegelsnedes kan ook deur omhulsels van lyne of met behulp van gevoude papier gekonstrueer word. Hierdie konstruksies kan verklaar word deur van die beginsel van dualiteit (waaraan die projektiewe vlak voldoen) gebruik te maak.

Dit beteken dat as dit moontlik is om 'n kegelsnede in terme van punte te beskryf moet dit ook moontlik wees om dit in terme van lyne te beskryf. Dit beteken dat nuwe stellings verkry kan word deur punt met lyn en kollineêr met saamlopend te vervang. Die feit dat Euklidiese meetkunde 'n deelmeetkunde van projektiewe meetkunde is, beteken dat alle eienskappe van kegelsnedes in die projektiewe vlak ook in die Euklidiese vlak sal geld.

In hoofstukke 3 en 4 is eienskappe van kegelsnedes aangetoon, waarvan die someienskappe asook die refleksiewe eienskappe (sien Figuur 6-1) baie toepassings het. In afdeling 5.2.1 is tale toepassings ondersoek en aangetoon.

6.1.4 Historiese perspektief

In die onderrig is dit nie net die logiese struktuur van kegelsnedes wat belangrik is nie, maar ook die wyse waarop dit in die onderrig ontvou moet word:

This means knowing how ideas can be structured and connected in the field, and how they might be unfolded and connected together across time, as students grow in their mathematical skill and maturity (Ball 2003).

Die historiese ontwikkeling kan as 'n bron gebruik word om te bepaal hoe hierdie ontvouing in die onderrig kan plaasvind. Die rede hiervoor is omdat konseptuele ontwikkeling dikwels op dieselfde wyse plaasvind as die historiese ontwikkeling (Harper 1987: 85). In hoofstukke 3 en 4 het ons gesien dat kegelsnedes meer as 2000 jaar lank deur wiskundiges ondersoek is en in ongeveer 375-325 v.C. deur Menaechmus ontdek is. Daar is histories beskou twee duidelik onderskeibare ontwikkelingstydperke, naamlik 'n Euklidiese benadering en 'n projektiewe benadering. Apollonius van Perga, een van die grootste Griekse wiskundiges van die tyd, se werk oor kegelsnedes was so gevorderd dat dit alle werk oor kegelsnedes tot op daardie tydstip by verre oortref het, insluitend Euklides se werk oor kegelsnedes (Boyer & Merzbach 1989: 164). Hy het sy werk toegepas in die veld van planetêre beweging en het op hierdie wyse 'n belangrike bydrae tot die ontwikkeling van die Griekse astronomie gemaak.

In die Renaissance tydperk het Kepler, Descartes en Fermat kegelsnedes met behulp van koördinaatmeetkunde ondersoek. Desargues, La Hire en Pascal het die ondersoek na kegelsnedes met behulp van projektiewe meetkunde tot nog hoër hoogtes gevoer. Onder die invloed van Plato het hulle geglo dat die natuur wiskundig saamgestel is, daarom het skilders uit hierdie tydperk na wiskundige verbande gaan soek om diepte in skilderye te verkry. Die oorspronklike gedagte van projektiewe

meetkunde het huis ontstaan uit die studie van hierdie perspektiwiteit (Bix 1994: 263). Met die ontwikkeling van rekenaargrafika kom dieselfde beginsel na vore, die driedimensionele wêreld moet op 'n tweedimensionale rekenaarskerm voorgestel word, daarom is daar weer hernude belangstelling in projektiewe meetkunde.

Die volgende gedagtes wat vir onderrig van belang is, kom in die historiese ontwikkeling na vore:

- Die Euklidiese en projektiewe benadering tot kegelsnedes het aanvanklik sonder 'n koördinaatvlak ontwikkel.
- Kegelsnedes is met behulp van 'n snyvlak met 'n kegel beskryf. Maar aanvanklik is daar nie van 'n dubbelkegel gebruik gemaak nie.
- Die projektiewe meetkunde het lank na Euklidiese meetkunde ontwikkel.
- Kegelsnedes kan toegepas word om verskynsels te verklaar en te beskryf.

Dit is belangrik om daarop te let dat beide die Euklidiese en projektiewe benaderings eers sonder 'n koördinaatvlak gedoen is. Dit is in teenstelling met die huidige benaderings in ons kurrikulum waarop die verskillende kegelsnedes onafhanklik van mekaar, met behulp van 'n koördinaatvlak, hanteer word.

6.2 *Kegelsnedes as integrerende faktor in die kurrikulum*

Die talle toepassingsmoontlikhede van kegelsnedes en die rol wat dit in die ontwikkeling van wiskunde speel maak dit 'n gesikte tema vir integrering. Die kurrikulum lê huis klem op die toepassing van wiskunde:

A central purpose of Mathematics in the FET band is establishing an authentic connection between mathematics as a discipline and the application of mathematics in a real-world context (Departement van Onderwys 2002a: 2).

In afdeling 5.2.1 is die voorkoms en verskillende toepassings van kegelsnedes vermeld. Ons sien kegelsnedes in skaduwees, planetêre beweging, wentelbane in gravitasievelde, tegniese tekene, beweging van projektleie en in die parabool van veiligheid (Miller 1970: 657). Verdere toepassings van kegelsnedes is Moiré-patrone, elliptiese ratte en semi-elliptiese vere, litotripsie vir die behandeling van nierstene, fluistergalerye, Loran, antennas, satellietskottels, radioteleskope, ligte en mikrofone. Verder het navorsing ook aangetoon dat 'n verkyker se visuele ruimte hiperbolies van aard is.

In hoofstuk 5 is die kurrikulum ontleed en is daar aangetoon dat kegelsnedes gebruik kan word om twee van die vier leeruitkomste as 'n geïntegreerde geheel te onderrig. Die tweede voorlopige weergawe van die graad 10- tot 12-Nasionale Kurrikulumdoelstellings (Departement van Onderwys 2002a: 4) verdeel die kurrikulum in vier uitkomste:

- Leeruitkoms 1: Getal en getalverwantskappe
- Leeruitkoms 2: Patrone, funksies en algebra
- Leeruitkoms 3: Vorm, ruimte en meting
- Leeruitkoms 4: Datahantering en waarskynlikheid

Kegelsnedes kan as integrerende faktor in Leeruitkoms 2 en 3 gebruik word. Dit leen sig tot al vier vorme van integrasie waarna die kurrikulum verwys. Hierdie vier vorme van integrasie is:

- 1) Die integrering van Leeruitkoms 3 met die ander.
- 2) Die integrering van wiskunde in die algemeen met probleme en toepassings uit die leerders se leefwêreld.
- 3) Die integrering van wiskunde met ander vakke.
- 4) Die gebruik van tegnologie in die onderrig van meetkunde.

Buite die praktiese toepassings word kegelsnedes ook gebruik in die klassifisering van meetkundes. Deelmeetkundes van projektiewe meetkunde staan byvoorbeeld bekend as hiperboliese en elliptiese meetkunde. Kegelsnedes kan gebruik word om die leerders se leefwêreld met meetkunde en algebra te integreer. Dit kan as 'n kragtige bron dien om die voorgestelde kurrikulum geïntegreerd aan te bied deur middel van ontdekking, visualisering, toepassings en die gebruik van dinamiese meetkundesageware. Kegelsnedes kan as integrerende faktor in die graad 10- tot 12-kurrikulum gebruik word om Leeruitkomste 2 en 3 van die kurrikulum met mekaar te verbind, en dit in verband te bring met die leerder se leefwêreld deur relevante probleme op te los.

'n Vraag wat voortspruit uit die tradisionele onderwerpbenadering is of al die tradisionele onderwerpe deur hierdie geïntegreerde benadering gedeck word? Alhoewel hierdie vraag volgens Schoenfeld (1994: 56) afhang van 'n mens se benaderingswyse is dit tog gerusstellend dat die gebruik van kegelsnedes as integrerende faktor 'n wye verskeidenheid aspekte integreer. In die logiese ontwikkeling van kegelsnedes en in

die toepassings van kegelsnedes is die volgende tradisionele skoolwiskunde-onderwerpe of temas gebruik:

Tabel 6-1

	Onderwerp	Afdelings
Analitiese meetkunde	Afstandsformule	3.4; 3.7.3; 3.9.4.3
	Lokus	3.4
	Inklinasie hoek	3.6.3
	Middelpuntsformule	3.9.4.1; 3.9.4.3
Grafiese	Reguitlyn vergelyking	3.4; 3.7.3
	Gradiënt	3.7.3; 3.7.3
	Ewewydige lyne	3.9.4.1
	Afsnitte	3.4
	Snypunte	3.4; 3.7.3; 3.9.4.1; 5.2.3.1
	Asimptote	3.7.3
	Sirkel	5.2.3.1
	Parabool, hiperbool en ellips	Deurgaans
Algebra	Pythagoras se stelling	3.4; 3.7.3; 3.9.2; 3.9.4.3
	Algebraïese vereenvoudiging	3.4; 3.6.3; 3.7.3; 3.8; ens
	Verhoudings/breuke	3.4; 4.7.4; 5.2.3.1
	Aard van die wortels	3.4; 3.6.3; 5.2.3.1
	Vierkantsvoltooiing	3.7.1; 3.9.2
	Stelsel vergelykings	4.9; 5.2.3.1
Diff	Implisiete	3.8
	Eerste beginsels	4.9.1
	Algemene differensiasie	4.9.1; 5.2.3.1
Trig	Toepassing van basiese definisies	3.8; 3.9.2; 5.2.3.1
	Identiteite	3.9.2
	Sakrekenaar	3.7.1
	Dubbelhoekformules	3.9.4.3
Meetkunde	Driehoede (kongruensie)	3.8; 3.9.4.3
	Gelykvormigheid	3.9.2
	Sirkel (hoek in half sirkel)	3.9.4; 3.9.4.3
	Raaklyne aan 'n sirkel	3.6.3
	Transformasies (rotasie)	3.7.1; 3.9.4.3
	Transformasies (translasie)	3.7.1; 3.7.3; 3.9.4.1; 3.9.4.3

Kegelsnedes is so 'n fundamentele begrip in wiskunde dat daar in verskillende afdelings daarna verwys word. Verno (1974:361) merk op dat: "It seems to be as ubiquitous in the mathematical world as it is in the natural world." Hy het byvoorbeeld die verband tussen verskillende tipes kegelsnedes se snydingspunte en die goue

verhouding, dit is $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, aangetoon. Goue verhoudings het verskeie toepassings en

kom algemeen in die natuur voor. Kegelsnedes skep, in lyn met die visie van die kurrikulum, onderriggeleenthede waarin die leerders werklike probleme kan ondersoek:

The study of conic sections in a high school algebra or analytical geometry class offers a unique opportunity for students to engage in productive mathematical inquiry (Coxford 1967: 315).

6.3 Verdere navorsing

In hierdie studie mag dit lyk of daar 'n gaping tussen navorsing en onderrigpraktyk is omdat die navorsing los van 'n klaskamersituasie gedoen is. Goldenberg (1999: 191) waarsku dat kurrikulumontwikkeling nie 'n eenvoudige saak is nie:

But developing a curriculum is a long, complex business that involves any different kind of contributions – mathematicians, writers, classroom teachers, students, editors, mathematics educators, evaluators, publishers, page designers, and illustrators, to name a few – and a wide variety of activities that interact in complicated ways – brainstorming, outlining, writing, editing, revising, field testing, teaching in the classroom, assessing student progress, surveying the market, designing format and layout.

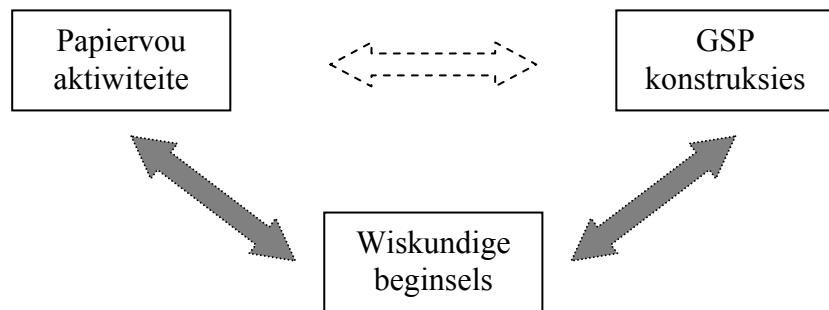
Soos in hoofstuk 1 verduidelik moet hierdie navorsing slegs as 'n belangrike stap in 'n groter projek gesien word. Hierdie groter navorsingsontwerp van Confrey en Lechance (2000: 231) staan bekend as "transformative teaching experiments through conjecture-driven research". 'n Belangrike komponent van hierdie navorsing is die bewering ('conjecture') wat gemaak word. Die bewering handel oor *inhoud* en *pedagogie*. In hierdie navorsing handel die inhoud van die bewering oor die gebruik van kegelsnedes en oor die pedagogie van 'n spesifieke geïntegreerde wyse waarop dit onderrig kan word. 'n Vereiste van "transformative teaching experiments through conjecture-driven research" is dat die bewering gegrond moet wees op 'n teoretiese raamwerk wat bestaan uit die ontleding van bestaande literatuur. Die volgende stap is die ontwikkeling van onderrigaktiwiteite waarin kegelsnedes as integrerende faktor gebruik word om Leeruitkomste 2 en 3 van die voorgestelde kurrikulum aan te bied. Hierdie aktiwiteite sal vir graad 10, 11 en 12 voorsiening moet maak. Die verkennende

werk wat in hoofstukke 3, 4 en 5 gedoen is, kan as basis vir die ontwikkeling van aktiwiteite dien. Daarna moet die aktiwiteite in 'n praktiese situasie uitgetoets word. 'n Voorbeeld is die 'leeu en rivier'-aktiwiteit om die kegelsnedes te vorm (sien paragraaf 5.4.1.1). Confrey en Lechance (2000: 240) wys egter daarop dat hierdie 'n komplekse navorsing is wat 'n span navorsers vereis. Die ontwikkeling van geskikte aktiwiteite kan met behulp van aksienavorsing verwesenlik word. Dit is belangrik dat so 'n program empiries kwalitatief en kwantitatief getoets en verfyn word voordat volskaalse implementering plaasvind. Die ontwikkeling van hoërordedenke is 'n kritieke aspek hiervan.

Alhoewel daar in navorsing voorbeeld van gevalle is waar die gebruik van dinamiese meetkundesagteware tot beter begrip lei is daar nie genoeg navorsing daaroor gedoen om die werklike impak daarvan te bepaal nie (Olive 2000: 6).

While there have been many personal accounts of the powerful learning that can take place when students of all ages work with dynamic geometry technology (my own included), there have been very few, well designed research projects to study the effects on learning in such environments.

'n Vraag is byvoorbeeld of GSP konstruksies gebruik kan word om papiervouw aktiwiteite meer verstaanbaar te maak en of beide GSP konstruksies en papiervouw aktiwiteite eerder op die wiskundige wyse met mekaar verbind word.



Die onderrig van 'n geïntegreerde kurrikulum vereis 'n onderwyser met 'n geïntegreerde kennisstruktuur. Ball (2003) verduidelik in 'n artikel wat handel oor die kennis wat onderwysers nodig het om effektiel te kan onderrig een van die faktore soos volg: "teaching requires an awareness and understanding of fundamental *mathematical connections*". Die realiteit in Suid-Afrika is dat daar baie onopgeleide onderwysers is. Meer navorsing is nodig om die impak van 'n onderwyser met 'n swak geïntegreerde kennisstruktuur op die onderrig van 'n geïntegreerde kurrikulum

te bepaal. Die vraag is egter of so 'n kurrikulum nie huis daartoe sal lei dat onderwysers self ook 'mathematical connections' maak nie.

6.4 **Samevatting**

Onderrig in die VSA word dikwels beskryf as "A mile wide and an inch deep". Alhoewel die nuut voorgestelde Suid-Afrikaanse kurrikulum in lyn met ander internasionale kurrikulums is, is die gevaar dat ook dié kurrikulum te breed is. As die voorgestelde kurrikulum met die huidige, oorbelade kurrikulum vergelyk word is daar min weggelaat en baie bygevoeg. Cuoco (2001: 170) waarsku huis hierteen in die konteks van onderwysersopleiding: "Solutions will not come from rearranging the topics in a syllabus or by adding more topics to an already bloated undergraduate curriculum." Die gebruik van kegelsnedes as integrerende faktor vir Leeruitkomste 2 en 3 kan diepte aan die nuut voorgestelde Suid-Afrikaanse kurrikulum gee. Dit sal daartoe bydra dat die kurrikulum fokus en as 'n geïntegreerde geheel gesien word. Die belangrikheid van hierdie hantering van 'n kurrikulum kan ook in die volgende opmerking oor die Amerikaanse Standards gesien word (NCTM 2003):

This standard precedes those that discuss specific mathematical content in order to stress the importance of viewing the standards as an integrated whole, not as a list of content areas. If the standards are interpreted as a listing of topics to be covered sequentially, it is likely that in most classrooms there will be insufficient time to cover them all. Instead, implementation of the standards should be organized in such a way that several goals will be addressed simultaneously.

Die vrese dat integrasie die kurrikulum sal vereng word uitgespreek deur Hacker (Ferguson 1999), die uitvoerende direkteur van die Mathematics, Science, and Technology (MST) projek, wat daarop gemik is om onderwysers se vermoë om wiskunde, wetenskap en tegnologie te integreer:

An interdisciplinary and process-oriented approach to the learning and teaching of mathematics, science, and technology need not compromise content or cohesiveness of central ideas in any of these subject areas. By emphasizing process and applications, students gain additional tools that enable them to leverage their knowledge and thereby learn more, not less content. Also, when knowledge is personally meaningful, it offers opportunities for the learner to dig deeper into concepts.

6.5 **Gevolgtrekking**

Die psigologiese en pedagogiese perspektiewe wys op die belangrikheid van integrasie. Die logies-wiskundige perspektief dui op die moontlikhede wat kegelsnedes as integrerende faktor inhoud. Die talle praktiese toepassings en die feit dat kegelsnedes aan alle vorme van integrasie waarna die kurrikulum verwys voldoen, maak dat

kegelsnedes as 'n integrerende faktor in die nuut voorgestelde kurrikulum gebruik kan word. Implementering van hierdie voorstel sal verdere navorsing, beplanning en opleiding vereis.

Bibliografie

- Arcavi, A. & Bruckheimer, M. 1989. The didactical De Morgan: a selection of Augustus De Morgan's thoughts on teaching and learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics* 9(1): 34-39.
- Atkinson, D. 1987. Spheres in a cone; or, proving the conic sections. *Mathematics Teacher* 80(3): 182-184.
- Ayres, F. 1967. *Schaum's outline of theory and problems of projective geometry*. New York: Schaum.
- Baker, E.L. 1990. Developing comprehensive assessments of higher order thinking. [In Kulm, K. ed. *Assessing higher order thinking in mathematics*. American association for the advancement of science: Washington.]
- Bakst, A. 1966. Conic sections formed by some elements of a plane triangle. *Mathematics Teacher* 24: 28-31.
- Ball, D.L. 2003. Mathematics in the 21st Century. Remarks prepared for the Secretary's Summit on Mathematics, U.S. Department of Education.
<http://www.ed.gov/initis/mathscience/ball.html#notes>
- Ball, W.W.R. 1908. A short account of the history of mathematics. 4th edition. [In Wilkens, D.R. Mathematicians of the Seventeenth and Eighteenth Centuries.
<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/RBallHist.html>]
- Beutelspacher, A. & Rosenbaum, U. 1998. *Projective geometry: from foundations to applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Birchfield, S. 1998. An introduction to projective geometry (for computer vision).
<http://robotics.stanford.edu/~birch/projective/>
- Bix, R. 1994. *Topics in geometry*. Boston: Academic Press.
- Blistain, M. & Phillips, P.H. 1988. The reflective property of the conics: A different approach. *Mathematics and Computer Education* 22(2): 120-123.
- Boltyanskii, V.C. 1964. *Envelopes*. Oxford: Pergamon.
- Boudourides, M.A. 1998. Constructivism and education: a shopper's guide. *Contributed paper at the international conference on the teaching of mathematics*. Samos, Greece, July 3-6.
- Boyer, C.B. & Merzbach, U.C. 1989. *A history of mathematics*. 2nd edition. New York: Wiley.
- Brinkworth, P. & Scott, P. 1998. The place of mathematics: the Parthenon in Athens. *Australian Mathematics Teacher* 54(1): 2-5.
- Broughton, P. 1986. Halley's comet in the classroom. *Mathematics Teacher* 79:85-89.

- Bruchheimer, M. & Hershkowitch, R. 1977. Constructing the parabola without calculus. *Mathematics Teacher* 70: 658-662.
- Butler, M.S. 1988. Constructing ellipses. *Mathematics Teacher*, 81: 189-190.
- Byrne, M.M. 1966. A geometric approach to conic sections. *Mathematics Teacher*, 59: 348-350.
- Calter, P. 1998. Brunelleschi's peepshow & the origins of perspective.
<http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit11/unit11.html>
- Cederberg, J.N. 1989. *A course in modern geometries*. New York: Springer.
- Clements, D.H. & Battista, M.T. 1992. Geometry and spatial reasoning. [In Grouws, D.A. ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers and Mathematics*. New York: Macmillan, 420-464.]
- Cobb, P. 2000. Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. [In Kelly, A.E. & Lesh, R.A. eds. 2000. *Handbook of research design in mathematics and science education*. 4th edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 307-333].
- Confrey, J. & Lachance, A. 2000. Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. [In Kelly, A.E. & Lesh, R.A. eds. 2000. *Handbook of research design in mathematics and science education*. 4th edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 231-266].
- Coolidge, J. L. 1945. *A history of the conic sections and quadric surfaces*. Oxford: The Clarendon Press.
- Cotton, K. 1991. Teaching thinking skills. School Improvement Research Series.
<http://www.nwrel.org/scpd/sirs/6/cu11.html>
- Coxford, A. 1967. Classroom inquiry into the conic sections. *Mathematics Teacher* 60: 315-322.
- Cullen, M.R. 1990. Moiré Fringes and the conic sections. *College Mathematics Journal* 21(5): 370-378.
- Cuoco, A.A. 1998. Mathematics as a way of thinking about things. [In National Academy of Sciences. *High school mathematics at work: essays and examples for the education of all students*. 102-106.]
- Cuoco, A.A. 2001. Mathematics for teaching. *Notices of the AMS* 48(2): 168-174.
- Cuoco, AA. & Goldenberg, E.P. 1996. The role of technology in mathematics education. *Journal of Education* 178(2): 15-32.

- Cuoco, AA. Goldenberg, E.P. & Marke, J. 1996. Habits of mind: an organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behaviour* 15: 375-402.
- Dana-Picard, T. 2000. Rays of light trapped by conics. *International journal of mathematical education in science and technology* 31(5): 748-773.
- Davis, R.B. 1992. Understanding “Understanding”. *Journal of Mathematical Behaviour* 11: 225-241.
- De Villiers, M. 1994. The role of technology in mathematical modeling. *Pythagoras* 35: 34-42.
- De Villiers, M. 1996. The future of secondary school geometry. Paper delivered at the *SOSI Geometry imperfect conference*, 2-4 October 1996, UNISA, Pretoria.
- Dedron, P. Itard, J. & Field, J.V. 1973. *Mathematics and mathematicians*. Milton Keynes: Open University Press.
- Dennis, D. 2000. The role of historical studies in mathematics and science educational research. [In Kelly, A.E. & Lesh, R.A. eds. 2000. *Handbook of research design in mathematics and science education*. 4th edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 799-813].
- Department of Education. 2001a. *National strategy for mathematics, science and technology education to address the problem in mathematics, science and technology education*.
- Department of Education. 2001b. *Guideline documents: National Senior Certificate Examination 2001 Mathematics Paper I, II HG & SG*.
- Department of Education. 2002a. Mathematics national curriculum statements for grade 10-12 schools. (2nd draft).
http://education.pwv.gov.za/DoE_Sites/FET_Folder
- Department of Education. 2002b. Revised national curriculum statement for grade R-9.
<http://www.sun.ac.za/MATHED/HED/math.pdf>
- DeTemple D.W. 1984. Geometric procedures for graphing the general quadratic equation. *College Mathematics Journal* 15(4): 313–323.
- DeTemple, D.W. 1990. A direct derivation of the equations of the conic sections. *Mathematics Teacher* 83(3): 190-193.
- Dobbs, D.E. 1998. The algebraic criterion for degenerated conic sections. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 29(1): 132–134.
- Donnarumma, A. 2001. Development of the drawing: from the magic of geometry to the use of several logics in technical design. Paper delivered at *XII ADM International Conference*, Italy. 5-7 September 2001.

- Dossey, J. McCrone, S. Giordano, F. & Weir, M.D. 2002. *Mathematics methods and modeling for today's mathematics classroom: a contemporary approach to teaching grades 7-12*. Canada: Brooks/Cole.
- Dreyfus, T. 1991. Advanced mathematical thinking processes. [In Tall, D. ed. *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Printers, 25-40.]
- Education Development Center. 1995. Connected Geometry.
<http://www.edc.org/MLT/ConnGeo/>
- ENC (Eisenhower National Clearinghouse for Mathematics and Science Education). Exemplary promising mathematics programs. <http://www.enc.org/ed/exemplary>
- Eves, H. 1960. The names “ellipse,” “parabola,” and “hyperbola”. *Mathematics Teacher* 53: 280-281.
- Ferguson, D. 1999. An interview with David Ferguson, SUNY at Stony Brook.
dferguson@dts.tns.sunysb.edu
- Fishback, W.T. 1969. *Projective and Euclidean geometry*. 2nd edition. New York: Wiley.
- Flavell, J.H. Miller, P.H. & Miller, S.A. 1993. 3^d edition. *Cognitive development*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Freudenthal Instituut. 1998. *Conflictlijnen en spiegels: voortgezette meetkunde deel 3*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Freudenthal, H.F. 1973. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H.F. 1979. Structuur der wiskunde en wiskundige structuren; een onderwijskundige analyse. *Pedagogische Studiën* 56: 51-60.
- Fuller, G. & Tarwater, D. 1986. *Analytical geometry*. 6th edition. Massachusetts: Addison-Wesley.
- Goldenberg, E. P. 1999. Principles, art, and craft in curriculum design: the case of connected geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4(2&3): 191-224.
- Gough, D. 1991. Thinking about thinking. Research Roundup. National Association of Elementary School Principals, Alexandria, 7(2) Win 1991.
<http://www.naesp.org/>
- Guedj, D. 1998. *De stelling van de papegaai. Roman over de geschiedenis van de wiskunde*. Antwerpen: Ambo.
- Harper, E. 1987. Ghost of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics* (18): 75-90.
- Hiebert, J. & Carpenter, T.P. 1992. Learning and teaching with understanding. [In Grouws, D.A. ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*:

a project of the National Council of Teachers and Mathematics. New York: Macmillan, 65-100].

Hiebert, J. Carpenter, T. Fennema, E. Fuson, K. Wearne, D. Murray, H. Olivier, A. & Human, P. 1996. *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth: Heinemann.

Hilton, P. 1990. The role of geometry in the mathematics curriculum. *Pythagoras* 23: 15-20.

Hoover, M.N. Zawojewski, J.S. & Ridgway, J. 1997. Effects of the connected mathematics project on student attainment. Paper presented at the Annual Meeting of American Education Research Association in Chicago, Illinois, April, 1997. <http://www.math.msu.edu/cmp/RREvaluation/Support/HZR-effect.htm>

Jennings, G. 1994. *Modern geometry with applications.* New York: Springer-Verlag.

Jones, J. 2000. Instructional Unit on Conic Sections.
<http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Jones.June/conics/conics.htm>

Jooste, T de W. 1984. Vektoralgebra en meetkunde. *Ongepubliseerde studiegids.* Potchefstroom: PU vir CHO.

Kaner, S. 1965. A compass-ruler method for constructing ellipses on graph paper. *Mathematics Teacher* 58: 260-261.

Kelly, A.E. & Lesh, R.A. 2000. General remarks by the editors. [In Kelly, A.E. & Lesh, R.A. eds. 2000. *Handbook of research design in mathematics and science education.* 4th edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates].

Kieran, C. 1992. The learning and teaching of school algebra. [In Grouws, D.A. ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers and Mathematics.* New York: Macmillan, 390-419].

Kulm, K. (Ed) 1990. *Assessing higher order thinking in mathematics.* American association for the advancement of science: Washington.

Lapan, R.T., Reys, B.J., Barnes, D.E. & Reys, R.E. 1998. Standards-Based Middle Grade Mathematics Curricula: Impact on Student Achievement. Paper presented at the Annual Meeting of American Education Research Association in San Diego, California in April, 1998.
<http://www.math.msu.edu/cmp/RREvaluation/Achievement.htm>

Lee, X. 1994. Conics Section.
http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html

MAA. Sien Mathematical Association of America.

Maletsky, E.M. 1973. Conics from straight lines and circles: Ellipses and hyperbolas. *Mathematics Teacher* 66: 243-246.

- Mansfield, H. 1985. Projective geometry in the elementary school. *Arithmetic Teacher* 32(7): 15-19.
- Manzo, A. 1998. Higher-order thinking strategies for the classroom: classroom-ready teaching strategies that promote higher-order thinking.
<http://members.aol.com/MattT10574/HigerOrderLiteracy.htm>
- Mathematical Association of America. 2001. The mathematical education of teachers.
http://www.maa.org/cbms/MET_Document/index.htm
- Mathews, J.H. 1995. The five point conic section: exploration with computer software. *School Science and Mathematics* 95(4): 206-208.
- Maths Centre & Zenex Foundation, 2002. *Draft Business plan enhancement of mathematics training for under qualified FET teachers*. Maths Centre: Johannesburg.
- Miller, A.M. 1970. A psychedelic approach to conic sections. *Mathematics Teacher* 63: 657-659.
- Moise, E.E. 1990. *Elementary geometry from an advanced standpoint*. 3^d edition. New York: Addison-Wesley.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000a. Principles and Standards for school mathematics. <http://www.ithaca.edu/compass/frames.htm>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000b. Revised National Curriculum Statement for Grade R-9.
<http://standards.nctm.org/document/chapter7/conn.htm>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2003. Introducing the Standards. <http://www.ithaca.edu/compass/frames.htm>.
- Natsoulas, A. 1989. Taxicab conics: an exploration into the world of taxicab geometry. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* 8(4): 39-47.
- NCTM. Sien National Council of Teachers of Mathematics.
- Olive, J. 1996. Creating all the conics by “folding” a point onto an inverted circle. *Handout for presentation at The Geometer’s Sketchpad users’ group meeting*. 26 April 1996, NCTM, San Diego.
- Olive, J. 2000. Using dynamic geometry technology: Implications for teaching, learning and research. *TIME 2000 presentation on GSP*.
- Olmstead, E.A. 1998. Exploring the locus definitions of the conic sections. *Mathematics Teacher* 91(5): 428-434.
- O’Neal, S.W. & Robinson-Singer, C. 1998. The Arkansas Statewide Systemic Initiative: The ASSI Pilot of the Connected Math Project (CMP): An Evaluation Report. Report submitted by Arkansas as part of the evaluation for the Connecting

Teaching, Learning and Assessment a NSF funded project.
<http://www.math.msu.edu/cmp/RREvaluation/Support/ArkRep.htm>

Parzynski, W.R. 1984. The geometry of microwave antennas. *Mathematics Teacher* 77: 294-296.

Pastoll, B. 1996a. *The conic sections*. Rondebosch: Mathematics Education Project.

Pastoll, B. 1996b. *Introducing projective geometry: a step into the infinite*. Cape Town: University of Cape Town.

Pedoe, D. 1963. *An introduction to projective geometry*. New York: Pergamon Press.

Pegg, J. 1997. Interpreting the demands of geometry questions within an extended form of van Hiele Theory. Proceedings of the *16th Conference for the Australian Assosiasion for Mathematics teachers*. Melbourne, 241-246.

Piaget, J. & Inhelder, B. 1971. *The child's conception of space*. London: Routledge and Kegan.

Prevost, F.J. 1998. The conic sections in taxicab geometry: Some investigations for high school students. *Mathematics Teacher* 91(4): 304-310.

Proia, L.M. & Menghini, M. 1984. Conic sections in the sky and the earth. *Educational studies in Mathematics* 15(2): 191-210.

Ramsey, G.P. 1991. Reflective properties of a parabolic mirror. *Physics Teacher* 29(4): 240-241.

Resnikoff, H.L. & Wells, R.O. 1973. *Mathematics in civilization*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Rose, K. 1974. New Conic graph paper: an easier way for students to draw families of conics. *Mathematics Teacher* 67: 604-606.

Russell, A. Visualization. 1996.
<http://jwilson.coe.uga.edu/EMT899/Visualization.html>

Salmon, G. 1904. *A treatise on conic sections*. London: Longmans & Green.

Santos-Trigo, M. & Espinosa-Perez, H. 2002. Searching and exploring properties of geometric configurations using dynamic software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 33(1): 38–50.

Saskatchewan Education. 1988. Understanding the common essential learnings: a handbook for teachers. <http://www.sasked.gov.sk.ca/docs/policy/cels/index.html>

Schoenfeld, A.H. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. [In Grouws, D.A. ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the*

- National Council of Teachers and Mathematics.* New York: Macmillan, 189-215].
- Schoenfeld, A.H. 1994. What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematics Behaviour* 13: 55-80.
- Seldon, A. & Seldon, J.S. 1998. Constructivism.
http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_glossary.html.
- Sellers, J.A. 1994. An introduction to conic sections.
<http://www.krellinst.org/UCES/archive/resources/conics/newconics.html>
- Seo, K. 1986. An alternative perspective on the optical property of ellipses. *Mathematics Teacher* 79: 656-657.
- Serra, M. 1997. *Discovering geometry: an inductive approach.* 2nd edition. Berkeley: Key Curriculum Press.
- Shafer, M.C. & Van Reeuwijk, M. 1994. Overview of the work on assessment in the Mathematics in Context Project. *Assessment working group meeting*, 4 April 1994. AERA: New Orleans.
- Sher, D.P. 1996. Folded paper, dynamic geometry, and proof: A three tier approach to the conics. *Mathematics Teacher* 89(3): 188-193.
- Sher, D.P. 2002. *Exploring conic sections with The Geometer's Sketchpad.* California: Key Curriculum Press.
- Sibley, T.Q. 1998. *The geometric viewpoint: a survey of geometries.* Reading: Addison-Wesley.
- Skemp, R.R. 1982. *The psychology of learning mathematics.* Middlesex: Penguin.
- Smart, J.R. 1989. *Modern geometries.* 5th edition. Pacific Grove: Brooks/Cole.
- Snyder, H.D. 1965. Deductive proof of compass-ruler method for constructing ellipses. *Mathematics Teacher* 58: 261-262.
- Spain, B. 1957. *Analytical conics.* Bath: Pergamon.
- Spiro, R.J., Feltovich, P.J., Jacobson, M.L. & Coulson, R.L. 1994. Cognitive Flexibility, Constructivism, and Hypertext: Random Access Instruction for Advanced Knowledge Acquisition in Ill-Structured Domains.
<http://www.ilt.columbia.edu/ilt/papers/Spiro.html>
- Spradley, J.L. 1991. Tradition and faith in the Copernican revolution. *Perspectives on Science and Christian faith* 43(1): 36-42.
- State Board of Education. 1999. Integrated curriculum: effective practices research brief. http://www.dpi.state.nc.us/school_improvement/effectiveintegrated.html

- Steen, L.A. (ed) 1994. *For all practical purposes: introduction to contemporary mathematics*. 3^d edition. New York: Freeman.
- Stols, G.H. 2002. How I teach loci. [In M. Moodley (ed), *AMESA Proceedings 2: Secondary, Senior and FET Phases* (pp. 16-21). Durban: University of Natal.]
- Stols, G.H. 2003. Higher order thinking skills and the mathematics curriculum. Paper delivered on the *Third International Conference on Science, Mathematics and Technology Education*. 15-18 January 2003.
- Stother, W. 2000. The Klein view of geometry.
<http://www.maths.gla.ac.uk/~wws/cabripages/klein/affine00.html>
- Szczerba, L.W. 1986. Tarski and geometry. *The Journal of Symbolic Logic* 51(4): 907-912.
- Tall, D. 1991. The psychology of advanced mathematical thinking. [In Tall, D. (ed) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Printers, 4-11.]
- Tall, D.; Gray, E.; Bin A.M.; Crowley, L.; DeMarois, P.; McGowen, M.; Pitta, D.; Pinto, M.; Thomas, M. & Yusof, Y. 2001. Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 1(1): 81-104.
- Thomas, N. 2001. Projective geometry. <http://www.anth.org.uk/nct/>
- Van Hiele, P.M. 1986. *Structure and insight*. Orlando: Academic Press.
- Van Hiele, P.M. 1999. Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematics* 5: 310 – 316.
- Van Maanen, 1992. Seventeenth century instruments for drawing conic sections. *The Mathematical Gazette* 76(476): 222-230.
- Van Rooy, D.J. 1946. *Analitiese meetkunde van die platvlak*. Stellenbosch: Pro Ecclesia.
- Veltman, K. H. 2000. Developments in perspective.
<http://www.mmi.unimaas.nl/people/Veltman/articles/perspectives/art10.htm>
- Verno, C.R. 1974. The golden section and conic sections. *Mathematics Teacher* 67: 361-363.
- Viertel, W.K. 1969. Why not relate the conic sections to the cone? *The Mathematics Teacher* 60: 13-15.
- Wessels, D.C.J. & Van Niekerk, H.M. 2001. Building the Spatial Operational Capacity (SOC) of the Primary School child through rich learning experiences: a geometry curriculum for Gauteng Province in South Africa. *Tydskrif vir Christelike Wetenskap* 37 (1&2): 89-113.

- Wilson, J.W. 2001. Mathematics problem solving using Geometer's Sketchpad. A presentation for SciMath MN and the Department of Mathematics and Statistics, Minnesota State University, Mankato. 10 March 2001.
<http://jwilson.coe.uga.edu>.
- Wisconsin Center for Educational Research. 1997. MiC and student achievement.
<http://mic.britannica.com/mic/common/MicAndStudentAchievement.asp>
- Woodcock, M.I. 1993. Projective geometry.
<http://www.scit.wlv.ac.uk/~cm1993/maths/mm2217/pg.htm>
- Yates, R.C. 1974. *Curves and their properties*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yelland, N. 1997. Developing higher order thinking skills with Logo.
<http://it.wce.wwu.edu/necc97/poster2/ozkidz/WebWhacker/WW181.html>
- Zimmerman, W. & Cunningham, S. (eds) 1991. MAA notes number 19: Visualization in teaching and learning mathematics. *Mathematical Association of America*.