DIE PROBLEMATIEK VAN DIE BEGRIP ONEINDIGHEID

IN WISKUNDEONDERRIG

EN DIE MANIFESTASIE DAARVAN IN IRRASIONALE GETALLE, FRAKTALE EN DIE WERK VAN ESCHER

deur

RINETTE MATHLENER

voorgelê ter gedeeltelike vervulling van die vereistes vir
die graad

MAGISTER EDUCATIONIS

met spesialisering in

WISKUNDEONDERWYS

aan die

UNIVERSITEIT VAN SUID-AFRIKA

STUDIELEIER: PROF DCJ WESSELS

Februarie 2008

VERKLARING

Ek verklaar hiermee dat **DIE PROBLEMATIEK VAN DIE BEGRIP ONEINDIGHEID IN WISKUNDEONDERRIG EN DIE MANIFESTASIE DAARVAN IN IRRASIONALE GETALLE, FRAKTALE EN DIE WERK VAN ESCHER** my eie werk is en dat ek alle bronne wat ek gebruik of aangehaal het deur middel van volledige verwysings aangedui en erken het.

....

0371-952-9

OPSOMMING

’n Studie van die histories-filosofiese ontwikkeling van die begrip oneindigheid bring die problematiese aard daarvan na vore. Aristoteles het onderskei tussen die *potensieel* en *aktueel* oneindige, maar het laasgenoemde verwerp. Dit is juis die interpretasie van die aktueel oneindige wat lei tot teenstrydighede, soos in Zeno se paradokse. Dit is vir ’n mens moeilik om die aktueel oneindige te begryp. Leerders en studente fokus primêr op oneindigheid as ’n proses wat nooit ophou nie. Die intuïtiewe denke van studente omtrent die aktueel (opeens) en potensieel (suksessief) oneindige is besonder kompleks. Individue kan op verskillende tye teenstrydige intuïtiewe gedagtes hê sonder om bewus te wees van kognitiewe konflik. Die problematiek van die aktueel oneindige en die gepaardgaande teenstrydige intuïtiewe kognisie behoort as vertrekpunt te dien in die onderrig van die begrip oneindigheid.

SUMMARY

A study of the philosophical and historical foundations of infinity highlights the problematic development of infinity. Aristotle distinguished between *potential* and *actual* infinity, but rejected the latter. Indeed, the interpretation of actual infinity leads to contradictions as seen in the paradoxes of Zeno. It is difficult for a human being to understand actual infinity. Our logical schemes are adapted to finite objects and events. Research shows that students focus primarily on infinity as a dynamic or neverending process. Individuals may have contradictory intuitive thoughts at different times without being aware of cognitive conflict. The intuitive thoughts of students about both the actual (at once) infinite and potential (successive) infinity are very complex. The problematic nature of actual infinity and the contradictory intuitive cognition should be the starting point in the teaching of the concept infinity.

Key words

- infinity
- the potential infinite (the successive infinite)
- the actual infinite (the at once infinite)
- limit
- irrational numbers
- fractals
- perspective drawing
- cardinality of sets
- embodied cognition
- conceptual metaphor

BEDANKINGS

Hiermee bedank ek die volgende:

- my studieleier, professor Dirk Wessels, vir sy leiding, insig en positiewe gesindheid.

- my man, René, vir sy geduld, ondersteuning en kreatiewe kritiek sonder wie hierdie verhandeling nie moontlik sou gewees het nie.

- my vriendin, dr Anita Redelinghuys, vir volgehoue aansporing en die deeglike proeflees van hierdie verhandeling.

- my kollega, Lizelle van Rooyen, vir taalversorging.

The infinite!

No other question has ever moved so profoundly
the spirit of man.

David Hilbert

DIE PROBLEMATIEK VAN DIE BEGRIP ONEINDIGHEID IN WISKUNDEONDERRIG EN DIE MANIFESTASIE DAARVAN IN IRRASIONALE GETALLE, FRAKTALE EN DIE WERK VAN ESCHER

INHOUDSOPGAWE

LYS VAN FIGURE

p.

HOOFSTUK 1

INLEIDENDE ORIËNTERING

1.1 AGTERGROND EN MOTIVERING

Die aarde is die mens se woonplek. Dit is deel van ‘n groep planete (die sonnestelsel) wat ongeveer 4560 miljoen jaar gelede ontstaan het uit gas en stof. Vanuit die buitenste ruimte lyk dit asof die aarde in die niet sweef, maar dit is deel van ‘n sterrestelsel. Die Melkweg is die beeld wat die mens het van hierdie sterrestelsel, vanaf sy ligging daarin. Daar word beraam dat ons sterrestelsel etlike honderd biljoen sterre bevat en dat dit van die een kant na die ander strek oor 100 000 ligjare. Tot en met 1920 was dit onbekend of daar ander sterrestelsels buiten ons sterrestelsel bestaan. Die Amerikaanse sterrekundige Edwin Hubble het vasgestel dat daar wel afsonderlike sterrestelsels bestaan. Die afstande tussen sterre in ons sterrestelsel is enorm, maar afstande tussen sterrestelsels is miljoene kere groter. Die Andromeda-sterrestelsel is die naaste groot sterrestelsel aan die aarde en dit is ongeveer twee en ‘n half miljoen ligjare ver. Die heelal bestaan uit uiterstes:

> In the central depths of a black hole an enormous mass is crushed to a minuscule size. At the moment of the big bang the whole of the universe erupted from a microscopic nugget whose size makes a grain of sand look colossal (Greene, 2003:4).

Wie op aarde verstaan hoeveel 100 000 ligjare is? Wat is twee en ‘n half miljoen ligjare? Begryp mense dit? Is oneindigheid ekwivalent aan groot getalle of enorme afstande? Verstaan die mens werklik wat oneindigheid beteken?

Oneindige afstande en ruimtes het filosowe en teoloë nog altyd gefassineer. Wiskundiges is deur die geskiedenis telkens gekonfronteer met die problematiek van die oneindige. Neem nou maar Zeno van Elea se paradokse. In een van Zeno se paradokse gee Achilles die skilpad ‘n voorsprong in ‘n resies. Elke keer wanneer Achilles die punt bereik waar die skilpad reeds was, het die skilpad al weer verder gevorder. Is dit vir Achilles moontlik om die skilpad in te haal? Indien wel, waarom ontstaan hier ‘n teenstrydigheid? Die teenstrydighede verdwyn wanneer die reis beskou word as ‘n limiet van eindigende onverdeelde reise, maar hoekom vind studente dit so moeilik om hierdie ‘verklaring’ van die paradoks te verstaan?

Die Grieke se ontdekking van irrasionale getalle deur middel van die onmeetbaarheid van die skuinssy van ‘n gelykbenige, reghoekige driehoek, het ‘n krisis in die geskiedenis van wiskunde ontketen. Is dit dan vreemd dat leerders in klaskamers so sukkel om te verstaan wat irrasionale getalle is?

Die mens voel gemaklik met iets wat nog nie ‘n einde bereik het nie. ‘n Mens kan die neem van ‘n volgende tree in jou verbeelding voorstel. Of jy kan selfs die volgende term in ‘n reeks visualiseer. ‘n Proses wat nooit ophou nie (soos om ‘n tree te gee, nog ‘n tree te gee, nog ‘n tree, ensovoorts) is deel van ons alledaagse bestaan. Daarom verstaan ‘n mens ‘n oneindige proses. Oneindigheid as ‘n geheel laat ‘n mens terugdeins. Wat beteken dit dat ‘n lynstuk (iets wat voltooid is) uit ‘n oneindige aantal elemente bestaan? Hoe kan ‘n mens die versameling natuurlike getalle as ‘n voltooide entiteit met oneindige elemente beskou? Aristoteles het onderskei tussen die aktueel (voltooide) oneindige en potensieel oneindige. Hy het geglo dat die potensieel oneindige bestaan aangesien dit in die natuur voorkom, maar hy het die bestaan van die aktueel oneindige verwerp. Aristoteles se siening omtrent die oneindige het vir jare lank heelwat aanhang geniet, maar Dedekind en Cantor (onder andere) het geglo dat die begrip oneindige versamelings op ‘n logiese grondslag geplaas moet word. Hilbert is beïnvloed deur Cantor en *Hilbert’s paradox of the Grand Hotel* illustreer hoe onbegryplik die begrip oneindigheid is. Hierdie vreemdheid en ongemak met die aktueel oneindige is duidelik teenwoordig in die geskiedenis van wiskunde en dit word verder bespreek in hoofstuk 2.

Die vraag in hierdie verhandeling is: Hoe word hierdie vreemdheid en ongemak met die begrip oneindigheid in wiskundeonderwys ervaar? Watter bydraes kan gemaak word tot die intuïsie van leerders en studente?

Die begrip oneindigheid speel ‘n belangrike rol in wiskundeonderwys. Sewe uit die dertien grondbegrippe in wiskunde kan geassosieer word met die begrip oneindigheid. Die elementêre grondbegrippe in wiskunde word in paragraaf 2.5 van hierdie verhandeling bespreek. Aspekte van oneindigheid is ook ‘n belangrike deel van die wiskundekurrikulum, soos blyk uit aspekte wat deel uitmaak daarvan, byvoorbeeld: (1) eindigende en repeterende desimale; (2) die begrip limiet; (3) fraktale; (4) irrasionale getalle, en (5) som tot oneindigheid.

Alhoewel mense ’n intuïtiewe begrip het omtrent oneindigheid, is dit vir studente moeilik om konsepte soos limiet, kontinuïteit, asimptoot en irrasionale getalle te verstaan. Filosowe, wiskundiges, wiskundige historici en wiskunde-navorsers het almal al geworstel om paradokse, teenstrydighede en kwessies rondom die begrip oneindigheid op te los. Alhoewel daar dikwels wiskundige oplossings vir hierdie probleme bestaan (soos byvoorbeeld: in Zeno se paradoks tussen Achilles en die skilpad kan ’n mens begryp hoe Achilles die reis wen deur die som van ’n oneindige ry te bepaal), is dit vir studente besonder moeilik om hierdie oplossings te verstaan (Dubinsky, 2005a:336).

Jan Bezuidenhout (2001:487) sê dat, alhoewel studente in hul eerste jaar somtyds limiete kan bereken en ook kan differensieer en integreer, hulle nie die verband tussen fundamentele konsepte (soos byvoorbeeld limiet, kontinuïteit, afgeleide en integrale) in differensiaalrekening begryp nie. Hoekom gebeur dit? Op watter manier is hierdie begrippe onderrig? Het die leerders slegs manipulasie-vaardighede geleer deur dril-oefeninge ten opsigte van limiet en afgeleide? Is daar in die klaskamer geleenthede geskep vir die leerder om meer diepsinnig te dink omtrent hoe alle aspekte van differensiasie verband hou? Is leerders in die laerskole geleidelik blootgestel aan die begrip oneindigheid deur middel van fraktale of die werk van MC Escher? Hoe sinvol en kreatief is die aanvanklike blootstelling van die kind aan die begrip oneindigheid? Begryp wiskundeonderwysers die rykdom van kreatiewe intuïtiewe gedagtes van hul leerders of studente omtrent oneindigheid? Poog wiskundeonderwysers om aan te sluit by die intuïtiewe gedagtes van leerders en studente? David Tall (1980:1) sê dat individue op verskillende tye klaarblyklik teenstrydige intuïtiewe gedagtes kan hê sonder om bewus te wees van kognitiewe konflik. Volgens Tall is daar teenstrydighede in die intuïtiewe gedagtes van studente omtrent oneindigheid. Neem wiskundeonderwysers hierdie komplekse intuïtiewe gedagtes van leerders en studente in ag? Is onderwysers bewus van die bydrae van intuïsie tot die leerervaring in wiskunde? Hou wiskundeonderwysers daarmee rekening dat godsdiens en kultuur ’n rol speel in die interpretasie van die begrip oneindigheid? Dit is logies dat daar by die bespreking van oneindigheid ’n godsdienstige perspektief ter sprake sal kom (Meroz, 1997:49).

Die problematiek van die begrip oneindigheid is teenwoordig in die filosofies-historiese ontwikkeling daarvan en in die teenstrydige intuïtiewe denke van leerders en studente. Boonop is pogings van navorsers om die problematiek van die begrip oneindigheid te oorkom, kontroversieel. Die navorser in hierdie studie ervaar self die probleme van leerders gereeld in die klaskamer.

1.2 PROBLEEMSTELLING

Die intuïtiewe gedagtes van leerders en studente omtrent die begrip oneindigheid is dat dit ’n onophoudelike proses is. Oneindigheid as ’n voltooide entiteit laat ’n mens ongemaklik voel aangesien dit nie deel is van ons alledaagse bestaan nie.

1.3 DOEL EN DOELWITTE

Die vrae wat in hierdie verhandeling beantwoord moet word, is: (1) Wat is die komplekse aard van leerders en studente se intuïsie omtrent die berip oneindigheid? (2) Met watter aspekte van die wiskundekurrikulum (wat verband hou met oneindigheid) word daar probleme ervaar? (3) Hoe vind die kognisie van die begrip oneindigheid plaas?

1.3.1 Doel

Die doel van hierdie studie is om die problematiek van oneindigheid in wiskundeonderwys te ondersoek en dit vind plaas aan die hand van die volgende doelwitte.

1.3.2 Doelwitte

- Eerstens word die filosofies-historiese fondamente van oneindigheid ondersoek (paragraaf 2.2) om sodoende ’n dieperliggende begrip daarvan te kry.
- Tweedens word die potensieel en aktueel oneindige gedefinieer (paragraaf 2.3).
- Derdens word die manifestasie van die begrip oneindigheid in irrasionale getalle, fraktale en die werk van Escher bespreek (paragraaf 2.6).
- Vierdens word ’n literatuurondersoek omtrent die problematiek van oneindigheid in wiskundeonderwys in hoofstuk 4 gedoen.

1.4 METODOLOGIE

Die aanvanklike literatuurstudie van hierdie verhandeling het gefokus op die filosofies-historiese fondamente van die begrip oneindigheid, die definisie van oneindigheid en die manifestasie van oneindigheid in irrasionale getalle, fraktale en die werk van MC Escher. Die navorsing bestaan hoofsaaklik uit ’n literatuurondersoek waarin die beskouings van gesaghebbende skrywers omtrent oneindigheid ondersoek is. ’n Bondige empiriese ondersoek is onderneem. Laasgenoemde dien as (1) illustrasie van die problematiek en (2) bevestiging van die teorieë wat spruit uit die literatuurondersoek. ’n Kwalitatiewe benadering is gevolg. Kwalitatiewe navorsing ontbloot die ervarings en persepsies van respondente in hul eie woorde. Die navorser wil die leefwêreld van die leerders of studente begryp. Vraelyste en ongestruktureerde onderhoude is gebruik om diepgaande insig te verkry omtrent studente se idee van oneindigheid. Ontleding van die data het plaasgevind deur middel van triangulasie. Verdere besonderhede omtrent die metodologie vir hierdie studie word in Hoofstuk 3 bespreek.

1.5 UITLEG VAN HOOFSTUKKE

In hoofstuk 2 word die begrip oneindigheid ontleed ten opsigte van die filosofiese en historiese fondamente. Oneindigheid word teoreties gedefinieer. Die kognisie van oneindigheid word aan die hand van die skrywers Lakoff en Núñez, Tall en Dubinsky bespreek. Daar word aangetoon watter plek oneindigheid as grondbegrip in wiskundeonderwys inneem. Daarna volg ‘n bespreking van die manifestasie van die oneindige in die werk van Escher, fraktale en irrasionale getalle. In hoofstuk 3 word die metodologie van hierdie studie uiteengesit. In hoofstuk 4 vind die interpretasie van die data plaas na aanleiding van die literatuurondersoek. In hoofstuk 5 volg ‘n paar aanbevelings en ‘n samevatting volg daarop.

HOOFSTUK 2

ANALISE VAN DIE BEGRIP ONEINDIGHEID

2.1 INLEIDING

Die doel van hierdie hoofstuk is om die begrip oneindigheid te analiseer. Alvorens die problematiek van die begrip oneindigheid in wiskundeonderwys indringend beskou kan word, moet ’n mens deeglike agtergrondskennis hê van hoe hierdie begrip vanaf die antieke tyd ontstaan en ontwikkel het. Sodanige kennis bied insig omtrent die problematiese aard van die begrip onder bespreking. In paragraaf 2.1 word aspekte uit die filosofie en geskiedenis, wat belangrik is vir hierdie verhandeling, beskou. Die wroeginge van die Grieke omtrent irrasionale getalle, die paradokse van Zeno, Aristoteles se verwerping van die aktueel oneindige en Newton (sowel as Leibniz) se werk ten opsigte van differensiasie en integrasie was belangrike elemente in die ontwikkelingsgeskiedenis van die begrip oneindigheid. Alhoewel godsdiens deurgaans in die geskiedenis ’n rol gespeel het in die interpretasie van die oneindige, was die oorgang na ’n ontologiese oneindigheid tydens die Renaissance ’n belangrike gebeurtenis. Die oorsprong van perspektieftekening, wat tydens die Renaissance ontwikkel het, word bespreek aangesien dit ’n rol speel in die werk van MC Escher. Perspektieftekening gaan gepaard met die gebruik van verdwyningspunte[1] en horisonlyne. Escher het heelwat uitgebrei op die gebruik van verdwyningspunte deur dit as toppunt (*zenith*) en voetpunt (*nadir*) te gebruik, maar daar word in paragraaf 2.6.1 meer hieroor gesê. In paragraaf 2.2 word die potensieel en aktueel oneindige teoreties gedefinieer en dit dien as kern vir die interpretasie daarvan vir die res van hierdie verhandeling. In paragraaf 2.3 word die kognisie van oneindigheid bespreek. Alhoewel die filosofies-historiese fondamente van oneindigheid die problematiek daaromtrent

[1] Die punt waar lyne (wat wegloop van die kyker) konvergeer.

uitwys, ontbloot die komplekse kognisie van oneindigheid hierdie problematiek nog verder. Hierdie bespreking dien as ’n belangrike uitgangspunt vir die interpretasie van die data in hoofstuk 4. In paragraaf 2.4 word daar vlugtig gekyk na hoe oneindigheid as grondbegrip deel vorm van wiskundeonderwys. Die begrip oneindigheid is ’n deurslaggewende element in die wiskundekurrikulum. In paragraaf 2.5 word die manifestasie van oneindigheid in die werk van MC Escher, asook fraktale en irrasionale getalle beskou. Laasgenoemde drie elemente was ’n onderdeel van die vraelys (sien Addendum A en B) wat vir die empiriese ondersoek gebruik is en dit kan ook dien as moontlike onderrigmateriaal soos kortliks bespreek in hoofstuk 5.

2.2 FILOSOFIESE EN HISTORIESE FONDAMENTE VAN ONEINDIGHEID

Oneindigheid het die mensdom reeds van die antieke tyd gefassineer. In die antieke tyd is die idee van oneindigheid beskou as ’n metafisiese, ongestruktureerde, chaotiese en onpeilbare diepte (Klass-Tsirulnikov & Katz, 2006:3). Pythagoras het geglo dat alles in die heelal in terme van getalle verklaar kan word. Die Atomiste het geglo dat materie bestaan uit ’n oneindige aantal onverdeelbare elemente. Parmenides en die Eleatiese skool, insluitende Zeno, het die Atomiste teengestaan. Zeno se paradokse het aangetoon dat die Atomistiese teorie lei tot teenstrydighede. Aristoteles het die potensieel oneindige[2] aanvaar, maar die aktueel oneindige[3] verwerp. In paragraaf 2.3 word definisies van die potensieel en aktueel oneindige meer volledig uiteengesit. ’n Studie van die filosofies-historiese fondamente van oneindigheid toon die problematiese ontwikkeling daarvan.

2.2.1 Die Ou Testament

In die Ou Testament word die almag van die Skepper besing, maar die onbeperktheid van Sy krag of die oneindigheid van Sy skepping word nie as problematies geskets nie (Bochner, 2003:1). Die Hebreeus van die Bybel het nie

[2] Die oneindigheid van ‘n proses wat nooi ophou nie.
[3] ‘n Statiese en voltooide oneindigheid wat as voorwerp beskou kan word.

’n woord gehad vir “oneindigheid” in die algemeen nie – dit het slegs woorde gehad vir bepaalde aspekte van oneindigheid. Die Hebreeuse woord *olam* word die meeste gebruik en dit dui op ewigheid. Hierdie ewigheid verwys na oneindigheid in tyd, sonder die inagneming van ruimtelikheid. Vergelyk ook die bespreking van die rol van godsdiens in die kognisie van oneindigheid in paragraaf 4.3.4.

Boyer (1959:15) verklaar dat daar geen gronde of rekords bestaan dat die Egiptenare oneindigheid of die infinitesimaal gebruik het nie. Die Grieke was die eerste om die begrip kontinue grootte op sistematiese wyse te analiseer. Hulle het ook begrippe ontwikkel wat beskou word as die oorsprong van die integraal en afgeleide.

2.2.2 Die Grieke

Die Grieke se standaardwoord vir oneindigheid is *apeiron* en dit beteken letterlik ‘sonder perke of limiete’. Uit Griekse poësie en prosa is dit duidelik dat die samelewing daar minder teokraties was as ’n mens dit vergelyk met die leefwyse volgens die Ou Testament in Die Bybel. Wanneer ’n mens die werke van Plato en Aristoteles beskou, is dit duidelik dat verskeie filosowe deelgeneem het aan die problematiek omtrent oneindigheid (Bochner, 2003:2).

> ....the study of infinity, in its various facets, had been from the first an all-Hellenic enterprise, in which virtually everybody had participated; …

Die ontdekking van irrasionale getalle het groot konsternasie veroorsaak onder die Pythagoreërs aangesien dit hul filosofie, dat getal die essensie van alle dinge is, laat wankel het (Burton,2007:117). Die Grieke het die term *logos,* wat ‘woord’ of ‘spraak’ beteken, vir die verhouding tussen twee heelgetalle gebruik. Toe onmeetbare lengtes as *alogos* beskryf is, het dit ‘n dubbele betekenis gekry, naamlik ‘nie ‘n verhouding nie’ en ‘nie om oor gepraat te word nie’. Die feit dat irrasionale getalle bestaan, was in daardie tyd ‘n gevaarlike geheim. Die eerste Pythagoreër wat hierdie onnoembare geheim aan ‘n buitestaander vertel het, is volgens ‘n legende vermoor deur hom van ‘n skip af te gooi sodat hy kon verdrink (Burton, 2007:118).

Eudoxus van Cnidos (408-355 vC) het ‘n positiewe bydrae gemaak tot hierdie krisis. Hy het die teorie betreffende verhouding ten opsigte van meetbare en onmeetbare hoeveelhede, hersien.

The immediate effect of Eudoxus’s approach was to drive mathematics into the hands of the geometers (Burton, 2007:118).

In die afwesigheid van ‘n suiwer rekenkundige teorie vir irrasionale getalle, is daar afstand gedoen van die primêre belang van die konsep getal en het meetkunde vir die volgende 2000 jaar die grondslag gevorm van alle teoretiese wiskunde. Die meetkundige algebra, ‘n teorie omtrent lynsegmente en oppervlaktes, in Euklides se boek II van *Elements* was die kulminasie van die Grieke se pogings om die irrasionale getal met behulp van meetkunde te hanteer. Richard Dedekind het in 1872 die teorie van irrasionale getalle op ‘n logiese fondament gevestig wat vry is van die invloed van meetkunde (Burton, 2007: 170).

Daar kan nie met sekerheid gesê word dat die Pythagoreërs die gebruik van die infinitesimaal[4] ingelei het nie. Die konsep infinitesimaal het deel geword van wiskundige denke deur middel van ’n leerstelling wat tydens die 5de eeu vC uitgebrei is deur Grieke wat geredeneer het omtrent die aard van die fisiese wêreld (Boyer, 1959:21). Na mislukte pogings in Ionië om ’n fundamentele element te vind waaruit alles gekonstrueer word, het die leerstelling van fisiese atomisme in Abdera ontstaan. Die Griekse atomis Democritus het die konsep van atomisme oorgedra na meetkunde (Boyer, 1959:21). Hy het geglo dat alle lyne oneindig verdeelbaar is (Boyer, 1959:22). Aangesien die meeste van

[4] Die woord infinitesimaal word deurgaans gebruik as ekwivalent vir die Engelse woord *infinitesimal* en dit beteken: oneindig klein of gering.

Democritus se werk verlore is, is dit moeilik om sy gedagtes te rekonstrueer. Volgens Boyer (1959:22) was Democritus wel geïnteresseerd in die begrip infinitesimaal. Al weet ons nie wat Democritus se gedagtes omtrent die aard van die konsep infinitesimaal was nie, het sy invloed voortgeleef. Die konsep *vaste infinitesimale grootte* het op hardnekkige wyse bly vassteek in die geskiedenis van wiskunde. Soms het die intuïtiewe benadering gehelp wanneer wiskundiges nie daarin kon slaag om op logiese wyse daarmee om te gaan nie. Die historiese ontwikkeling van die begrip infinitesimaal het uiteindelik 'n hoogtepunt bereik deur die totstandkoming van die begrippe afgeleide en integraal.

2.2.3 Zeno van Elea

Die Eleatiese denkskool was bekend met, en is moontlik beïnvloed deur, die wiskunde-filosofie van die Pythagoreërs. Die belangrikste element omtrent Parmenides (die leier van die Eleatiese denkskool) se filosofie is sy ontkenning van pluraliteit (Meroz, 1997:5). Deur pluraliteit te verwerp, verwerp 'n mens die moontlikheid van beweging aangesien beweging behels dat daar van een punt na 'n ander beweeg word (Meroz, 1997:12). Deur pluraliteit te aanvaar, aanvaar 'n mens dat daar verskeie wesens en punte in die heelal is. Daar is twee maniere waarop groothede binne die pluralistiese stelsel beskou kan word (Meroz, 1997:12) , naamlik:

- Die Atomistiese beskouing – elke verdeelbare eenheid (soos 'n lyn) bestaan uit 'n eindige hoeveelheid aantal onverdeelbare eenhede
- Die Oneindig-verdeelbare stelsels – elke eenheid bestaan uit verdeelbare eenhede wat verder oneindig verdeelbaar is

Die doel van Parmenides se leerstelling was om te bewys dat pluralisme onmoontlik is, of dat dit as gevolg van teenstrydighede nié bestaan nie. Die Eleatiese denkskool het egter 'n teenstander geword van die Phytagoreïese filosofie. Die Eleatiese skool het probeer om met slim dialektiek die basis van opponerende denkskole te vernietig. Parmenides het 'n monistiese benadering (in teenstelling met die atomistiese benadering) voorgestaan. Hy het geglo dat die wêreld ’n onveranderlike eenheid is. Zeno (gebore omstreeks 450 vC) was ’n volgeling van die filosoof Parmenides en was ‘n vooraanstaande lid van die Eleatiese denkskool. Blykbaar was Zeno oorspronklik ’n volgeling van Pythagoras (Burton, 2007:104).

Daar is dikwels gespekuleer omtrent die doel van Zeno se argumente. Was dit gemik teen die Pythagoreërs, die atomiste, of was dit bloot sofisme (drogrede)? Volgens Fischbein (2002:316) het Zeno geglo dat beweging slegs ‘n illusie is en het verskeie paradokse uiteengesit om dit te illustreer. Daar is egter wel rede om te glo dat Zeno se argumente te doen gehad het met ’n meer bepaalde doel (Boyer, 1959:24). Al was Zeno nóg ’n wiskundige, nóg ’n fisikus, wou hy moontlik die paradokse gebruik om aandag te vestig op (1) die dubbelsinnigheid van die Pythagoreïese definisie van ’n punt as eenheid met posisie en (2) die feit dat die Pythagoreërs nie duidelik onderskei het tussen die ruimtelike en fisiese nie. Pythagoreïese wetenskap en wiskunde was gemoeid met vorm en struktuur en nie met veranderlikheid nie. Zeno het geweet dat Achilles die wedloop met die skilpad kan wen, maar hy het deur sy paradoks aandag probeer vestig op teorieë omtrent die aard van ruimte en tyd wat in teenstelling was met mekaar (Burton, 2007:104). Hy het in sy eerste twee paradokse (die *dichotomy* en die *Achilles*) aangetoon dat logiese absurditeite onstaan as gevolg van die begrip ‘oneindige verdeelbaarheid’ van ruimte en tyd. Dié paradokse is verder gebaseer op die onmoontlikheid om die limiet van die som van ’n oneindige reeks intuïtief te begryp. Die vier paradokse kan maklik begryp word in terme van begrippe in differensiaalrekening. Alhoewel Zeno se argumente sy tydgenote gefnuik het, is die begrip ‘konvergente oneindige reeks’ grootliks die oplossing vir sy paradoks. Die paradoks berus gedeeltelik op die wanopvatting dat die som van ’n oneindige aantal afstande (sowel as die tydsduur) wat toenemend korter word ’n oneindige totaal is (Bochner, 2007:104). ’n Oneindige reeks mag egter ’n eindige som hê.

Volgens Boyer (1959:25) is daar egter geen logiese struikelblok in Zeno se eerste twee paradokse nie. Die mens se ongemak daarmee is die gevolg van sy onvermoë om in sy verbeelding die aard van die oneindige, as ‘n konvergente reeks (wat grondliggend is tot die presiese verduideliking van kontinuïteit), te begryp.

2.2.4 Atomisme

’n Paar toonaangewende teoretici in die antieke Griekse natuurfilosofie het geglo dat die heelal saamgestel is uit fisiese ‘atome’ wat letterlik onverdeelbaar is (Berryman, 2005:1). Hierdie filosowe het ’n sistematiese en omvattende natuurlike filosofie ontwikkel om die oorsprong van alles te verklaar deur die interaksie van onverdeelbare liggame (atome). Atome is partikels wat onverdeelbaar en ewig is (Seife, 2000:45). Hierdie afleiding van die atomiste het implikasies gehad vir Zeno se paradokse. Aangesien atome onverdeelbaar is, kom daar ’n stadium wanneer iets nie verder verdeelbaar is nie. Die verdeling van afstande in Zeno se paradoks (Achilles en die skilpad) kan nie op ’n oneindige wyse voortgaan nie. Achilles sal uiteindelik die ontwykende skilpad inhaal.

Oorwegings wat in fisika gelei het tot die atoomteorie, is op verskillende tye bygebring in die ontwikkeling van differensiaal- en integraalrekening in wiskunde:

> These made it appear probable that just as in the actual subdivision of matter (which has the appearance of being continuous) we arrive at ultimate particles or atoms, so also in continous mathematical magnitudes we may expect (by means of successive subdivisions carried on in thought) to obtain the smallest possible intervals of differentials (Boyer, 1959:12).

Aangesien die Griekse byvoeglike naamwoord *atomos* letterlik onverdeelbaar (*uncuttable)* beteken, is die geskiedenis van antieke atomisme nie alleen die geskiedenis van ‘n teorie betreffende die aard van materie nie. Dit is ook die geskiedenis van die idee dat enige soort grootheid (soos meetkundige verlenging, tyd, ensovoorts) uit onverdeelbare dele bestaan (Berryman, 2005:1).

2.2.5 Aristoteles (384-322 vC)

Volgens Bochner (2003:3-4) het Aristoteles by geleentheid gesuggereer dat die feit dat ’n mens in oneindigheid glo, kan spruit vanuit vyf bronne, naamlik: (1) die oneindigheid van tyd; (2) die verdeelbaarheid van ’n grootte; (3) dat die ewigdurendheid van ontwikkeling en vernietiging in die natuur slegs onderhou kan word indien daar ’n oneindige bron is waaruit geput kan word; (4) die feit dat enigiets wat beperk is, beperk moet word deur iets anders; en (5) die feit dat daar geen perk is aan ’n mens se denkvermoë wat die verstandelike toeskrywing van oneindigheid ten opsigte van getalle, groothede of dít wat buite die hemele is kan strem nie. Aristoteles het aanvaar dat die ontologiese heelal van Parmenides volledig maar ook eindig was. Alhoewel Parmenides dit só gevisualiseer het, was Aristoteles daarvan oortuig dat Parmenides se heelal eindig moes wees aangesien hy (Aristoteles) geglo het dat volledigheid noodwendig die teenoorgestelde van eindigheid impliseer. Parmenides se volmaakte of volledige heelal is vir ’n lang tyd geteologiseer en hoofsaaklik op ’n Christelike wyse (Bochner, 2003:25).

Aristoteles is ’n kontinuïs betreffende sy filosofiese benadering omtrent die natuur. Hy het (soos Zeno) die atomistiese beskouing verwerp (Meroz, 1997:15). Aristoteles se werk, in besonder die *Physics,* beskryf die klassieke beskouing van kontinuïteit, oneindige verdeelbaarheid en die probleme wat met hierdie konsepte geassosieer word. In teenstelling met die atomiste, het Aristoteles geglo dat die oneindige en die niet (asook zero) nie bestaan nie. Dit wil voorkom of Aristoteles se verwerping van die aktueel oneindige ten opsigte van groothede nie uitgebrei word na die idee van tyd nie aangesien hy glo dat daar in die verlede ’n oneindige aantal dae in die heelal was (geen begin). Hy het wel geglo aan die potensieel-oneindigheid van getalle en die oneindige verdeelbaarheid van ’n lynsegment (Meroz, 1997:16). Bochner (2003:15) beaam dit:

> Aristotle made the major pronouncement (*Physica*, Book 3, Ch.7) that a magnitude (*megethos*) may become infinitely small only potentially, but not acutally.

2.2.6 Archimedes (c. 287-212)

Archimedes se werk is ’n samevatting van Alexandrynse wiskunde. Hy is gebore op Sirakuse (’n Griekse nedersetting op die suidoostelike kus van Sicilië). In daardie tyd was Sirakuse die grootste stad in die Hellenistiese wêreld. Die *method of exhaustion* was die verteenwoordiging van die manier waarop die Grieke integraalrekening vooruitgeloop het. Die *method of exhaustion* word tradisioneel toegeskryf aan Eudoxus van Cnidos (390-337 vC), maar Euklides en Archimedes het dit dikwels gebruik en meer voordele daaruit geput (Burton, 2007:207).

2.2.7 Die Renaissance

Gedurende die tweeduisend jaar van die klassieke antieke tyd en die Middeleeue, is die problematiek van die oneindige en kontinuïteit aangepak op maniere wat as voorbereiding gedien het vir die wetenskaplike revolusie van die 17^{de} eeu (Kretzmann, 1982:7). Europa se ontwaking uit die Middeleeue het tot gevolg gehad dat die Aristoteliaanse fondament van die kerk vernietig is en dat die weg gebaan is vir die wetenskaplike omwenteling. Die oorgang vanaf ‘n teologies-georiënteerde oneindigheid tydens die Hellenistiese periode na ’n ontologiese oneindigheid was ’n natuurlike ontwikkeling.

Met die aanvang van die Renaissance is zero as ’n artistieke middel gebruik. Voor die 15^{de} eeu was skilderye en tekeninge hoofsaaklik plat en leweloos. Die beelde was verwronge en twee-dimensioneel aangesien kunstenaars nog nie geweet het hoe om zero in te span nie. Die Italiaanse argitek en ingenieur Filippo Brunelleschi was die eerste kunstenaar wat ’n reeks eksperimente uitgevoer het wat gelei het tot ’n wiskundige teorie omtrent perspektief (Dauben,2007:1). Daar word geglo dat die Baptisterium die oudste gebou in Florence (Italië) is. Die oorspronklike baptisterium van die 4^{de} of 5^{de} eeu is later vervang met ’n nuwe een (ongeveer die jaar 1059) in Romaanse styl. In 1415 het Brunelleschi die Baptisterium op ’n spieëltjie geverf. Om aan te toon dat sy skildery ’n replika was van die werklike gebou, het hy ’n loergaatjie in die spieël geboor en daardeur gekyk na die Baptisterium. Hy het die werklike gebou vergelyk met sy skildery. Op hierdie wyse het Brunelleschi op eksperimentele wyse bepaal hoe om ’n struktuur te analiseer sodat drie dimensies herlei kan word tot twee dimensies. Brunelleschi het besef dat die sentrale verdwyningspunt[5] die belangrike element is in die onderliggende wiskundige stelsel wat gebruik word om hierdie herleiding te bewerkstellig. Die verdwyningspunt het ook die horisonlyn bepaal. Brunelleschi het ‘n verdwyningspunt geplaas in sy tekening van die bekende Florentynse gebou (*The Baptistery*). Hierdie verdwyningspunt is reg bokant enige van die deure wat sigbaar is in die volgende illustrasie. Die horisonlyn gaan deur die verdwyningspunt en is ewewydig met die onderkant van die deur.

[5] *Vanishing point* word in hierdie verhandeling deurgaans vertaal met ‘verdwyningspunt’.

Figuur 2.1 Die Baptisterium – Florence, Italië

Die Italiaanse kunstenaar Masaccio (1401-1428) het waarskynlik die tegnieke van perspektief by Brunelleschi geleer. Die Heilige Drie-eenheid is een van sy bekendste werke. Die verdwyningspunt in hierdie werk is aan die voet van die kruis en die horisonlyn gaan ook daardeur.

Figuur 2.2 Die Heilige Drie-eenheid (*Masaccio, c.1427)*

Bochner (2003:19) definieer die verdwyningspunt as ’n bepaalde konkrete punt wat ’n plek verteenwoordig wat oneindig ver is in die onderliggende meetkunde. Die zero-dimensionele objek, die verdwyningspunt, is ’n infinitesimale stippel op die skilderdoek wat ’n plek verteenwoordig wat oneindig ver van die kyker is. Namate die voorwerpe al hoe verder weg is van die kyker af, hoe meer word hierdie voorwerpe saamgepers tot ’n verdwyningspunt. Hierdie verdwyningspunt in die middel van die skildery bevat ’n oneindige ruimte (Seife, 2000:86). Die verdwyningspunt het die twee-dimensionele tekening van ’n Florentynse gebou verander in ’n volmaakte simulasie van ’n drie-dimensionele gebou. Zero en oneindigheid is aaneengeskakel in die verdwyningspunt. Zero het die kuns-wêreld getransformeer en sommige kunstenaars van die 15de eeu het amateur-wiskundiges geword.

2.2.8 Die 16de en 17de eeu

Zero en die oneindige was die middelpunt van filosofiese argumente tydens die 16de en 17de eeu. Die Katolieke Kerk het op vurige wyse zero en die niet probeer verwerp. René Descartes, ’n Jesuïet wat in 1596 gebore is, is ook vasgevang tussen die Aristoteliaanse beskouing en die nuwe filosofieë wat zero, die niet, oneindigheid en die oneindige omvat het. Descartes het die idee van die niet verwerp. Hy het zero in die middel van die getallelyn en sy koördinaatstelsel geplaas. Descartes was, soos Pythagoras, ’n wiskundige en filosoof. Descartes het geglo dat niks uit niks geskep kan word nie. Om hierdie rede bestaan alle filosofieë, toekomstige idees en konsepte reeds in die mens se brein wanneer hy gebore word. Die brein ontsluit alles deur die proses van leer. Descartes het geglo dat die mens ’n konsep van ’n oneindige, volmaakte wese in die brein het. Om laasgenoemde rede moet hierdie oneindige en volmaakte persoon, God, bestaan. Alle ander wesens het ’n eindige lewe en hulle lê iewers tussen God en zero. Om hierdie rede is die mens ’n samestelling van oneindigheid en zero.

2.2.9 John Wallis (1626-1703)

Die Engelsman John Wallis was waarskynlik die vaardigste wiskundige wat in die periode tussen Descartes en Newton 'n bydrae gelewer het (Burton, 2007:384). Sy werk *Arithmetica Infinitorum* is in 1655 gepubliseer. In hierdie publikasie verskyn die simbool ∞ vir oneindigheid vir die eerste keer in druk.

2.2.10 Isaac Newton en Gotfried Leibniz

Die oorsprong van differensiaal- en integraalrekening is te vinde in die logiese struikelblokke wat die antieke Griekse wiskundiges ondervind het in hul poging om hul intuïtiewe gedagtes omtrent die verhoudings van lyne te verwoord (Boyer, 1959:4). Hulle het vaagweg besef dat hierdie verhoudings kontinu is in terme van getalle wat hulle as diskreet beskou het. Laasgenoemde het aanleiding gegee tot die logies onbevredigende (maar intuïtief aantreklike) begrip infinitesimaal (oneindig klein of gering). Griekse rigoristiese denke het nietemin die oneindig kleine nie meetkundig probeer demonstreer nie, maar het die omslagtige metode van uitputting (*method of exhaustion*) gebruik. Probleme ten opsigte van veranderlikheid is nie op kwantitatiewe wyse deur Griekse wetenskaplikes benader nie (Boyer, 1959:4). Geen metode is ontwikkel wat dieselfde kon doen vir kinematiek (bewegingskunde) as wat die *method of exhaustion* vir meetkunde gedoen het nie. Die kwantitatiewe studie van veranderlikheid is tydens die 14^{de} eeu onderneem deur Skolastiese filosowe (Boyer, 1959:4). Laasgenoemde se benadering was grootliks dialekties, maar grafiese demonstrasie het ook voorgekom. Hierdie studie-metode het die inleiding tot analitiese meetkunde en die sistematiese voorstelling van veranderlike groothede moontlik gemaak. Die toepassing van hierdie nuwe soort analise, tesame met die gebruik van die gesuggereerde infinitesimaal en die meer uitgebreide toepassing van numeriese begrippe, het gelei tot die algoritmes van Newton en Leibniz waaruit differensiaal- en integraalrekening (onder andere) saamgestel is.

Isaac Newton (1642-1727) het in sy werk *Principia* die beginsels van differensiasie gedefinieer. Gotfried Leibniz (1646-1716) het onafhanklik van

Newton ook differensiasie bestudeer. Die konsep infinitesimaal (oneindig klein of gering) was vir Newton 'n verleentheid terwyl Leibniz hom verlustig het in die uitdaging daarvan (Seife, 2000:122). Leibniz het die notasie *dx* gebruik om 'n oneindig klein deeltjie van x aan te dui. Beide Leibniz en Newton het die metafoor, dat oombliklike verandering gelyk is aan gemiddelde verandering oor 'n oneindig klein interval, gebruik. Die oneindig klein getal wat kleiner is as enige noembare positiewe getal was vir die meeste wiskundiges van daardie tyd 'n ondenkbare konsep.

2.2.11 D'Alembert (1717-1783)

Die wiskundige verduidelikings van Zeno se paradokse is normaalweg gegrond op die konsep limiet (Meroz, 1997:29). D'Alembert het besef dat die Achilles-paradoks verdwyn wanneer die *limiet* van die reis beskou word. Die reis, sowel as die bestemming, moet in ag geneem word. In plaas daarvan om aan die reis te dink as 'n som van oneindige dele, word daaraan gedink as 'n limiet van eindigende onderverdeelde reise (Seife, 2000:128):

1^ste^ reis: 1

2^de^ reis: $1 + ½$

3^de^ reis: $1 + ½ + ¼$

Elkeen van hierdie sub-reise is eindigend en goed gedefinieer. Oneindigheid is nie ter sprake nie. Dít wat d'Alembert informeel gedoen het, is later deur die Fransman Augustin Cauchy, die Tsjeg Bernhard Bolzano en die Duitser Karl Weierstrass geformuleer deur die oneindige som $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + (\frac{1}{2})^n + ...$ te herskryf as die uitdrukking: limiet van $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + (\frac{1}{2})^n$ waar n na ∞ strewe. Deur 'limiet' voor die reeks aan te bring, word die proses en die doel (bestemming) van mekaar geskei.

Tog het nóg Gauss (1777-1855), nóg D'Alembert die konsep kontinuïteit regtig goed verstaan (Stillwell, 2002:267). Bochner (2003:16) glo ook dat Newton, Lebniz, Euler, Lagrange en selfs Carl Friedrich Gauss nie in staat was om op bevredigende wyse in hul eie woorde te kon sê of 'n oneindige reeks konvergent is of nié. Die begrip limiet het geleidelik ontwikkel vanuit die Grieke se metode van uitputting (*exhaustion*) totdat dit deur Newton in die *Principia* beskryf is. Robins, D'Alembert en L'Huiler het meer uitdruklik gewerk met die basiese konsep van differensiasie en integrasie (Boyer, 1959:271). Vir 'n geruime tyd is die konsep limiet nie presies geformuleer nie. Die rede hiervoor was dat dit gefundeer was in ruimtelike intuïsie.

2.2.12 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Cauchy (1789-1857) het probeer om lig te werp op die konsepte funksie, limiet en kontinuïteit:

> With Cauchy, it may safely be said, the fundamental concepts of the calculus received a rigorous formulation (Boyer, 1959:282).

Boyer (1959:282) gaan voort en sê dat Cauchy beskou word as die grondlegger van differensiaal- en integraalrekening volgens die hedendaagse siening daarvan. Hy het die teorie van kontinuïteit en oneindige reekse, die afgeleide en integraal gefundeer op 'n duidelike definisie van die konsep limiet. Aangesien Cauchy nie met die reële getallestelsel gewerk het nie, het daar baie onbeantwoorde vrae ontstaan wat eers met die werk van Georg Cantor ten volle beantwoord kon word. Cantor het belanggestel in hierdie vrae en die doel van sy versamelingsteorie was om aktuele oneindigheid op 'n stewige logiese en wiskundige grondslag te plaas (Meroz, 1997:30).

Die begrip oneindigheid het 'n lang en dramatiese geskiedenis in die filosofie en wiskunde (Fischbein, 2002:309). Georg Cantor se skepping van die teorie van versamelings en transfiniete getalle tussen 1870 en 1890 was 'n belangrike gebeurtenis in die historiese ontwikkeling van die begrip oneindigheid. Dit was 'n katalitiese gebeurtenis, maar Cantor se voorgangers (soos Cauchy, Abel, Bolzano, Hankel en Wierstrass) het ook bydraes gelewer. Die begrip limiet het vir ’n lang tyd grootliks ruimtelik gebly, maar in die hande van Cauchy het dit (soos by Bolzano) duidelik en beslis rekenkundig (numeries) geword (Boyer, 1959:272). Dit is ook belangrik om daarop te let dat die skeiding tussen oneindigheid in wiskunde en oneindigheid in fisika tydens die 19de eeu plaasgevind het (Bochner, 2003:6). Hierdie proses is tydens die 20ste eeu voltooi.

2.2.13 Georg Cantor (1845-1918)

Cantor is gedurende 1845 in Rusland (St. Petersburg) gebore, maar hy het die grootste gedeelte van sy lewe in Duitsland deurgebring. By die Universiteit in Halle (suid van Berlyn) het die wiskundige Heinrich Heine vir Cantor uitgedaag om die uniekheid van ’n funksie-voorstelling van ’n trigonometriese reeks (’n veralgemening van die Fourier-reeks) te bewys (Hawking, 2005:966). In ’n reeks referate het Cantor ’n oorsig gegee omtrent die geskiedenis van die oneindige, vanaf Democritus tot Dedekind. Hierdie navorsing van Cantor het aanleiding gegee tot sy studie omtrent die oneindige tydens die jare rondom 1870.

Georg Cantor (en andere) het tydens die 19de eeu oneindigheid direk gelegitimeer.

The master anatomist of the infinite was Georg Cantor (Seife, 2000:147).

Bell (2005:15) beskryf Georg Cantor as ’n visioenêre rekenkundige. Cantor se analise van die kontinuum in terme van ’n oneindige versameling punte het gelei tot sy teorie omtrent transfiniete getalle. Cantor het met laasgenoemde teorie ’n weg gebaan vir die begrip algemene abstrakte versameling en sodoende weggebreek van die meetkundige oorsprong van ’n versameling wat bestaan uit punte (Bell, 2005:15):

> For Cantor, who began as a number-theorist, and throughout his career cleaved to the discrete, it was numbers, rather than geometric points, that possessed objective significance.

Cantor het bo sy voorgangers uitgestyg deur ’n sogenaamde ‘topologiese’ definisie van die kontinuum te formuleer (Bell, 2005:16). Die belangrike nuwe element in Cantor se benadering tot die oneindige is sy verontagsaming van kontinuïteit in die sin van meetkundige lyne en dinamiese prosesse (Jahnke, 2001:193).

Richard Dedekind (1831-1916) het die belangrike stap geneem deur te besluit hoe die oneindige herken word, in plaas daarvan om die oneindige te konstrueer. Dedekind het die natuurlike getalle {0;1;2;3;4;.....} as die model-voorbeeld van ’n oneindige versameling beskou en het ’n versameling as oneindig gedefinieer indien die natuurlike getalle in ’n een-tot-een relasie met daardie versameling, of ’n deelversameling daarvan, geplaas kan word. Na aanleiding van Dedekind se werk, het Cantor twee vrae gevra (Hawking, 2005:966):

- Is oneindigheid herkenbaar sonder dat daar verwys word na die natuurlike getalle?
- Is daar verskillende grade van oneindigheid?

Cantor het die eerste vraag beantwoord deur ’n versameling as oneindig te definieer indien dit in ’n een-tot-een relasie geplaas kan word met ’n ware deelversameling van die versameling self.

Cantor se deurslaggewende werk het eintlik om die tweede vraag gewentel. Met sy antwoord op die eerste vraag het hy die oneindige meer algemeen gemaak as slegs die natuurlike getalle. Op hierdie manier het Cantor die moontlikheid van verskillende grade van oneindigheid geskep (Hawking, 2005:967).

Die ontdekking van telbare en ontelbare versamelings was vir Cantor die motief om die begrip kardinaalgetal te definieer (Jahnke, 2001:178). Cantor het onderskei tussen die kardinaalgetal (aantal elemente) en die rangorde in die versameling. Hy het opgemerk dat die positiewe en negatiewe heelgetalle dieselfde aantal elemente (kardinaal-getal) het. Die rangorde verskil in dié sin dat daar ’n eerste positiewe heelgetal is, maar geen laaste een nie. Daar is ’n laaste negatiewe heelgetal, maar nie ’n eerste nie. Cantor het Hebreeuse letters gebruik om kardinaalgetalle aan te dui. Die Hebreeuse letter $\aleph_0$ (Aleph nul) verteenwoordig die eerste oneindige kardinaal. Griekse letters verteenwoordig rangorde-tipes. Die Griekse letter ω dui die rangorde-tipe van ’n versameling soos die positiewe heelgetalle met ’n eerste element, maar geen laaste element nie. Die simbool ω dui die rangorde-tipe aan van ’n versameling soos die negatiewe heelgetalle met ’n laaste element, maar geen eerste element nie.

Cantor het geglo dat daar slegs twee tipes oneindige deelversamelings (*those equinumerous to real numbers and those equinumerous to the integers*) van die reële getalle bestaan, maar hy kon dit nie bewys nie. Is daar meer tipes deelversamelings tussen hierdie genoemde twee? Hierdie veronderstelling *Cantor’s Continuum Hypothesis* is ten spyte van vele pogings van wiskudiges nog nie as waar of onwaar bewys nie, al is daar aksioma’s tot Cantor se versamelingsteorie bygevoeg (Hawking, 2005:969). Ironies genoeg:

> Georg Cantor scaled the peaks of infinity and then plunged into the deepest abysses of the mind: mental depression (Hawking, 2005:965).

2.3 AKTUELE EN POTENSIËLE ONEINDIGHEID

Die doel van hierdie afdeling is om oneindigheid te definieer. Die problematiek van aktuele en potensiële oneindigheid het duidelik geblyk uit die geskiedkundige verloop daarvan (paragraaf 2.2). Enkele gedagtes omtrent die filosofiese agtergrond van die potensieel en aktueel oneindige word bespreek alvorens daar tot definisies oorgegaan word in paragraaf 2.3.2.

2.3.1 Filosofiese agtergrond van die potensieel en aktueel oneindige

Dit blyk duidelik uit paragraaf 2.2 dat oneindigheid filosowe en wiskundiges in die geskiedenis deurentyd gefassineer het. Zeno het aangetoon dat paradokse ontstaan wanneer ’n mens die beskouing het dat ruimte en tyd oneindig verdeelbaar is. Die atomistiese benadering, dat ruimte en tyd bestaan uit onverdeelbare elemente, het ook gelei tot paradokse. Afgesien van laasgenoemde probleme het wiskundiges tot ná die 17de eeuse ontwikkeling van differensiaal- en integraalrekening volgehou met die gebruik van ’n verskeidenheid metodes wat die infinitesimaal en onverdeelbaarheid behels (Tall & Tirosh, 2001:129). Aristoteles se tweeledige oneindigheid (potensieel/aktueel) het die beskouing omtrent die oneindige vir eeue lank gedomineer (Dubinsky, 2005a:342). Kant (1724-1804) het (byvoorbeeld) geglo dat die mens ’n eindige wese in ’n oneindige wêreld is. Kant het omtrent die wêreld gedink in metafisiese terme – as onafhanklik van die mens en ’n absolute voltooide verenigde geheel. Hy het geredeneer dat die mens inherent eindig is en dat hy nie die geheel kan begryp nie.

It appears that Kant, and possibly Aristotle, may have believed that an infinite process can exist as a totality (the metaphysical whole), but it cannot be conceived by human beings (Dubinsky, 2005a:342).

Dubinsky (2005a:342) gaan voort en sê dat meer kontemporêre denkers soos Poincaré (1854-1912) grootliks Aristoteliaanse beskouings gehad het.

Ten spyte van die groot aanhang wat Aristoteles deur die eeue gehad het, was daar ook kampvegters vir die aktueel oneindige. Die rasionaliste het die aanvaarding van die aktueel oneindige bepleit. Hulle het geglo dat dit moontlik was om ’n mens se eindigheid te transendeer aangesien die mens nie alleen gebonde is deur fisiese beperkings nie (Dubinsky, 2005a:343). ’n Vroeë kampvegter vir die aktueel oneindige was Rabbi Hasdai Crescas (1340-1410) wat denkers soos Galileo (1564-1642) en Bolzano (1741-1848) kon beïnvloed het. Vele rasionaliste het hulle op hul godsdiens beroep om die bestaan van die aktuele oneindigheid te regverdig. In Hoofstuk 4 word dit ook duidelik watter invloed kultuur en godsdiens het op die interpretasie van oneindigheid.

Met die aanvang van die 19de eeu is infinitesimaal-metodes nog algemeen gebruik. Richard Dedekind (1831-1916) se begrip van die reële getalle het gesuggereer dat die reële lyn bestaan uit rasionale en irrasionale getalle, maar dat daar nie plek is vir die infinitesimale nie. Bernhard Riemann (1826-1866) se werk het bevestig dat die infinitesimale nie inpas by die reële getallestelsel nie.

Honderde jare het verloop waartydens verskeie opvattings omtrent oneindigheid ’n rol gespeel het. Laasgenoemde opvattings, teenstrydighede en probleme met die infintesimaal het teen die einde van die 19de eeu gelei tot Cantor se ontwikkeling van ’n teorie omtrent oneindige kardinale (1895). Cantor het die teoretiese bestaan van die infinitesimale ontken. Cantor het hom vasgeloop teen die gramskap van Leopold Kronecker (1823-1891). Laasgenoemde het Cantor daarvan beskuldig het dat hy daarop aanspraak maak dat sekere wiskundige objekte (soos kardinale oneindigheid) bestaan sonder dat hy aantoon hoe dit gekonstrueer kan word (Tall, 2001:200). Kronecker se beskouing het goed ingepas by die skool van **intuïsionisme** wat tydens die vroeë 20ste eeu onder leiding van Brouwer gestaan het.

Buiten bogenoemde intuïsionisme het daar twee ander denkskole ontstaan. Beide hierdie denkskole het aanvanklik benaderings gehad wat formele definisies van begrippe betreffende oneindigheid ingesluit het. Hilbert het tydens 1900 gesê dat hy glo aan die formele benadering **(formalisme)** tot wiskunde deur middel van die aksiomatiese metode. Hierdie benadering behels ’n eindige aantal aksioma’s wat dien as ’n fondament vir ’n bepaalde teorie (Tall, 2001:200). Vir Hilbert het dit nie saak gemaak wat presies begrippe soos oneindige kardinale ís nie - die konsekwentheid van die aksiomatiese teorie wat grondliggend is aan hierdie begrippe was vir hom belangrik.

Die derde denkskool was dié van **logisisme** onder leiding van Bertrand Russell, Gottlieb Frege en andere. Volgens die logisistiese benadering moes wiskundige begrippe in terme van suiwer logika gedefinieer word.

Al drie bogenoemde denkskole se teorieë het probleme opgelewer. Die skool van intuïsionisme het geweier om bewyse met behulp van kontradiksies te gebruik alhoewel dit 'n belangrike metode tydens 20ste eeuse wiskunde was. Russell het inkonsekwenthede in Cantor se teorie uitgewys.

2.3.2 Die aktueel en potensieel oneindige

Die antieke Griekse term vir die potensieel of onegte (*improper*) oneindige was **apeiron** (onbeperk of onbepaald) in teenstelling met die aktueel of eintlike (ware) oneindige wat deur die term **aphorismenon** aangedui is (Mückenheim, 2007:1). **Apeiron** is die teenoorgestelde van iets wat 'n **peras** (perk) het.

Volgens Turchin (1991:1) bestaan daar in wiskunde en filosofie twee begrippe van oneindigheid (vergelyk ook paragraaf 2.3.1), naamlik:

- **Potensiële oneindigheid**: die oneindigheid van 'n proses wat nooit ophou nie
- **Aktuele oneindigheid**: 'n statiese en voltooide oneindigheid wat as voorwerp beskou kan word

Oneindige stelsels van wiskundige objekte (soos die natuurlike of reële getalle) kan nie bloot getel word soos in die geval van 'n eindige stelsel van objekte nie:

> It would obviously be absurd for anyone to claim to have "formed" the set of natural numbers by actually counting "all" of them in succession (Kolmogorov, 2001:3)

Die bestudering van die versameling heelgetalle behels, onder andere, die voortbrenging van die elemente deur die oorgang van n na $n+1$. Kolmogorov (2001:3) gaan voort en sê dat selfs die bestudering van 'n reële getal lei tot die bestudering van die vorming van die opeenvolgende benaderde waardes. Die bestudering van die versameling reële getalle (as geheel) behels die bestudering van die algemene eienskappe van die vormingsproses van die elemente daarvan. Die oneindigheid van die natuurlike getallestelsel of reële getallestelsel (die kontinuum) is in hierdie sin bloot 'n **potensiële oneindigheid**. Die teenoorgestelde beskouing van potensiële oneindigheid behels ‘n oneindige versameling as **aktueel** gedefinieer, afgesien van die vormingsproses (Kolmogorov, 2001:3). Op hierdie manier word daar onderskei tussen oneindige versamelings self en die vormingsproses daarvan.

2.3.2.1 Potensieel oneindige

Nagornyi (2001:1) verwys na die *Abstraction of potential realizability* en beskryf dit as ‘n wiskundige idealisering wat verwant is aan ‘n bepaalde vorm van die begrip oneindigheid in wiskunde, naamlik potensiële oneindigheid. Wanneer dit toegepas word op konstruktiewe prosesse wat in beginsel onbepaald uitgebrei word (soos byvoorbeeld die opeenvolgende voortbrenging van positiewe heelgetalle vanaf zero), behels dit die abstraksie van potensiële *realizability*:

> ... ignoring any possible spatial, temporal or material obstacles to the realization of each successive step of the process, and to consider each step as potentially realizable (Nagornyi, 2001:1).

Bogenoemde toepassing kom daarop neer dat (in genoemde voorbeeld) veronderstel word dat ‘n eenheid by enige natuurlike getel kan word, met ander woorde dat dit byvoorbeeld moontlik is om die som van twee natuurlike getalle te bepaal. Dit impliseer nié dat die natuurlike opeenvolging van die getalle as ’n aktueel oneindige objek bestaan nie.

Turchin (1991:1) se beskrywing van die **potensieel oneindige** stem ooreen met voorafgaande beskouing van Nagornyi. ’n Proses word beëindig wanneer dit ’n bepaalde stadium bereik. ’n Mens kan die eindigende stadium só definieer dat dit nooit plaasvind nie. Laasgenoemde is ’n abstraksie: daar is geabstraheer vanaf die praktiese onmoontlikheid om ’n werklike proses oneindig te laat voortgaan. Binne hierdie abstraksie, afgesien van hoe lank die proses reeds aan die gang is, is dit duidelik wat in die volgende stap sal plaasvind. Om laasgenoemde rede word hierdie oneindigheid **potensieel** genoem:

At every specific stage the process involves no more than quite a finite reality; it is infinite only potentially (Turchin, 1991:1)

2.3.2.2 Die aktueel oneindige

Op intuïtiewe vlak kan ‘n mens nie ‘n denkbeeld vorm van enigiets wat as aktueel oneindig sal kwalifiseer nie (Turchin, 1991). Die mens het nog nooit die aktueel oneindige as sodanig ervaar nie. Wanneer ’n mens aan ’n voorbeeld van oneindigheid dink, soos die oneindige ruimte, is ’n mens se voorstelling dié van ’n proses waarvolgens daar van ’n punt tot ’n volgende punt beweeg sonder enige einde in sig. Laasgenoemde is potensieel en nié aktueel nie.

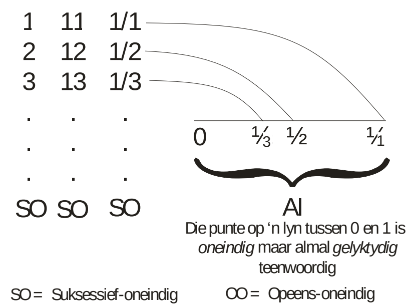
Nagornyi (2001:1) sê dat abstraksie van die aktueel oneindige toegepas kan word op konstruktiewe prosesse van potensieel oneindige tydsduur (byvoorbeeld die voortbrenging van opeenvolgende positiewe heelgetalle vanaf zero). Hierdie abstrahering behels die ignorering van die feit dat sodanige prosesse nie in beginsel ophou nie. Verder beteken dit dat die resultate van sodanige prosesse oorweeg word op die veronderstelling dat hul (die prosesse) beëindig is, met ander woorde dat die versameling objekte voortgebring is. Die resulterende versamelings (objekte) word kognitief beskou as aktueel voltooide of klaargemaakte objekte. In die filosofie van wiskunde behels die abstraksie van die aktueel oneindige die aanname van oneindige entiteite (soos byvoorbeeld die versameling van alle natuurlike getalle of ’n arbitrêre opeenvolging van rasionale getalle) as gegewe voorwerpe (Mückenheim, 2007:1).

Nagornyi (2001:1) wys ook daarop dat die aanvaarding van die abstraksie van die aktuele oneindigheid logies lei tot die aanvaarding van die *excluded middle* as ’n logiese beginsel. Abstraksie van die aktuele oneindigheid is besonder belangrik in die konstruksie van wiskunde wat gegrond is op die versamelingsteorie soos dit deur Cantor daargestel is. Georg Cantor het besluit dat dit moontlik is vir natuurlike getalle en reële getalle om bepaalde of presiese versamelings te wees.

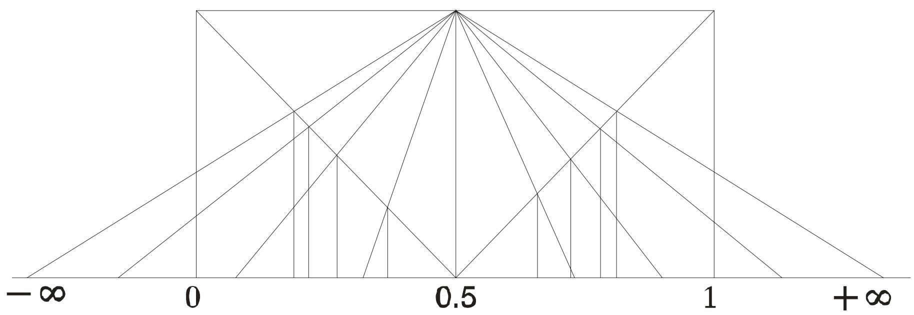
Mückenheim (2007:1) gee die volgende definisie van die **aktueel oneindige:**

An actual infinity is something which is completed and definite and consists of infinitely many elements.

Terwyl daar veronderstel word dat al die elemente van ‘n aktueel oneindige versameling saam en tegelykertyd bestaan, bestaan die elemente van ’n potensieel oneindige ry slegs opeenvolgend met die verloop van tyd (*exists over time*). Strauss (2006:48) glo dat, aangesien die potensieel oneindige onder andere ’n opeenvolging van getalle impliseer, dit verkieslik met die term **suksessief oneindige** aangedui moet word. Die aktueel oneindige behoort verkieslik deur die term **opeens oneindige** aangedui te word. Die opeens oneindige moet nie gesien word as die voltooiing van ’n eindelose proses nie (Strauss, 2006:55). Die opeens oneindige kan op die volgende eenvoudige wyse ruimtelik voorgestel word (Strauss:2006:57):



Die volgende ruimtelike voorstelling maak dit volkome duidelik dat daar niks teenstrydig is in die idee van die opeens oneindige nie. Dit dui aan dat daar tussen minus en plus oneindig net soveel punte is as tussen 0 en 1 (Strauss:1969:148):



Die wiskundige betekenis van die term *aktueel* in die *aktueel oneindige* is sinoniem met bepaald/presies, maar dit impliseer nie die fisiese bestaan daarvan nie. Die vraag of natuurlike of reële getalle bepaalde versamelings is, is onafhanklik van die vraag of oneindige voorwerpe aktueel bestaan in die natuur (Mückenheim, 2007:1)

2.4 DIE KOGNISIE VAN ONEINDIGHEID

Uit die voorafgaande is dit duidelik hoe kompleks dit is om te onderskei tussen die potensieel en aktueel oneindige. In hierdie afdeling word verskillende beskouings omtrent oneindigheid vanuit ‘n kognitiewe perspektief bespreek.

Gedurende die afgelope dekade het verskeie navorsers in wiskundeonderwys die beliggaamde (*embodied*) aard van die verstaan van wiskunde beklemtoon (Schiralli & Sinclair, 2003:79). Hierdie navorsers het gepoog om die heersende, konvensionele beskouings in sielkunde, filosofie - en hoe studente wiskunde leer - te vervang. Sensor-motoriese aksie speel, volgens hierdie navorsers, ’n kritieke rol in wiskunde-aktiwiteite. Die groot stryd waarmee hierdie navorsers gekonfronteer is, was om te verduidelik hoe abstrakte, formele wiskunde-idees kan voortspruit uit konkrete sensor-motoriese ervarings (Schiralli & Sinclair, 2003:79). Die rol van metafoor in die betekenis van wiskunde het belowende oplossings gebied.

Alhoewel letterkunde grootliks beskou is as die toepaslike gebied vir metaforiese uitdrukking, het skrywers soos Pimm (1987:11-12) verklaar dat die metafoor sentraal staan in die uitdrukking van betekenis in wiskunde op dieselfde wyse as wat dit die uitdrukking is van betekenis in alledaagse taal. Ander skrywers, soos Presmeg (1992), het hulle by Pimm geskaar (Schiralli & Sinclair, 2003:79). Lakoff en Núñez (2000) het gepoog om op sistematiese wyse te verduidelik hoe die metaforiese proses in wiskunde voorkom. Hulle (Lakoff en Núñez) het drie aannames gemaak wat gefundeer is in verwante navorsing omtrent kognitiewe wetenskap, naamlik: (1) alles wat die mens weet word op ’n manier afgelei van sensor-motoriese ervarings; (2) belangrike aspekte van ons denke is nie toeganklik as bewussyn nie; en (3) die mens verstaan deur middel van konseptuele metafore (Schiralli & Sinclair, 2003:79-80).

Lakoff en Núñez se boek *Where Mathematics comes From: How the embodied mind brings mathematics into being* (2000) het ’n noemenswaardige inslag gehad op die gemeenskap van wiskundeonderwysers (Schiralli & Sinclair, 2003:80). Alhoewel Lakoff en Núñez ’n interessante perspektief op wiskundige denke verskaf, bly dit kontroversieel. Een van die redes waarom die boek aanvegbaar is, is:

> .... (it) does not differentiate the term ‘mathematics’, nor indicate whether metaphor might function differently depending on whether one is *learning, doing,* or *using* mathematics (Schiralli & Sinclair, 2003:81).

Die metafoor wat gebruik word om ’n idee te verduidelik is nie noodwendig dieselfde een wat gebruik word om die abstraksie teweeg te bring nie. Shiralli en Sinclair glo dat Lakoff en Núñez korrek is omtrent die sensor-motoriese basis van abstrakte konsepte, maar dat hul nie daarin slaag om die fundamentele prosesse wat betrokke is by abstraksie (reduksie van abstrakte konsepte tot meer konkrete konsepte deur ‘n metafoor) te verduidelik nie (Schiralli & Sinclair, 2003:82). Die sensor-motoriese ervarings wat die kern is van Lakoff en Núñez se beskouing is meer kompleks en konteksgebonde as wat Lakoff en Núñez voorgee. ’n Aanvaarbare weergawe van waar wiskunde vandaan kom, behoort die rol van kultuur te verantwoord:

> ... the ways in which a cultural cognitive predispositions interact with various cultural and symbolic variables to produce mathematical cognitive structures (Schiralli & Sinclair, 2003:90).

Lakoff en Núñez hou vol dat ons begrip van oneindigheid in wiskunde gefundeer is in die vestiging van ’n konseptuele metafoor, die Basiese Metafoor van Oneindigheid[6] (Dubinsky et al, 2005b:259). Hierdie BMI verbind die teiken-gebied van prosesse wat aangaan en aangaan met die oorsprong-gebied van voltooide, eindigende herhalende prosesse. Dubinsky (et al) stem saam met Shiralli en Sinclair dat die werk van Lakoff en Núñez aanvegbaar is. Om aan oneindige prosesse te dink in terme van prosesse wat ’n finale resulterende toestand het (al is dit metafories) lei tot probleme (Dubinsky et al, 2005b:259).

Die kwessie van hoe daar oor oneindigheid gedink word het wiskundiges, filosowe en historici reeds vir ongeveer 3000 jaar geïnteresseer. APOS-teorie kan iets hiertoe bydra (Dubinsky et al, 2005a:336). Sien die bespreking van APOS-teorie in paragraaf 2.4.3. Dubinsky et al het die APOS-teorie om twee redes gekies. Eerstens, die verstandelike meganismes wat deur hierdie teorie gepostuleer word, in die besonder internalisering en inkapseling[7], vorm blykbaar deel van alledaagse denke by wiskundiges en die meeste studente. Hierdie meganismes word gebruik om te verduidelik hoe individue moontlik dink omtrent ’n verskeidenheid aspekte betreffende oneindigheid. Tweedens, die teoretiese analise wat vir oneindigheid aanbeveel word, is toegepas op verskeie onderwerpe in die voorgraadse wiskundekurrikulum en resultate toon dat dit bygedra het tot ’n verbeterde leerervaring van studente.

---

[6]Die *Basic Metaphor of Infinity* sal deurgaans in hierdie verhandeling afgekort word deur *BMI* – die afkorting wat Núñez & Lakoff gebruik (2005:113).

[7] *Encapsulation* word in hierdie verhandeling deurgaans vertaal met ‘inkapseling’.

Vervolgens word die BMI van Lakoff en Núñez bespreek. Daarna volg 'n kort uiteensetting van David Tall se beginsels vir die onderrig en leer van wiskunde – sowel as 'n opsomming van die APOS-teorie volgens Dubinsky et al.

2.4.1 Begripsmetafoor as kognitiewe meganisme

Tydens die laaste ongeveer 15 jaar het daar interessante bevindinge voortgespruit uit die veld van kognitiewe semantiek ten opsigte van die grondliggende meganismes van menslike denke soos dit deur middel van taal gemanifesteer word (Núñez & Lakoff, 2005:112). Een van hierdie bevindinge is dié van begripsmetafoor[8] deur skrywers soos, onder andere, Lakoff en Núñez. Laasgenoemde bevinding het diepliggende insig omtrent die aard van menslike denke betreffende oneindigheid na vore gebring. Die vrae wat Núñez en Lakoff wil beantwoord, is soos volg: Op watter manier word hierdie grondliggende meganismes van menslike denke (soos gemanifesteer deur taal en gebare) gebruik om die afleibare (*inferential*) organisasie van wiskundige konsepte te karakteriseer? Op watter manier laat hierdie wiskundige begrippe ons toe om oneindigheid (onder andere) uit te druk in presiese wiskundige terme? Wat is die verband tussen wiskundige konsepte en die simbolisering daarvan? Die voorafgaande vrae kan (Núñez & Lakoff, 2005:112) beantwoord word binne die konteks van die Kognitiewe Wetenskap van Wiskunde. Lakoff ('n linguïs) en Núñez (sielkundige) is kognitiewe wetenskaplikes. Hulle maak die volgende belangrike afleiding:

...conceptual metaphors and conceptual blends are constitutive of the ideas of higher mathematics (Núñez & Lakoff, 2005: 112).

[8] Die konsep *conceptual metaphor* word in hierdie verhandeling deurgaans in Afrikaans vertaal as *begripsmetafoor*

Begripsmetafoor as ‘n kognitiewe meganisme is vir die afgelope 25 jaar (ten minste) deeglik bestudeer deur verskillende navorsers (Núñez & Lakoff, 2005: 112):

- Sielkundige eksperimente (Gibbs, 1994)
- Historiese semantiese veranderinge (Sweetser, 1990)
- Spontane gebare (McNeill, 1992; Núñez, 2004; Núñez & Sweetser, 2001)
- Amerikaanse gebare-taal (Taub, 2001)
- Taalontwikkeling by die kind (C.Johnson, 1997)
- Veralgemening en polisemie: Gevalle waar dieselfde woord veelvuldige sistematies-verwante betekenis het (Lakoff & Johnson, 1980/2003)
- Veralgemening en gevolgtrekkingspatrone (Lakoff, 1993)

Lakoff en Núñez (2000:XVI) skryf in die voorwoord van hul boek dat daar in wiskunde twee konsepte vir oneindigheid bestaan – die een is letterlik en die ander metafories. Die letterlike konsep (“on-eindigheid” word beskou as die gebrek aan ’n einde) word “potensiële oneindigheid” genoem. **Potensiële oneindigheid** is bloot ’n proses wat op eindelose wyse voortgaan, soos byvoorbeeld: om te tel sonder om op te hou; om ’n lynstuk onbepaald te verleng; om veelhoeke met meer en meer sye te skep; en om nog meer desimale van 2 neer te skryf. In die geval van **potensiële oneindigheid** word daar nie metaforiese begrippe benodig nie. Potensiële oneindigheid is ’n bruikbare konsep in wiskunde, maar die tweede konsep (aktuele oneindigheid) is van meer belang. Die interessante gevalle van oneindigheid in moderne wiskunde het te doen met aktuele oneindigheid, gevalle wat buite prosesse wat bloot kontinue of herhalende prosesse is, beweeg.

Wanneer die versameling van alle natuurlike getalle beskou word, kan ’n mens nooit alle natuurlike getalle tel of opnoem nie. ’n Mens begryp dit as ’n versameling wat alle natuurlike getalle bevat – al is hierdie getalle nog nooit almal opgenoem nie en al sal ’n mens dit ook nooit kan doen nie. Laasgenoemde is ’n geval van **aktuele oneindigheid**, ’n oneindige voltooide voorwerp. Aktuele oneindigheid is fundamenteel ’n metaforiese konsep:

> **....*all* forms of actual infinity – points at infinity, infinite intersections, transfinite numbers, and so on – appear to be special cases of just one Basic Metaphor of Infinity (Lakoff & Núñez, 2000:XVI).**

Lakoff en Núñez (2000:158) veronderstel dat die idee van aktuele oneindigheid in wiskunde metafories is, dat die verskillende gevalle van aktuele oneindigheid gebruik maak van die uiteindelike resultaat van ’n eindelose proses. Letterlik gesproke bestaan daar nie iets soos ’n eindelose proses nie, maar die gebruik van metafoor stel ons in staat om die “resultaat” van ’n oneindige proses te begryp. Die enigste manier waarop ons die resultaat van ’n proses kan begryp, is om dit te beskou as ’n eindelose proses.

Lakoff en Núñez (2000:158) veronderstel dat alle gevalle van aktuele oneindigheid bloot spesiale gevalle is van die BMI waarvolgens prosesse, wat onbepaald voortgaan, begryp word as iets wat ’n einde en finale resultaat het. Wanneer ’n mens die BMI begryp, word die skynbaar onbegryplike redelik maklik om te verstaan (Lakoff & Núñez, 2000:8).

Enkele aspekte omtrent die BMI sal in Hoofstuk 4 verder uiteengesit word.

2.4.2 Natuurlike en formele oneindigheid

David Tall (2001b:201) glo dat die menslike brein komplekse begrippe soos oneindigheid hanteer deur bewustelik op ‘n klein deeltjie te fokus, belangrike inligting te beskou, die situasie te takseer en toepaslike aksie te neem. ‘n Mens fokus nie bewustelik op alle inligting op ‘n gegewe tydstip nie, maar beweeg tussen verskillende aspekte wat op verskillende maniere in verbinding is. Vir ‘n bepaalde begrip ontwikkel ‘n mens ‘n volledige konsep-beeld[9] in die brein wat bestaan uit die algehele kognitiewe struktuur wat met dié begrip geassosieer

[9] *Concept image* word in Afrikaans vertaal met ‘konsep-beeld’.

word. Hierdie kognitiewe struktuur behels verstandelike beelde tesame met eienskappe en prosesse wat daarmee geassosieer word. Hierdie konsep-beeld groei en verander met ervaring en refleksie. In wiskundeonderrig is die doel om so ver as moontlik ‘n samehangende, duidelike konsep-beeld by leerders te ontwikkel.

‘n Konsep-beeld het ‘n dinamiese struktuur en word oor ‘n tydperk van jare deur die leerder gekonstrueer. Hierdie konsep-beeld verander met ervaring in leersituasies. Die ontwikkeling van ‘n formele, teoretiese begrip (soos oneindigheid) in wiskunde is ‘n lang en moeisame proses.

2.4.3 APOS-teorie (***A***ksie, ***P***roses, ***O***bjek, ***S***kema)

APOS Theory adheres to the principle that there is a close relationship between the nature of a mathematical concept and its development in the mind of an individual (Dubinsky et al, 2005a:338)

Die verduidelikings wat deur APOS-teorie voorgestel word is beide epistemologies en sielkundig. Die APOS-teorie word vervolgens beskryf na aanleiding van die uiteensetting van Dubinsky et al (2005a:338-339).

Volgens APOS-teorie hanteer ’n individu ’n wiskundige situasie deur sekere verstandelike[10] (*mental*) meganismes te gebruik om kognitiewe strukture te bou wat op die situasie toegepas word. Die belangrikste van hierdie meganismes is *internalisering*[11] en *inkapseling.* Die verwante strukture is *aksies, prosesse, objekte* en *skemas.* Die teorie postuleer dat ’n begrip in wiskunde begin vorm wanneer ’n mens ’n transformasie op ‘n objek toepas om ander objekte te verkry. ’n Transformasie word aanvanklik verstaan as ’n *aksie* deurdat dit spesifieke instruksies vereis, sowel as die vermoë om elke stap van die transformasie eksplisiet uit te voer.

[10] *Mental* word in Afrikaans vertaal met ‘verstandelike’
[11] *Interiorization* word in hierdie verhandeling deurgaans in Afrikaans vertaal met ‘internalisering’.

Indien ’n individu ’n aksie herhaal en daaroor reflekteer, kan dit geïnternaliseer word as ’n verstandelike *proses.* ’n Proses is ’n verstandelike struktuur wat dieselfde ‘handeling’ uitvoer as die aksie wat geïnternaliseer word, maar geheel en al in die gedagte van die individu. Op hierdie wyse word die individu in staat gestel om die transformasie in sy gedagte uit te voer sonder om eksplisiet uitvoering te gee aan elke stap.

Wanneer ’n mens bewus word van ’n proses as totaliteit, besef jy dat transformasies op daardie totaliteit uitgevoer kan word en inderdaad sulke transformasies (eksplisiet of in ’n mens se verbeelding) kan konstrueer. Dan kan ’n mens sê dat die individu inkapseling van die proses na ’n kognitiewe *objek* laat plaasvind het.

Voorafgaande beskrywing toon aan hoe ’n individu ’n enkele transformasie kan konstrueer, maar ’n wiskunde-onderwerp behels dikwels verskeie aksies, prosesse en objekte wat georganiseer moet word en wat in ’n samehangende raamwerk aaneengeskakel moet word. Hierdie raamwerk word ’n *skema* genoem. Samehang stel die individu in staat om te besluit watter kognitiewe strukture gebruik moet word in die hantering van ’n wiskundige probleemsituasie.

Die manier waarop APOS-teorie kan bydra tot sinvolle kognisie van oneindigheid sal verder bespreek word in Hoofstuk 4.

2.5 ONEINDIGHEID AS GRONDBEGRIP IN WISKUNDEONDERWYS

Wessels (1989:260) het 13 elementêre grondbegrippe in wiskunde geïdentifiseer, naamlik:

1. die geheel / dele
2. oneindig-verdere verdeelbaarheid
3. opeens-oneindige
4. totaliteit

5. omgewing
6. puntkontinuum
7. feitlike groottes
8. hoeveelheid dimensies
9. dimensiegetal
10. differensiasie
11. integrasie
12. imaginêre eenhede
13. komplekse getalsfunksies

Vervolgens word aangetoon watter grondbegrippe ter sake is vir die begrip oneindigheid.

Volgens Wessels (1989:268) vloei die ‘oneindig-verdere verdeelbaarheid’ voort uit die relasie geheel/dele en is dit ten volle op die ruimte-aspek aangewys aangesien dit juis ruimtelike kontinuïtiet is wat oneindig verdeel word. Terme wat deel is van die tweede (oneindig-verdere verdeelbaarheid), derde (opeens-oneindige) en vierde grondbegrip (totaliteit) - wat ter sake is vir hierdie verhandeling - is *irrasionale getalle, konvergeer* en *oneindig.* Die sesde grondbegrip (puntkontinuum) is verbonde aan die grondbegrippe oneindig-verdere verdeelbaarheid en totaliteit.

Die terme ‘divergeer’, ‘konvergeer’ en ‘limiet’ is deel van die 5de grondbegrip (omgewing). Die 10de grondbegrip (differensiasie) en die 11de grondbegrip (integrasie) hou noodwendig ook verband met oneindigheid.

Uit voorafgaande is dit duidelik dat terme van die grondbegrippe 2, 3, 4, 5, 6, 10 en 11 geassosieer kan word met die begrip oneindigheid. Oneindigheid speel inderdaad ’n belangrike rol in wiskunde-onderwys.

2.6 MANIFESTASIE VAN DIE ONEINDIGE

In hierdie afdeling word die manifestasie van oneindigheid in die werk van MC Escher, irrasionale getalle en fraktale bespreek. Dit word hier bespreek om as agtergrond te dien vir maniere waarop leerders en studente die begrip oneindigheid kan verken.

2.6.1 MC Escher (1898-1972)

Maurits Cornelis Escher is op 17 Junie 1898 te Leeuwarden (in die provinsie Friesland in Nederland) gebore. Hy was die jongste van vyf seuns en sy vader was ’n siviele ingenieur. Escher se skoollewe was ’n nagmerrie (Ernst, 1985:7), maar die hoogtepunt van sy kinderlewe was sy weeklikse kunsklas van twee ure lank. Escher het in 1919 in Haarlem argitektuur gaan studeer, maar dit was van korte duur. Hy het ingeval by Samuel Jesserun de Mesquita en was ’n ywerige student op die gebied van grafiese tegnieke en veral houtsneewerk. Escher het tydens 1922 die kunsskool verlaat. Hy het vir ’n tyd lank in Italië gewoon, daarna in Switserland, België en Nederland.

Escher het gepoog om oneindigheid in visuele beelde vas te vang (Schattschneider, 1990:241). Hy was ’n meester van die oneindige (Maor, 1987:164). Escher is nie deur sy tydgenote as kunstenaar erken nie (Ernst, 1985:15-16). Kunskritici het blykbaar nie Escher se werk begryp nie en het dit om hierdie rede geïgnoreer. Die wiskundiges, kristalkundiges en fisici het egter baie belanggestel (Ernst, 1985:15). Bruno Ernst gee ’n bondige definisie van Escher se werk:

> His work is cerebral to a high degree in the sense that it is of the mind – a pictorial representation of intellectual understanding (Ernst, 1985:16).

Terwyl Escher in Italië gewoon het, is hy geïnspireer deur die landskappe en dorpies in die suide. Werke soos *Fara San Martino (1928)* en *Barbarano, Cimino (1929)* is voorbeelde van hierdie periode. Vanaf 1934 tot 1937 het Escher ’n innerlike verandering ondergaan (Ernst, 1985:23). Escher het nie meer soveel inspirasie geput uit die eksterne visuele wêreld nie, maar wel deur verstandelike konstruksies wat slegs op wiskundige wyse uitgedruk en beskryf kon word. Ten spyte hiervan, het Escher altyd gesê dat hy ’n leek is op die gebied van wiskunde

(Ernst, 1985:24). Bruno Ernst (1985:22-23) onderskei vier tydperke in die werk van Escher, naamlik:

- Landskap (1922-1937)
- Metamorfose (1937-1945)
- Perspektieftekening (1946-1956)
- Oneindigheid (1956-1970)

Die laaste twee tydperke is ter sake vir hierdie verhandeling en word vervolgens bespreek.

2.6.1.1 Perspektieftekening

Die mens het reeds in die oertyd met rotstekeninge gepoog om die ruimtelike werklikheid op ‘n plat vlak weer te gee. Perspektieftekening het eers tydens die 15de eeu tot stand gekom (Serra, 2003:172). Die woord perspektief is afgelei van die Latynse werkwoord *perspicere* wat beteken: om deur iets te kyk (Escher, 1986:128).

Serra (2003:172) definieer perspektieftekening soos volg:

> In a perspective drawing, receding parallel lines (lines that run directly away from the viewer) converge at a **vanishing point** on the **horizon line.**

Die mens word in sy leefwêreld omring deur ‘n ingewikkelde netwerk van ontelbare reguit en ewewydige lyne (soos byvoorbeeld strate, treinspore en boomlanings). Tog kies die mens uit hierdie oneindige verskeidenheid rigtings amper uitsluitlik die vertikale en horisontale lyne (Escher, 1986:129). Alle vertikale lyne in die werklike ruimte bly vertikaal wanneer dit op ‘n plat vlak geteken word (soos byvoorbeeld telefoonpale). In teenstelling hiermee kruis omtrent alle horisontale, ewewydige lyne mekaar by ‘n punt op die horison van die tekening (byvoorbeeld die bane van ‘n pad). Die uitsondering is lyne wat ewewydig is aan die horison. Hierdie lyne bly ewewydig aan die horison in ‘n twee-dimensionele tekening. Die voorafgaande beskrywing verteenwoordig die tradisionele (Renaissance) wyse van perspektieftekening. Dit beteken dat hierdie lyne geen verdwyningspunt het nie, maar dat dit prakties gesproke iewers in die oneindige sal bymekaarkom (Ernst, 1985:43). Lineêre perspektief is tydens die beginjare van die 15de eeu (Renaissance) ontwikkel en dit word toegeskryf aan Leon Battista Alberti (1404-1472) en Filippo Brunelleschi (1377-1446) van Florence (Cole, 1992:12). Wiskundige perspektief is 'n stel reëls wat kunstenaars in staat stel om drie-dimensionele ruimte op 'n plat (twee-dimensionele) vlak te skep.

Escher (Ernst, 1985:46) was bewus van die relativiteit van verdwyningspunte. Wanneer lyne by 'n enkele punt konvergeer, kan hierdie punt 'n toppunt (*zenith*), voetpunt (*nadir*), afstandspunt, ensovoorts, voorstel. Dit hang alles van die konteks af. Die mens is mettertyd in staat gestel (deur byvoorbeeld vliegtuie en hoë geboue) om waarnemings te maak bokant die oppervlakte van die aarde. Wanneer 'n mens byvoorbeeld op die 20ste verdieping op die hoek van 'n gebou staan en na onder kyk waar twee strate mekaar kruis, konvergeer die reghoekige vertikale lyne van die hoë geboue op elke hoek van die strate by 'n verdwyingspunt wat nou 'n voetpunt (*nadir*) is. Die horisontale lyne van die strate en sypaadjies bly egter horisontaal. Die tekening van die situasie wat hier geskets is, volg nie die tradisionele reëls van Renaissance perspektieftekening nie. Escher het probeer om die relativiteit van verdwyningspunte in sy werke *Other World I (1946)* en *Other World II (1947)* te demonstreer. In *Other World I* het die verdwyningspunt drie funksies, naamlik afstandspunt, voetpunt en toppunt. Escher was egter nie tevrede met hierdie werk nie:

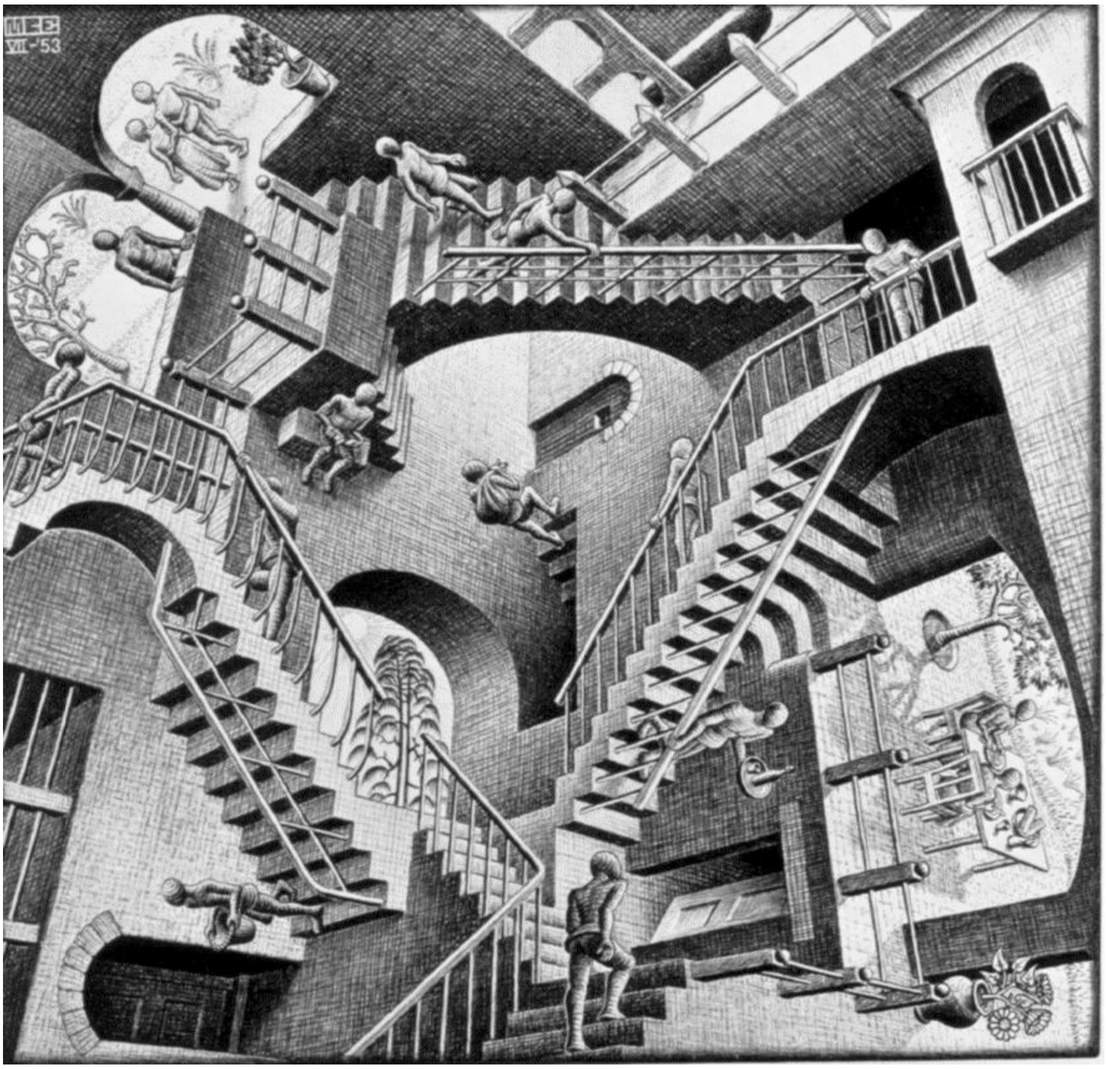
> ...the tunnel had no clear limits, the vanishing point was shrouded in darkness, and it took *four* planes to represent three landscapes (Ernst, 1985:47).

In *Other World II* het Escher (volgens hom) die tekortkominge geëlimineer. Die tonnel het verdwyn en daar is 'n vreemde kamer waarin 'bo', 'onder', 'regs', 'links', 'voor' en 'agter' verander deurdat 'n mens kan kies deur watter venster jy kyk. Die drievoudige funksie van die verdwyningspunt word gesuggereer deur die drie pare vensters wat amper almal ewe groot is (Ernst, 1985:47).

Figuur 2.3 *Other World I* (1946)

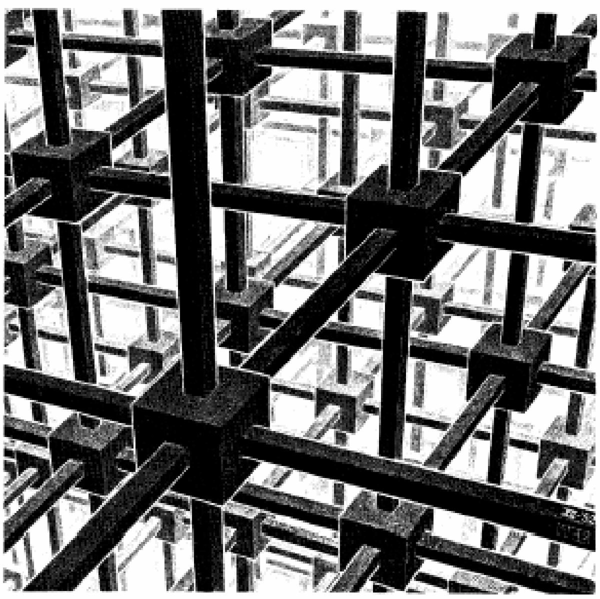
Figuur 2.4 *Other World II* (1947)

In beide *Other World I* en *Other World II* is daar slegs een verdwyningspunt, maar in *Relativity (1953)* is daar drie verdwyingspunte wat buite die oppervlakte van die litografiese skets lê. Elkeen van die drie verdwyingspunte het drie verskillende funksies (Ernst, 1985:47).



Figuur 2.5 *Relativity* (1953)

Escher het die reëls van klassieke perspektief in sommige van sy werke nagevolg. Só het hy in die litograaf *Cubic Space Division* (1952) hierdie beginsels toegepas om die oneindige omvang van ruimte uit te beeld (Ernst, 1985:42). Wanneer die vertikale balke geprojekteer word, wil dit voorkom asof hulle konvergeer by ‘n enkele verdwyningspunt (die voetpunt). Daar is nog twee ander verdwyningspunte in hierdie litografiese skets. Laasgenoemde verdwyningspunte kan verkry word deur die balke wat opwaarts onderskeidelik na regs en links gaan, te projekteer. Hierdie drie verdwyningspunte lê almal buite die oppervlakte van die tekening en Escher het groot velle papier gebruik vir die konstruksie van hierdie litograaf.



Figuur 2.6 *Cubic Space Division* (1952)

2.6.1.2 Oneindigheid op ’n twee-dimensionele vlak

> **The urge to fill the plane with pieces, fitted snugly next to one another so as to leave no unoccupied space, seems to have been with Escher longer than even he could remember (Schattschneider, 1990:2).**

Gedurende 1937 het Escher ’n artikel van die wiskundige George Pólya in die hande gekry wat hy deeglik bestudeer het (Schattschneider, 1990:23). In hierdie artikel omtrent die simmetrie van kristalle het Pólya aangedui dat ontwerpe, wat op reëlmatige wyse herhaal word, op ‘n plat vlak volgens simmetrie-groepe geklassifiseer kan word. Escher was meer geïnteresseerd in die reëls wat sulke patrone beheer sodat hy sy eie vlakverdelings kon skep. Om hierdie rede het Escher Pólya se illustrasies van 17 simmetrie-groepe wat in die artikel *ber die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene* in die tydskrif *Zeitschrift für Kristallographie* (1924) verskyn het, deeglik bestudeer (Schattschneider, 1990:23). Escher het ook toegang gehad tot ’n artikel met die titel *Die regelmässigen Planteilungen und Punktsysteme* (1923) van professor Haag, ’n Duitser.

Reëlmatige verdeling van die plat vlak was vir Escher ’n manier om oneindigheid uit te beeld en dit was vir hom ’n uitdaging om oneindigheid in ‘n ‘geslote’ komposisie vas te vang.

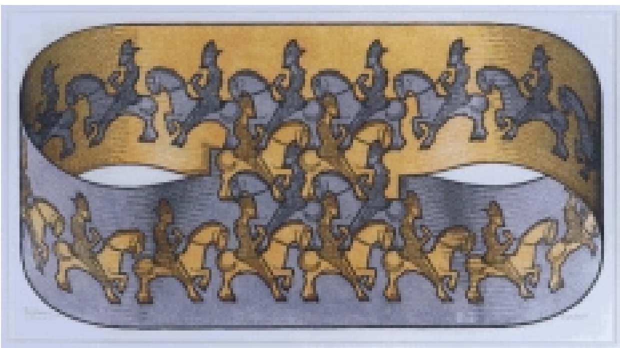
> One can divide a plane into geometric shapes according to certain systems; these forms can become infinitely varied and very complex and still meet the requirement of filling the plane with congruent forms in rhythmic repetition without leaving any ‘void’ (Escher, 1947:90).

Vir die mens wil dit voorkom of daar geen einde aan tyd is nie, al sou die aarde ophou om te draai om sy eie as, en om die son (Escher, 1986:123). Escher gaan voort en sê dat wanneer ‘n mens in oneindig tyd of ruimte voortbeweeg, moet daar vaste punte of mylpale wees om die sensasie van beweging te onderskei van stilstand. Escher beskou sy *Symmetry Work 25 (1939)* as ‘n fragment van oneindigheid (Escher, 1986:125). Indien die vlak waarop die reptiele in hierdie werk beweeg oneindig groot was, sou ‘n oneindige aantal reptiele uitgebeeld kon word.

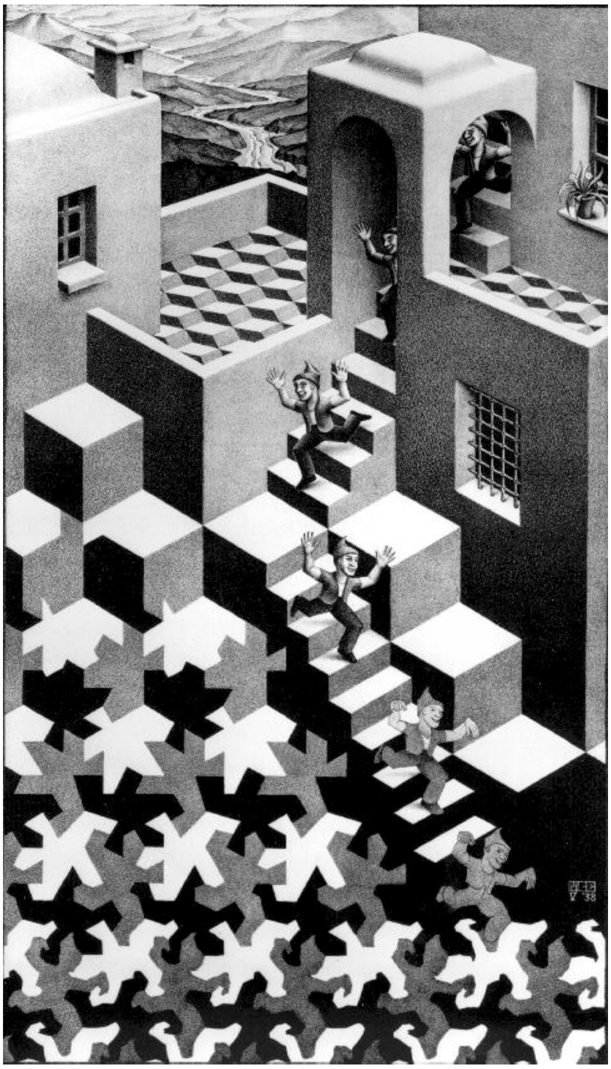
Figuur 2.7 *Symmetry Work 25* (1939)

In die werk *Horsemen* (1946) gebruik Escher dieselfde perd en ruiter wat in *Symmetry Work 67* (1946) voorkom. In albei werke gebruik Escher refleksie. In *Horsemen* word ’n lint gesuggereer en die opeenvolging van ruiters ry op oneindige wyse voort (Escher, 1986:30). Escher het die lint as ’n siklus (geslote lus) gebruik om oneindigheid weer te gee deur ruiters wat aanhou en aanhou ry binne hierdie geslote siklus. Ander werke waar ’n siklus prominent voorkom is byvoorbeeld *Cycle* (1938), *Reptiles* (1943), *Encounter* (1944), *Magic Mirror* (1946) en *Swans* (1955). ’n Mens sou kon sê dat hierdie sikliese beweging voorbeelde is van die oneindigheid van ’n proses wat nooit ophou nie, naamlik potensiële oneindigheid.

Figuur 2.8 *Symmetry work 67* (1946)

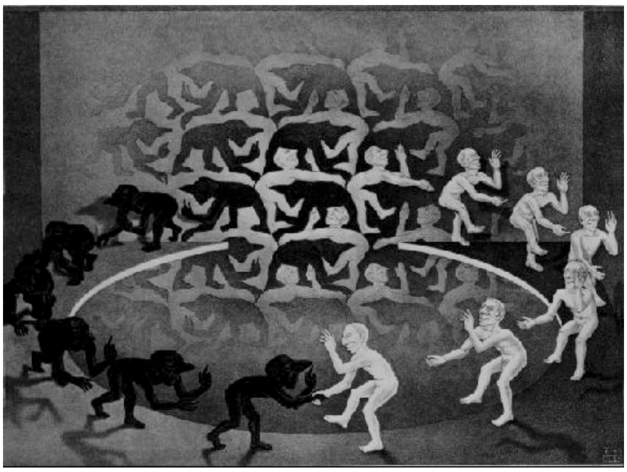


Figuur 2.9 *Horsemen* (1946)

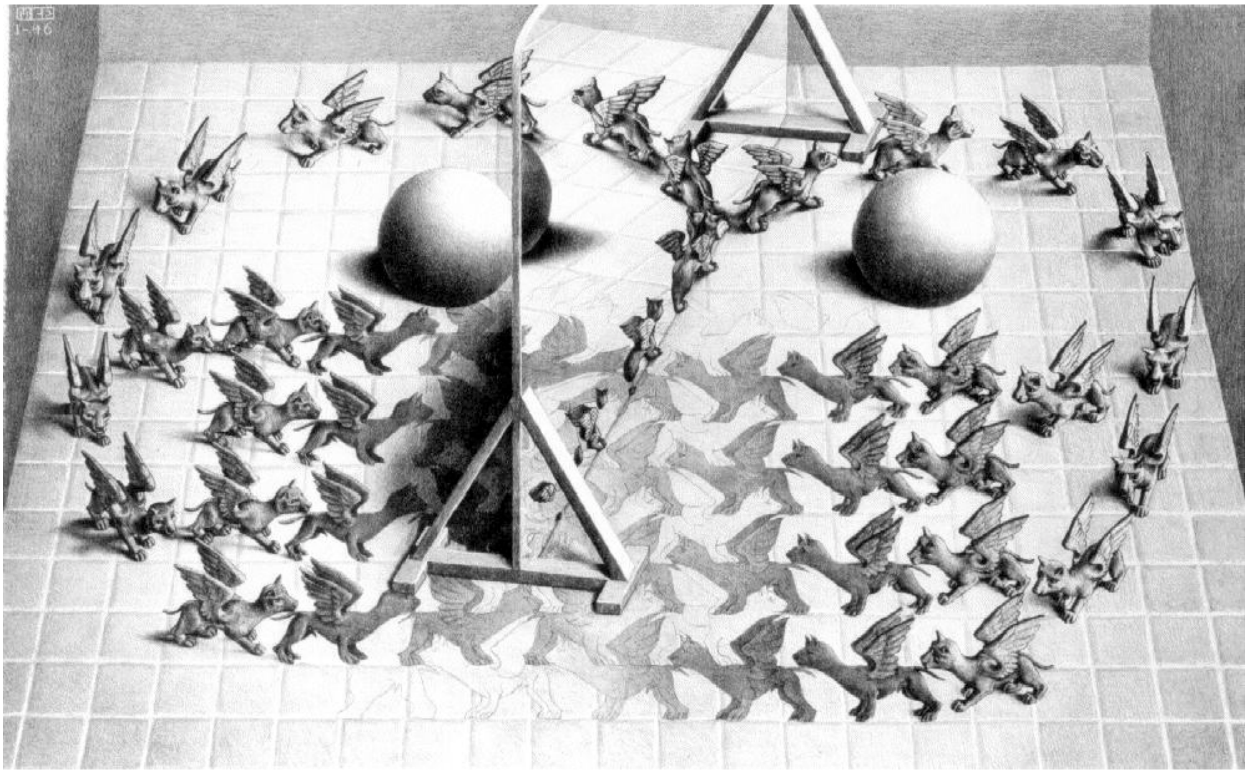


Figuur 2.10 *Cycle* (1938)

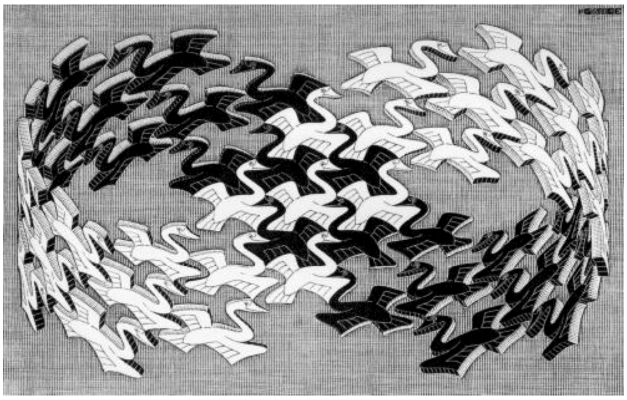
Figuur 2.11 *Reptiles* (1943)



Figuur 2.12 *Encounter* (1944)



Figuur 2.13 *Magic Mirror* (1946)



Figuur 2.14 *Swans* (1955)

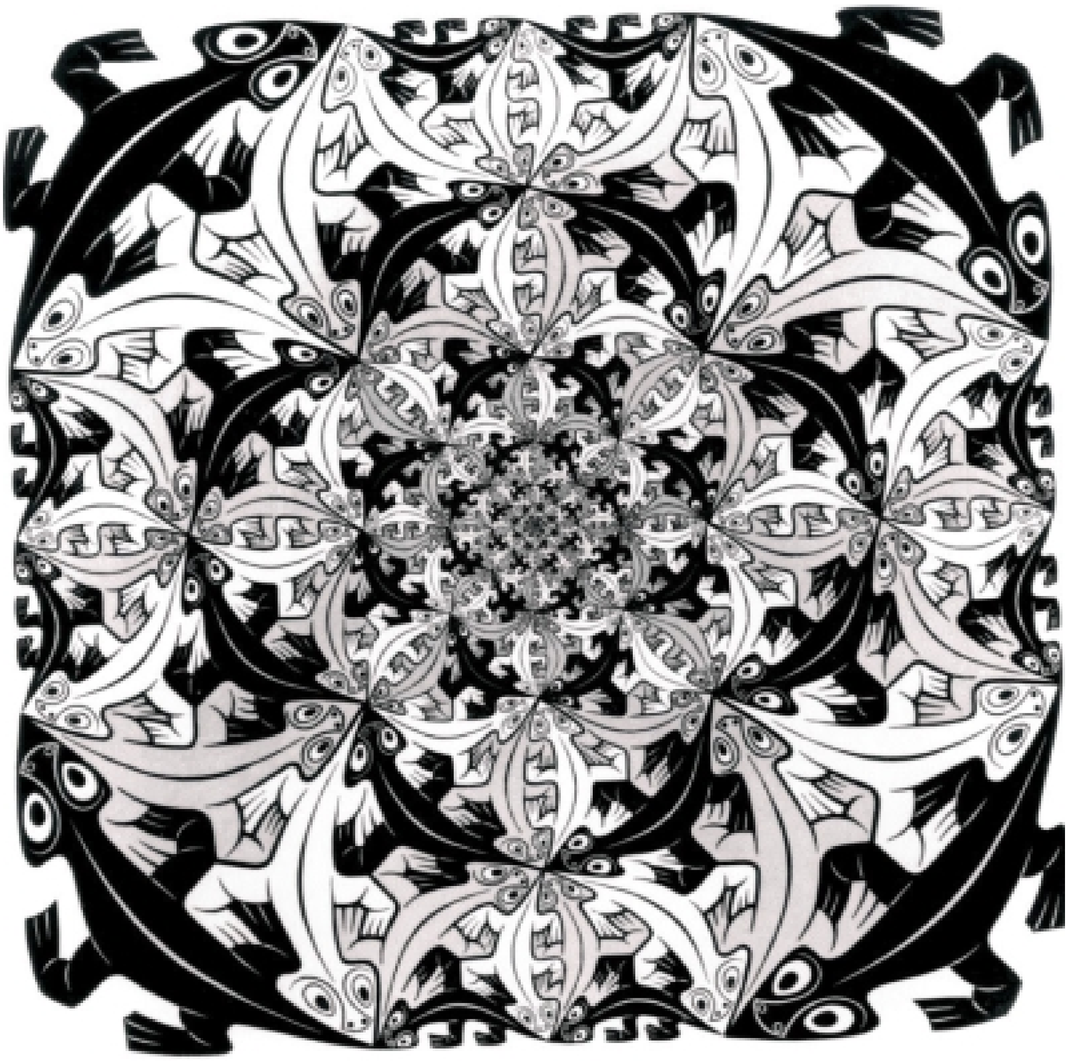
2.6.1.3 Oneindigheid op ’n drie-dimensionele oppervlakte

Buiten grafiese metodes (soos reëlmatige verdeling van ‘n plat vlak) het Escher reëlmatige verdeling van drie-dimensionele oppervlaktes gebruik om oneindigheid uit te beeld. Escher het altyd sy eie werk gekritiseer en dan probeer om te verbeter. Van Escher se opdragwerke was die ontwerpe vir ‘n silindriese pilaar by ‘n skool in Den Haag en Baarn, asook vir ‘n provinsiale buro in Haarlem (Schattschneider, 1990:244). Oneindigheid kan op ‘n silindriese oppervlakte weereens nie volledig voorgestel word nie, want oneindigheid word slegs in een rigting bewerkstellig. ‘n Mens kan nie ‘n pilaar met oneindig lengte maak nie, maar ook nie ‘n plat vlak wat oneindige groot is nie.

Escher (1986:125) beskou *Carved Beechwood Ball with Fish (1940)* as ‘n meer bevredigende oplossing. Dit is ‘n houtbal waarvan die oppervlakte gevul is met twaalf kongruente visse. Wanneer jy die houtbal in jou hande ronddraai, sien jy hoe die visse mekaar volg, – só asof hulle op oneindige wyse voortgaan. Tog is hierdie sferiese voorstelling vir Escher nie bevredigend nie aangesien (1) hy homself as ‘n grafiese kunstenaar beskou wat op ‘n plat vlak werk, en (2) twaalf visse is alles behalwe oneindig veel. Escher wou steeds oneindigheid op ‘n plat vlak voorstel en het besluit om te werk met figure wat dieselfde vorm het, maar nie dieselfde grootte nie. In sy vroeëre werke het hy die plat vlak gevul met kongruente figure wat hy gemanipuleer het deur middel van tesselasie, transformasie en refleksie.

2.6.1.4 Oneindigheid met behulp van hiperboliese tesselasie

Escher se eerste poging om ‘n oneindige aantal voorwerpe grafies voor te stel op ‘n plat vlak het hy in *Smaller and smaller (1956)* gedoen. Die limiet van oneindig baie en oneindig klein word saamgevat in die middelpunt. Volgens Escher (1986:125) is *Smaller and smaller* nog steeds slegs ‘n fragment van oneindigheid aangesien groter en nog groter ‘reptiele’ bygevoeg kan word.



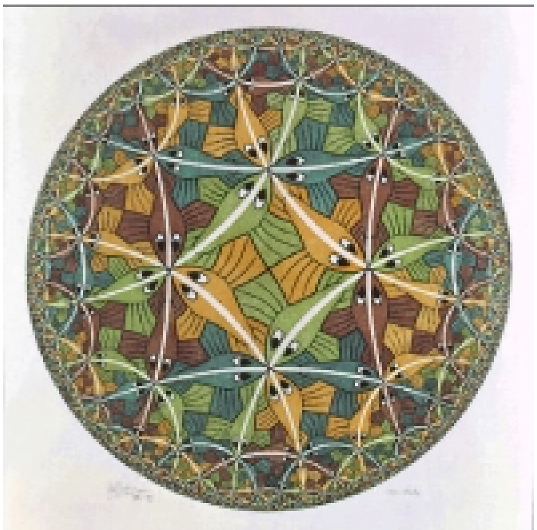
Figuur 2.15 *Smaller and Smaller I* (1956)

Die enigste manier om die gefragmenteerde karakter te ontsnap, is om oneindigheid tussen grense (buitelyne) vas te vat in ‘n omgekeerde orde as dié in *Smaller and Smaller.* Met ander woorde, figure wat in die middel groot is en al hoe kleiner word na die rant. Escher se eerste poging om ‘n “oneindigheid” te omvat, *Circle Limit 1 (1958)*. Die limiet van oneindig veel en oneindig klein word op die sirkelvormige rant bereik (Escher, 1986:126). Alhoewel Escher nie só daarna verwys nie, wil dit voorkom asof hy hiermee die aktueel (voltooide) oneindige wou uitbeeld. Escher het egter vele tekortkominge in *Circle Limit I* raakgesien. Hierdie tekortkominge het Escher in *Circle Limit III* oorkom.

Escher se *Circle Limit I, II, III, IV* is voorbeelde van hiperboliese tesselasie.

> In 1958, in almost a replay of his discovery in 1937 of the power of geometric rules from the mathematical articles by Pólya and Haag, Escher seized the visual information in a geometric diagram in a mathematical article by H.S.M. Coxeter (Schattschneider, 1991:251).

Escher het ‘n diagram in ‘n boek van prof HSM Coxeter ontdek wat hy geskik gevind het vir die voorstelling van ‘n oneindige reeks (Ernst, 1985:103). Prof Coxeter, ‘n wiskundige, was ‘n vriend van Escher. Escher se uitgangspunt was meetkundige tesselasie met veelhoeke. Met hiperboliese tesselasie word die hiperboliese ruimte bedek met teëls – op so ‘n wyse dat teëls nie oorvleuel nie en sonder enige oop spasies tussenin. *Circle Limit III* is Escher se mees verfynde werk ten opsigte van hiperboliese ruimte.



Figuur 2.16 *Circle Limit III* (1959)

Figuur 2.17 *Circle Limit IV* (1960)

2.6.1.5 Opsomming

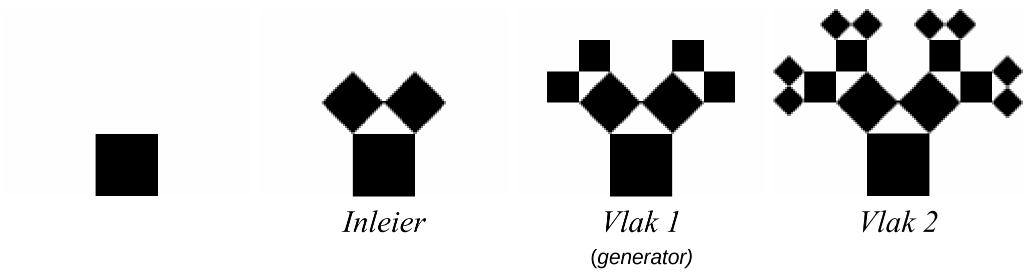
Escher het verdwyningspunte op (paragraaf 2.6.1.1) buitengewone kreatiewe wyse gebruik om oneindigheid te illustreer. Die sikliese beweging (paragraaf 2.6.1.2) in sommige werke van Escher dui op potensiële oneindigheid aangesien dit beweging uitbeeld as ‘n proses wat nooit ophou nie. In die *Circle Limit*-reeks het Escher gepoog om die aktueel (voltooide) oneindige uit te beeld. Ja, Escher was ‘n meester van die oneindige!

2.6.2 Fraktale

‘n Fraktaal is die resultaat van ‘n proses wat met ‘n meetkundige figuur - die inleier (*initiator*) - begin (Venters, 2003:1). Daarna word die figuur getransformeer om vlak 1, die generator, voort te bring. Die generator word dan op dieselfde wyse getransformeer om ‘n nuwe resultaat voort te bring, ensovoorts, vir ‘n oneindige aantal kere. Hierdie is weer ‘n voorbeeld van ‘n oneindigheid as ‘n proses wat nooit ophou nie, potensiële oneindigheid.

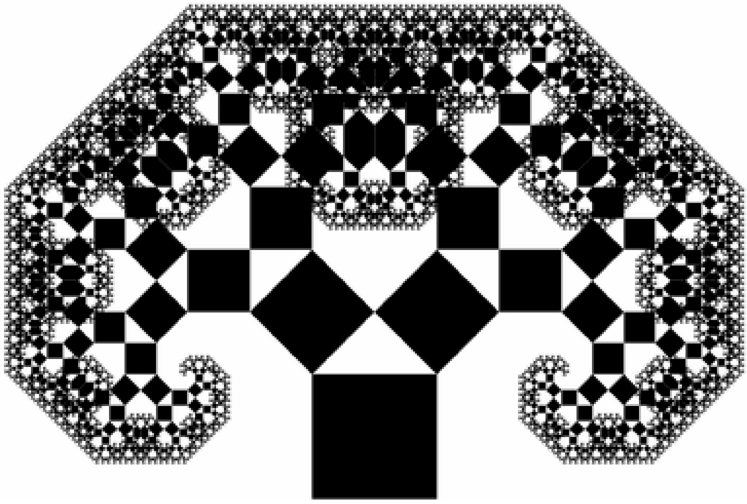
Fraktale is self-gelykvormig[12]. Dít beteken dat dele van die fraktaal lyk soos die fraktaal as geheel, slegs op kleiner skaal. Voorwerpe uit die natuur (soos byvoorbeeld blomkool, varingblare, kuslyne en berge) het dikwels fraktaalagtige konstruksies (Venters, 2003:18).

Ter illustrasie word die Pythagoreïese boomfraktaal gebruik. Hierdie fraktaal is ‘n visuele bewys van die stelling van Pythagoras. Die inleier van die fraktaal bestaan uit ‘n reghoek en reghoekige driehoek. Die skuinssy van die reghoekige driehoek is die lengte van een van die sye van die reghoek. Namate die fraktaal vorder, ontstaan die vorm van ‘n boom:



Figuur 2.18 Ontwikkeling van die Pythagoreïese boomfraktaal

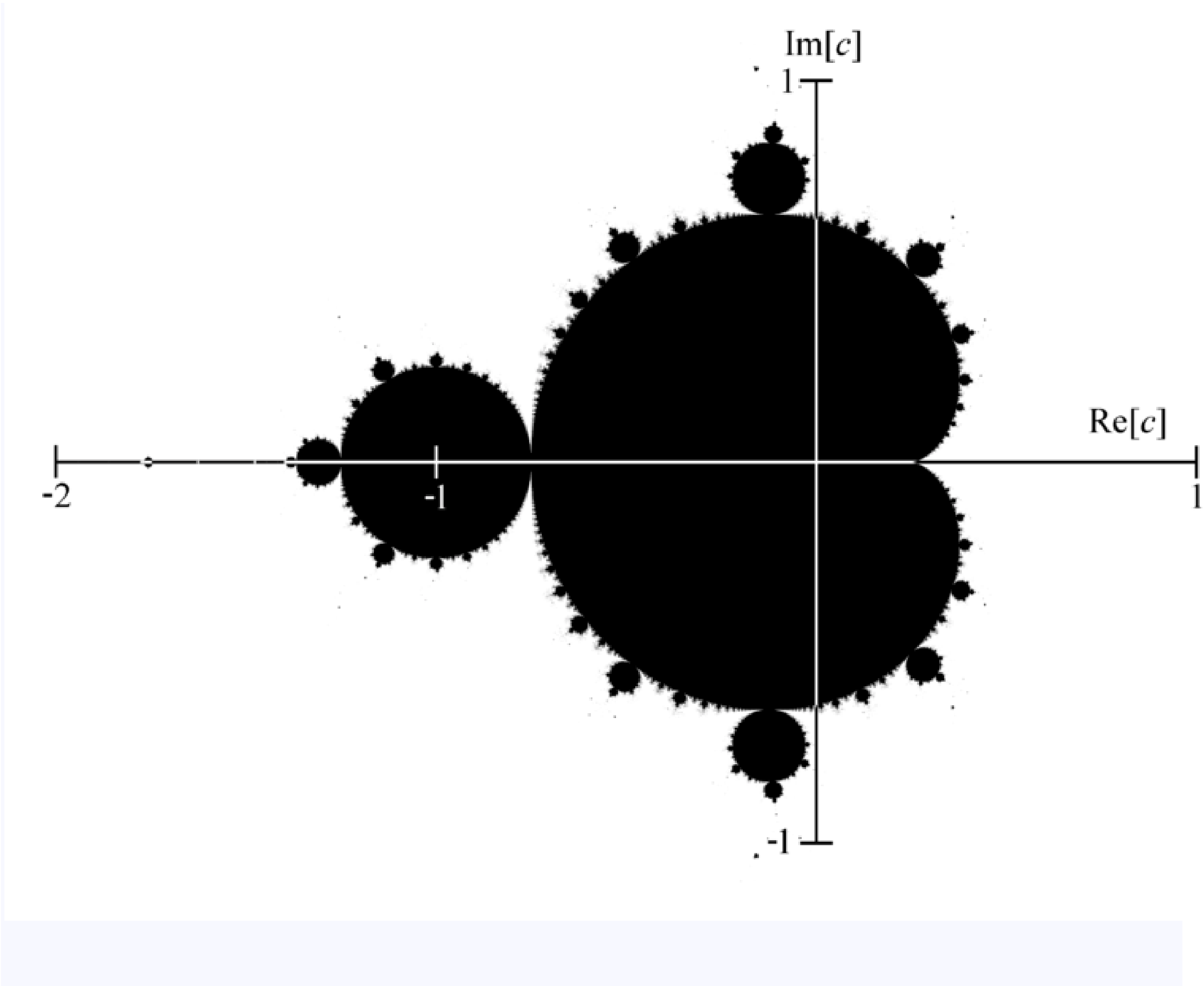
[12] *Self-similar* word in hierdie verhandeling in Afrikaans vertaal met ‘self-gelykvormig’.



Figuur 2.19 Gevorderde Pythagoreïese boomfraktaal

2.6.2.1 Die Mandelbrot-versameling

Benoit Mandelbrot (gebore in 1924) was ‘n baanbreker op die gebied van fraktale (Serra, 2003:137). Hy was die eerste persoon wat rekenaars ingespan het en het ‘n grafiese voorstelling van die Mandelbrot-versameling geskep. Die Mandelbrot-versameling is ‘n versameling punte wat ‘n fraktaal vorm in die komplekse vlak. Die Mandelbrot-versameling is bekend weens die estetiese waarde daarvan, maar ook omdat dit ‘n komplekse struktuur is wat voortgebring word deur ‘n eenvoudige reël. Die Mandelbrot-versameling M word gedefinieer deur ‘n groep komplekse kwadratiese veelterme $f_c : C \rightarrow C$ gegee deur $f_c : z \rightarrow z^2 + c$. Wiskundig gesproke is die Mandelbrot-versameling ‘n versameling komplekse getalle. ‘n Gegewe komplekse getal c behoort tot M of nie. ‘n Mens kan ‘n voorstelling maak van M deur al die punte c wat aan M behoort swart te kleur en die ander punte wit. Die meer kleurvolle prente wat ‘n mens dikwels sien, word voortgebring deur die punte wat nié in M is nie in te kleur. Hierdie inkleuring vind plaas volgens hoe vinnig of stadig die ry na oneindigheid divergeer.



Figuur 2.20 Die Mandelbrot-versameling

Benoit Mandelbrot (Clarke, 2004:52) definieer fraktale soos volg in die boek *Colours of Infinity:*

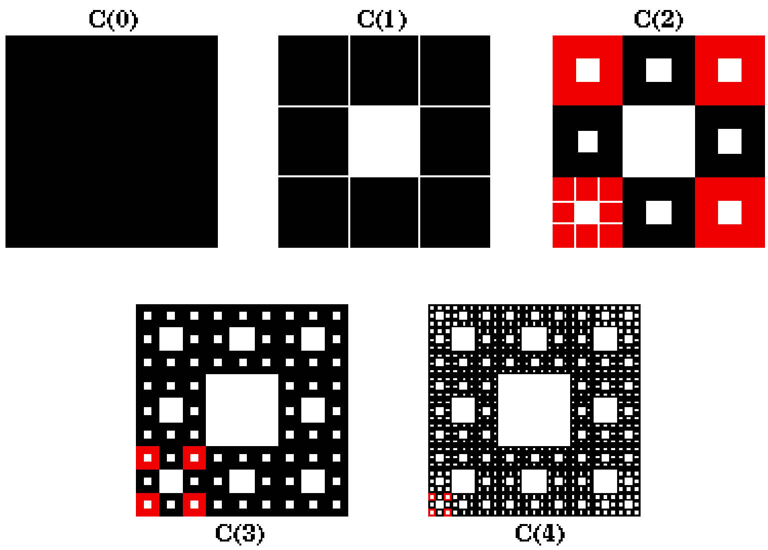
> Broadly speaking, mathematical and natural fractals are shapes whose roughness and fragmentation *neither* tend to vanish, *nor* fluctuate up and down, but remain *esssentially unchanged* as one continually zooms in.

Die struktuur van elke gedeelte is die sleutel tot die struktuur as geheel.

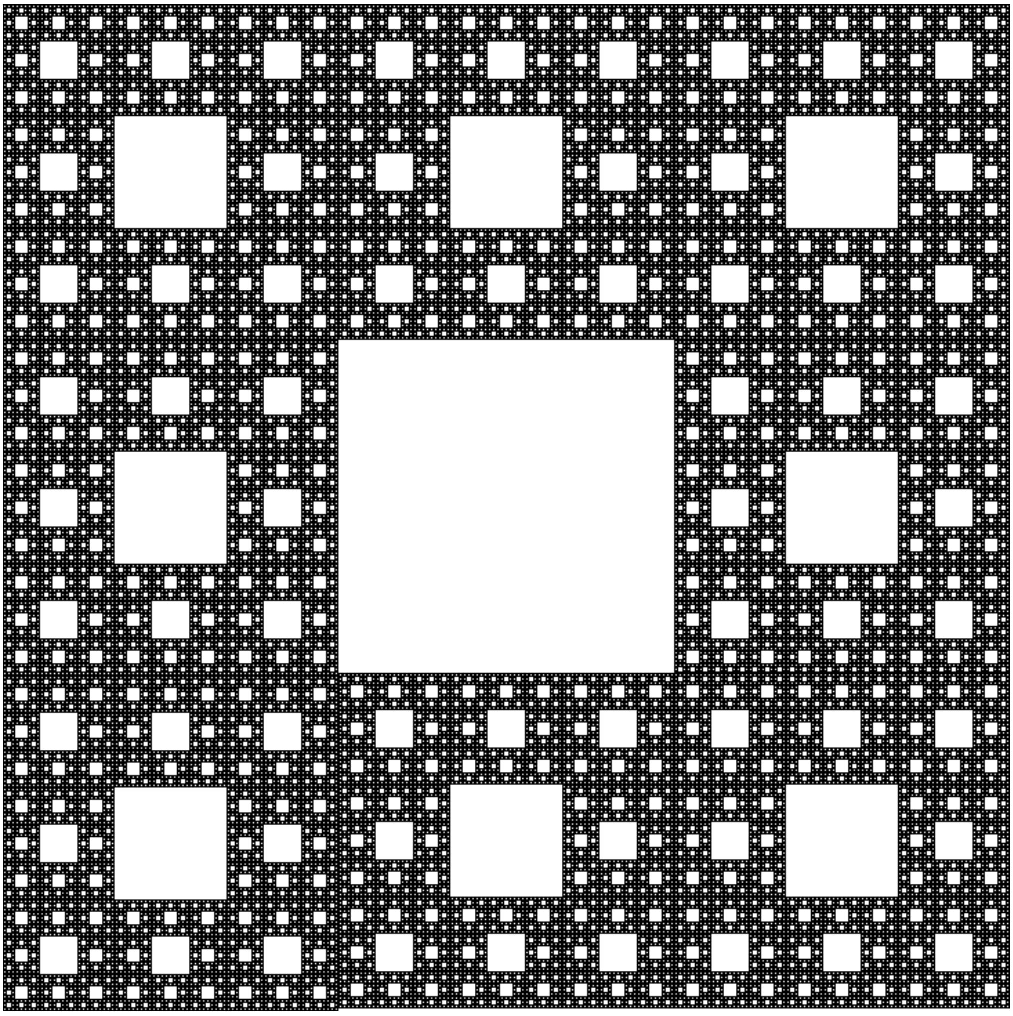
2.6.2.2 Die Sierpinski-tapyt

Die Cantor-versameling word as volg gekonstrueer (Stewart, 2003:722): Begin met die geslote interval [0;1] en verwyder die oop interval (⅓; ⅔). Daar is dan twee oorblywende intervalle, naamlik [0; ⅓] en [⅔; 1]. Die middelste derde word dan as ‘n oop interval van laasgenoemde twee intervalle verwyder. Daar sal vier intervalle oorbly waarvan die middelste derde van elkeen verwyder word. Hierdie proses word op oneindige wyse voortgesit. Die Cantor-versameling bestaan uit die getalle wat in [0; 1] oorbly nadat al die oop intervalle verwyder is. Die totale lengte van al die intervalle wat verwyder is, is 1. Die Cantor-versameling bevat steeds ‘n oneindige aantal getalle.

Die Sierpinski-tapyt is ‘n soortgelyke illustrasie van die Cantor-versameling (Stewart, 2003:722). Die Sierpinski-tapyt word gekonstrueer deur die middelste neënde te verwyder van ‘n vierkant met sy 1 eenheid. Daarna word die sentrum van die oorblywende agt vierkante verwyder. Hierdie proses word op oneindige wyse voortgesit. Die som van die oppervlaktes van die verwyderde vierkante is gelyk aan 1.



Figuur 2.21 Ontwikkeling van die Sierpinski-tapyt



Figuur 2.22 Gevorderde ontwikkeling van die Sierpinski-tapyt

2.6.2.3 Opsomming

Die boomfraktaal en die Sierpinsi-tapyt is interessante materiaal om te gebruik vir die onderrig van die potensieel oneindige in die laerskool. Die Mandelbrot-versameling is gevorderde materiaal wat op tersiêre vlak gebruik kan word.

2.6.3 Irrasionale getalle

Studente sukkel om die begrip 'irrasionaal' te begryp en om hierdie rede wou die navorser in die konteks van oneindigheid die problematiek van nader beskou. Die volgende kort historiese oorsig van irrasionale getalle toon dat die ontwikkeling van die teorie hieromtrent problematies was en dat dit sekerlik geen wonder is dat mense dit moeilik vind om irrasionale getalle ten volle te begryp nie. In Hoofstuk 4 word die komplekse probleme van irrasionale getalle as nie-repeterende desimale uiteengesit.

Sommige reële getalle, soos byvoorbeeld $\sqrt{2}$, kan nie uitgedruk word as 'n verhouding tussen twee heelgetalle nie. Hierdie getalle word **irrasionale getalle** genoem. Die getal π (3,141592654....) is 'n irrasionale getal – 'n nie-herhalende, oneindige desimale getal. Dit verteenwoordig die verhouding tussen die omtrek en middellyn van 'n sirkel. In antieke Egipte het wiskundiges $({}^{4}/_{3})^{4}$ gebruik as hul benadering van die verhouding tussen die omtrek en middellyn van 'n sirkel (Serra, 2003:333). Chinese en Hindu wiskundiges het tydens die vroeë jare $\sqrt{10}$ gebruik. Deesdae word rekenaars ingespan om benaderings van π tot biljoene desimale te bereken.

Die getal φ is minder bekend as π, maar is besonder fassinerend. φ is die Griekse kleinletter *phi* en is 'n meetkundige verhouding wat tydens die 19de eeu bekend gestaan het as die 'goue verhouding' (*Golden Ratio / Divine Proportion*). Hierdie verhouding kom te voorskyn in die manier hoe sekere bome en blomme groei, asook in die skulp van die *Nautilus pompilius.* In die toenemende groeiproses vorm die skulp van die *Nautilus pompilius* 'n kurwe wat ooreenkom met die logaritmiese spiraal. Die logaritmiese spiraal kan geteken word met behulp van die goue reghoek. Die lengte en breedte van 'n goue reghoek is in die 'goue verhouding' (φ). φ is 'n irrasionale getal met die waarde 1,6180339887..... Die eerste duidelike definisie van φ is teen ongeveer 300 vC deur Euklides van Alexandrië geformuleer (Livio, 2002:3):

A straight line is said to have been cut in extreme and mean ratio when, as the whole line to the greater segment, so is the greater to the lesser.

Figuur 2.23 *Nautilus pompilius*

2.7 SAMEVATTING

Vanuit die perspektiewe van geskiedenis, filosofie en kognitiewe wetenskap is die begrip oneindigheid problematies. Die analise van die begrip van oneindigheid in die konteks van al drie hierdie perspektiewe dien as agtergrond vir die ontleding van data in Hoofstuk 4 van hierdie verhandeling. Die metodologie vir die navorsing in hierdie studie word in die volgende hoofstuk uiteengesit.

HOOFSTUK 3

METODOLOGIE VIR HIERDIE STUDIE

3.1 INLEIDING

Hierdie verhandeling bestaan hoofsaaklik uit twee dele, naamlik: (1) ‘n literatuurondersoek van ongeveer 85% en (2) die oorblywende gedeelte van 15% wat ‘n kwalitatiewe, empiriese ondersoek is. Laasgenoemde ondersoek dien as illustrasie en bevestiging van die teorieë wat deur die literatuurstudie blootgelê is. Die empiriese komponent van hierdie studie is redelik klein aangesien ‘n lywige vraelys gebruik is en verder omdat die omvangrykheid van die inligting in die literatuurondersoek gelei het tot buitengewone insig omtrent die onderwerp van hierdie verhandeling.

Die aanvanklike literatuurstudie van hierdie verhandeling het gefokus op die filosofiese en historiese fondamente van oneindigheid. Dit het die navorser in staat gestel om insig te verkry omtrent die omvang en kompleksiteit van die problematiek rondom die begrip oneindigheid. ‘n Ander uitvloeisel van die literatuurstudie was dat die navorser bewus geword het van navorsing wat reeds op die gebied van oneindigheid gedoen is en gesaghebbende skrywers is geïdentifiseer.

Kwalitatiewe navorsers ontwikkel gewoonlik hul eie navorsingsontwerp namate hulle vorder aangesien ‘n kwalitatiewe benadering ongestruktureerd, buigsaam en induktief van aard is. Hulle gebruik een of meer van die beskikbare strategieë of instrumente as ‘n hulpmiddel of riglyn (Fouché, 2002:271). Die kwalitatiewe paradigma spruit voort uit ‘n anti-positivistiese, verklarende benadering en is ideografies en holisties van aard (Fouché & Delport, 2002b:77). Kwalitatiewe navorsing bring die betekenis, ervaring en persepsies van navorsingdeelnemers na vore deur middel van beskrywende data in die deelnemer se eie geskrewe of gesproke woorde (natuurlike taal). Die kwalitatiewe navorser spits hom daarop toe om te verstaan eerder as om te verklaar. Hierdie soort navorsing is ‘n subjektiewe verkenning van die werklikheid vanuit die perspektief van die navorsingsdeelnemer – in teenstelling met die buitestaander se perspektief wat oorheersend is in die kwantitatiewe paradigma. ‘n Kwalitatiewe studie behels nie-statistiese metodes en ‘n klein aantal navorsingsdeelnemers of respondente (Fouché & Delport, 2002b:79).

3.2 NAVORSINGSONTWERP

Fouché (2002:272) verwys na vyf strategieë wat gebruik kan word om kwalitatiewe navorsing te ontwerp, naamlik: biografie, fenomenologie, *grounded theory*, etnografie en gevallestudie. Laasgenoemde vyf strategieë is verteenwoordigend vir verskeie dissiplines waar kwalitatiewe navorsing in die praktyk plaasgevind het (Fouché, 2002:276). In hierdie studie is die fenomenologiese strategie gebruik. ‘n Fenomenologiese studie beskryf die betekenis wat ervarings met ‘n verskynsel, onderwerp of konsep vir verskeie individue het (Fouché, 2002:273). In hierdie verhandeling is die begrip oneindigheid as vertrekpunt gebruik om te ondersoek watter betekenis dit vir leerders van verskillende ouderdomme het. Die navorser het die leefwêreld van die deelnemer betree deur middel van data-analise (vraelyste, onderhoude).

Induktiewe logika word in kwalitatiewe navorsing gebruik. Induktiewe redenasie is die kognitiewe proses waardeur ‘n mens algemene aspekte onder spesifieke voorbeelde ontdek wat lei tot die formulering van abstrakte kategorieë of waarneming van algemene verwantskappe (Cangelosi, 1996:85). In hierdie verhandeling is daar ooreenstemmende aspekte waargeneem ten opsigte van die intuïtiewe gedagtes van leerders omtrent oneindigheid.

Die doel van ‘n fenomenologiese studie is ‘n poging om individue se persepsies en perspektiewe te verstaan. Om hierdie rede moet bevindings in verband gebring word met bestaande teorieë en navorsing (Fouché & Delport, 2002a:268). Die voorafgaande impliseer dat 'n literatuuroorsig na die formulering van die navorsingsbevindings behoort plaas te vind. Die wyse waarop hierdie literatuuroorsig plaasgevind het, word in paragraaf 3.7 van hierdie hoofstuk beskryf.

3.3 WAARNEMING VAN DIE RESPONDENTE

Deelnemerwaarneming is 'n kenmerkende kwalitatiewe benadering tot data en dit impliseer dat data nie werklik tot syfers gereduseer kan word nie (Strydom, 2002:279). Mense se ervaring van realiteit is nie direk toeganklik vir buitestaanders nie en daarom moet daar metodes wees om hul gedagtes so akkuraat moontlik aan die lig te bring. Terwyl die navorsing gedoen word, moet die navorser deeglike aantekeninge (*field notes*) maak (Strydom, 2002:280).

Die waarneming van die respondente in hierdie verhandeling het plaasgevind deur middel van onderhoude na aanleiding van die beantwoorde vraelyste. Op grond hiervan het die navorser aantekeninge gemaak.

Die fenomenologiese benadering is belangrik in deelnemer-waarneming aangesien die navorser poog om 'n diepliggende insig in die manifestasie van die realiteit te bekom (Strydom, 2002:280). Deelnemer-waarneming is anti-positivisties in dié sin dat dit nie ten doel het om kwantitatief te meet nie – of om reëls vir gedrag te bekom nie. Dit is belangrik om daarop te let dat die deelnemer, en nié die waarneming nie, beklemtoon word.

3.4 NAVORSINGSVELD

Soos verduidelik in die inleiding van hierdie hoofstuk is daar 'n klein aantal respondente gekies. Die navorser het gefokus op studente by *Tshwane South College: InnerCity Campus* aangesien sy reeds vir 12 jaar lank daar onderrig en juis die redes vir swak akademiese prestasie van hierdie studente in wiskunde wou ondersoek. Om 'n redelike gebalanseerde siening te verkry ten opsigte van die navorsingsprobleem is deelnemers gekies uit verskillende kulture in Suid-Afrika. Deelnemers is gekies uit: (1) *Tshwane South College: InnerCity Campus* te Schoemanstraat in Pretoria – 6 deelnemers; en (2) Hoërskool Menlopark, Pretoria – 3 deelnemers in graad 10; en (3) Universiteit van Pretoria – 1 tweedejaar-student. Deelnemers van *Tshwane South College* was swart studente (graad 12) uit voorheen benadeelde gemeenskappe. Deelnemers van Hoërskool Menlopark en die Universiteit van Pretoria was blankes uit meer bevoorregte gemeenskappe. Die navorsingsdeelnemers se ouderdomme het gewissel tussen 16 en 20 jaar. Die navorser wou insig verkry in die intuïtiewe denke van leerders van verskillende ouderdomme, agtergronde en ervaring.

3.5 INSAMELING VAN DATA

Vraelyste is gebruik sodat dit kon dien as vertrekpunt vir semi-gestruktureerde onderhoude. Nadat die doel van die vraelys uiteengesit is, is deelnemers aangemoedig om soveel as moontlik neer te skryf wanneer hulle die vrae beantwoord. Vrae is op só ‘n wyse gevra dat dit die deelnemer aanspoor om meer te sê as slegs ‘ja’ of ‘nee’. Die rede hiervoor is dat die navorser juis kwalitatiewe insig wou probeer kry in die leefwêreld van die deelnemer in sy natuurlike taal.

Voordat die vraelys opgestel is, is daar deeglik besin omtrent die inligting wat bekom moet word. Die doel van die vraelys is om

- die intuïtiewe gedagtes van die leerder omtrent oneindigheid bloot te lê
- die leerder se persepsie van irrasionale getalle (as manifestasie van oneindigheid) vas te stel
- te bepaal of die leerder ‘n intuïtiewe aanvoeling het vir ‘n onderskeid tussen aktuele en potensiële oneindigheid
- te bepaal of verdwyningspunte by perspektieftekeninge, die werk van Escher en fraktale op sinvolle wyse gebruik kan word in wiskunde-onderwys om aan te sluit by leerders se intuïtiewe begrip van

oneindigheid ten einde die problematiek van die konsep oneindigheid aan te spreek

Vraelyste is persoonlik aan respondente gegee sodat hulle dit in hul eie tyd kon invul. Daar is ooreengekom dat die vraelyste die volgende dag ingedien sou word. Persoonlike kontak met respondente het daartoe bygedra dat alle vraelyste terugontvang is.

Oor die algemeen het respondente die vrae baie volledig beantwoord. Hierdie beskrywings het gelei tot die blootlegging van die intuïtiewe gedagtewêreld van leerders en aspekte wat bruikbaar sal wees in die sinvolle onderrig van die begrip oneindigheid.

Vraelyste wat gebruik is, verskyn as aanhangsels aan die einde van hierdie verhandeling.

3.6 ONDERHOUDE

Onderhoude is die belangrikste manier om data in te win wanneer kwalitatiewe navorsing gedoen word. Die stories wat mense vertel is ‘n mikrokosmos van hul bewussyn (Greeff, 2002:292). ‘n Onderhoud is nie ‘n dialoog nie. Die navorser behoort ‘n lae profiel te handhaaf en aan die deelnemer die maksimum kans gee om sy storie te vertel. Die uitgangspunt was om meer te luister as te praat.

Die een-tot-een (navorser en respondent) onderhoude was oorwegend ongestruktureerd of semi-gestruktureerd. Ongestruktureerd impliseer dat daar nie ‘n volledige voorafbeplande lys vrae opgestel is vir die onderhoude nie. Elke individu se beantwoorde vraelys is as uitgangspunt gebruik. Die navorser het die deelnemer se antwoorde deeglik bestudeer en aantekeninge gemaak omtrent die aspekte wat uitgebrei en verduidelik moes word. Individuele onderhoude het plaasgevind op die dag wat die respondent sy vraelys terugbesorg het. Respondente was baie spontaan tydens onderhoude en waardevolle gesprekke het hieruit voortgespruit. Een van die onderhoude het ongeveer 45 minute geduur: Respondent T het heeltemal vasgevang geraak in Escher se *Circle Limit I*; hy het raakgesien hoe Escher dit beplan het en het verduidelik dat hy voorheen 'tegniese tekeninge' as vak bestudeer het. Die navorser het deeglike aantekeninge gemaak van elke onderhoud wat gevoer is. Die lengte van onderhoude het gewissel tussen 15 en 45 minute. Besonderhede van respondente se vraelys-antwoorde en onderhoude word volledig bespreek in Hoofstuk 4 van hierdie verhandeling.

3.7 ANALISE EN INTERPRETASIE VAN DIE DATA

Die funksie van data-analise is om orde, struktuur en betekenis aan die inligting te gee (De Vos, 2002:339). Die navorser het die antwoorde van die respondente – tesame met die aantekeninge van die onderhoude - herhaaldelik deeglik bestudeer om werklik insig te verkry in die respondente se persepsie van oneindigheid. Daarna is die antwoorde en onderhoude gebruik om data te organiseer ten opsigte van die volgende kategorieë:

- intuïtiewe begrip van oneindigheid
- insig omtrent irrasionale getalle
- onderskeid tussen potensieel en aktueel oneindige
- intuïtiewe insig omtrent verdwyningspunte, fraktale en die werk van Escher

Die metode van triangulasie (De Vos, 2002:342) is gebruik. Die navorser het verskillende bronne geraadpleeg wat insig kon gee omtrent die navorsingsonderwerp en bevindings van die data-analise. Die belangrikste bronne wat hiervoor gebruik is, is die volgende:

3.7.1 David Tall

E-pos-kommunikasie is aangegaan met Emeritus professor (wiskunde-kognisie) David Tall by die Universiteit van Warwick. Inligting is verkry van die akademiese webwerf: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall. Die volgende belangrike artikels is bestudeer:

- *Infinity – The Never-Ending struggle*
- *Natural and Formal Infinities*
- *The Notion of Infinite Measuring Number and Its Relevance in the Intuition of Infinity*
- *A Child Thinking of Infinity*

3.7.2 Wolfgang Mückenheim

E-pos-kommunikasie is aangegaan met Prof. Dr. Wolfgang Mückenheim. Hy is dekaan van die Departement Algemene Wetenskappe by die Universiteit van Toegepaste Wetenskappe in Augsburg (Duitsland). Inligting is bekom van sy webwerf: http://www.fh-augsburg.de/~mueckenh/. Die volgende artikels is van belang:

- *Infinite sets are non-denumerable*
- *On Cantor's important proofs*
- *The Meaning of Infinity*
- *On the abundance of the irrational numbers*
- *On Cantor's Theorem*
- *A severe inconsistency of transfinite set theory*
- *Physical Constraints of Numbers*
- *Actual infinity (*http://en.wikipedia.org/wiki/Actual_infinity*)*

3.7.3 George Lakoff & Rafael E. Núñez

Die boek, *Where mathematics comes from,* is gebruik.

3.7.4 ED Dubinsky (et al)

Twee artikels is gebruik:

- *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1*

- *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 2*

3.8 OPSOMMING

Die deelnemerwaarneming deur middel van vraelyste en onderhoude het die navorser eerstehandse toegang gegee tot die gedagtewêreld van respondente omtrent die begrip oneindigheid. Dít was besonder interessant en waardevol. Verskillende teoretiese perspektiewe van gesaghebbende skrywers (paragraaf 3.7) is gebruik om die data te interpreteer. Die lywige literatuurondersoek, tesame met die data van die bondige empiriese ondersoek, het die navorser in staat gestel om 'n diepgaande geheelbeeld te kry van die problematiek betreffende die begrip oneindigheid en het gelei tot 'n intensiewe ontleding van data wat in hoofstuk 4 uiteengesit word.

HOOFSTUK 4

INTERPRETASIE VAN DIE DATA

Die doel van hierdie hoofstuk is om orde, struktuur en betekenis te gee aan data wat ingesamel is. Die metode van triangulasie, soos uiteengesit in Hoofstuk 3 van hierdie verhandeling, is gebruik. Die data wat met behulp van vraelyste en onderhoude van die respondente verkry is, word in verband gebring met navorsing van, onder andere, Tall, Mückenheim, Fischbein, Dubinsky, Lakoff en Núñez.

4.1 Intuïtiewe definisies van oneindigheid

Piaget en sy navolgers interpreteer kinders se begrip van oneindigheid noodwendig in die konteks van ontwikkelingstadiums (Monaghan, 2001:243). Om hierdie rede sal kinders se begrip van oneindigheid deur Piaget (en navolgers) hiërargies beskou word. Monaghan (2001:243) glo dat kinders se verstandelike belewenis van oneindigheid teenstrydighede bevat. Fischbein en sy medewerkers het die teenstrydige aard van kinders se begrip van limiet en oneindigheid as grondliggend beskou vir die doel van hul navorsing (Monaghan, 2001:243).

Die mens se intuïsie is gegrond op geïnternaliseerde interpretasies van sensoriese prikkels wat tydens sy lewe plaasvind – of eenvoudiger gestel: die mens se intuïsie is gegrond op sy geakkumuleerde ervarings (Klass-Tsirulnikov & Katz, 2006:3). Die bestudering van intuïsie het ‘n belangrike rol gespeel in Fischbein se werk. Die belangrikste hipotese wat gevolg het uit Fischbein se navorsing is:

> ....our intuition of infinity is intrinsically contradictory because our logical schemes are naturally adapted to finite objects and events (Monaghan, 2001:243).

Monaghan het in 1986 leerders se begrip van limiete en oneindigheid bestudeer. Een van die belangrike bevindings was dat leerders primêr fokus op oneindigheid as ‘n proses – iets wat onbepaald voortgaan, met ander woorde potensiële oneindigheid (Monaghan, 2001:244).

In hierdie studie is leerders gevra om oneindigheid in hul eie woorde te beskryf en ‘n voorbeeld uit die alledaagse lewe te verskaf. Hulle het as volg geantwoord:

Respondent A:
- ....iets met geen einde. Dit hou aan en aan
- byvoorbeeld: sterre

Respondent B:
- *....without an ending*
- *numbers, money, time and distance*

Respondent C:
- *continuation of certain sequence of objects or numbers etc*
- *the number of times I breathe*

Respondent L:
- Wanneer iets te veel is of ‘n getal te groot is dat daar nie meer ‘n naam vir die getal is nie.
- sandkorrels, miere, lewende organismes

Respondent M:
- *....something which is never ending*
- *soil, grass, sugar grains, salt grains, numbers*

Respondent N:
- iets wat nooit ophou nie, dit hou vir altyd aan
- water (uit die see)

Respondent R:
- *unmeasurable quantity*
- *number of air molecules in the world; number of water molecules in the world; number of light particles in a day*

Respondent T:

- *something that is endless*
- *numbers, the universe*

Respondent W:

- *something that does not come to an end*
- *breathing*

Slegs respondente C en W se voorbeeld is dié van ‘n PROSES, naamlik ‘asemhaling’. Asemhaling is ‘n proses wat (sonder om aan die dood te dink) nooit ophou nie. Respondente *A* en *N* impliseer ook dat oneindigheid ‘n proses is – hulle sê ‘...dit hou aan en aan’. Hul (A en N) voorbeelde verteenwoordig nie prosesse nie – dis konkrete voorwerpe soos sand, sout en miere. Respondente *N* en *A* se intuïtiewe definisies van oneindigheid en hul voorbeelde is teenstrydig. Die voorbeelde is almal ontelbare voorwerpe (byvoorbeeld sand, sout, miere) behalwe ‘see’ en ‘asemhaling’. Respondent M het in haar onderhoud gesê dat sout ‘n voorbeeld van oneindigheid is omdat dit ontelbaar is. Alhoewel die leerders oneindigheid hoofsaaklik gedefinieer het as herhalende prosesse (‘*neverending*’ en ‘dit hou aan en aan’) weerspieël hul voorbeelde dit nie. Die intuïtiewe definisies van die respondente beskryf *potensiële oneindigheid* alhoewel hul voorbeelde dit in die meeste gevalle nie weerspieël nie. Fischbein (2001:310) gee ‘n alternatiewe naam vir potensiële oneindigheid, naamlik *dinamiese oneindigheid.* Hierdie dinamiese oneindigheid is (volgens Fischbein) nie ‘n bestaande of gegewe oneindigheid nie:

> We deal with a dynamic form of infinity when we consider processes, which are, at every moment, finite, but continue endlessly (Fischbein, 2001:310).

Respondent *R* sê dat oneindigheid ‘n ‘onmeetbare hoeveelheid’ is. Dit wil voorkom asof hy molekules en ligpartikels nie as ‘ontelbaar’ beskou nie, maar as ‘onmeetbaar’.

Respondent *L* verwys na ‘n getal wat so groot is dat daar nie ‘n naam voor bestaan nie. Haar intuïtiewe definisie van oneindigheid stem ooreen met die voorbeelde wat sy gee: miere, sandkorrels en lewende organismes is ontelbaar en volgens haar begrip is daar nie ‘n naam vir so ‘n groot getal nie. Sy verbind dit nie kognitief met ∞ nie. Monaghan (2001:248) het ondervind dat wanneer oneindigheid beskou word as ‘n groot getal, dit die vorm van ‘n vae veralgemening van ‘n groot getal aanneem.

Respondent *N* sê ‘....oneindig is ‘n term vir getalle wat mens nie meer kan sien nie.’ Haar voorbeeld vir oneindigheid uit die alledaagse lewe is water. Oneindigheid is vir haar iets wat sy nie kan visualiseer nie en daarom is dit vir haar iets abstrak.

David Tall (2001a:6) het navorsing gedoen met adolessente en gevind dat hulle oneindigheid dikwels in terme van potensieel oneindige prosesse of willekeurige groot getalle interpreteer. Laasgenoemde intuïtiewe interpretasies van leerders bots met die vergelyking van oneindige versamelings, met ander woorde ten opsigte van die kardinaalgetal van versamelings. Die vergelyking van byvoorbeeld die versameling natuurlike getalle met die versameling ewe getalle in terme van kardinaliteit is vir leerders ‘n baie moeiliker begrip om te verstaan as potensiële oneindigheid. David Tall (2001a:7) se sewejarige seun het nie gedink dat ‘n oneindige versameling kinders en ‘n oneindige versameling lekkers só gerangskik kan word dat elke kind twee lekkers kry nie. In hierdie studie het respondente W, N en A ook oneindigheid as ‘n proses geïnterpreteer.

Die sewejarige seun Nic (Tall, 2001a:6) het oneindigheid beskou as ‘n groot getal wat opgetel, afgetrek en vermenigvuldig kan word soos enige ander getal. Dít het hy gedoen na aanleiding van sy ervaring van positiewe en negatiewe heelgetalle waarmee hy vertroud was. Respondente *A, B, C, L, M, N, T* en *W* pas hul ondervinding van positiewe oneindigheid toe op dié van negatiewe oneindigheid. Indien positief oneindig bestaan, moet negatief oneindig ook bestaan.

4.2 Getalle met oneindige repeterende en nie-repeterende desimale

In hierdie studie het 8 uit 9 respondente gesê dat ‘n mens nie die antwoord van $\sqrt{2}$ volledig kan neerskryf nie, maar hulle het nie almal redes hiervoor verskaf nie. Drie van die respondente het gesê ‘n mens kan dit nie neerskryf nie aangesien die sakrekenaar ‘n beperkte aantal desimale syfers gee. Respondent M was een van die respondente wat gesê het dat ‘n sakrekenaar se syfers beperk is. M is in haar onderhoud gevra of sy al die syfers sal kan neerskryf as sy ‘n rekenaar met groter kapasiteit tot haar beskikking het. Sy het geantwoord dat sy nog nooit só ‘n rekenaar gesien het nie en daarom weet sy nie. Sy het verder uitgebrei en gesê dat ‘n mens se brein te klein is daarvoor en dat dit nie sin maak nie. Dit was duidelik dat respondent M ongemaklik was met die al desimale syfers van $\sqrt{2}$. Dit wil voorkom asof leerders hul ongemaklikheid verbloem deur die sakrekenaar se beperkinge as verskoning te gebruik. Hierdie ongemak van leerders stem ooreen met dít wat Monaghan (volgende paragraaf) ervaar het. Slegs twee van die studente het gesê ‘n mens kan dit nie neerskryf nie aangesien dit oneindig is.

Monaghan (2001:248) het ondersoek ingestel of oneindige getalle vir jongmense bestaan alvorens hulle formele wiskundige onderrig ontvang het ten opsigte van die eienskappe van oneindige getalle. Dit antwoord hierop was ‘n onomwonde ja. Repeterende desimale is vir baie leerders oneindige getalle. Die rede hiervoor is volgens Monaghan (2001:248) die kognitiewe krag van oneindigheid as ‘n proses. Daar is egter min leerders wat bewus is van die bestaan van nie-repeterende oneindige desimale (Monaghan, 2001:249). Dit bly vir leerders moeilik om die begrip irrasionale getalle te verstaan. Hoe kan ‘n mens seker wees dat die desimale van $\sqrt{2}$ nie na 500 plekke (byvoorbeeld) repeteer nie? Dit kan bewys word dat $\sqrt{2}$ nie ‘n rasionale getal is nie, maar so ‘n formele, teoretiese bewys is nie geskik vir leerders nie. Sekere studente (op honneursvlak) het ook teenstrydigheidsbewyse met agterdog bejeën (Tall & Schwarzenberger, 1978:8). Teenstrydigheidsbewyse word in die praktyk moeilik aanvaar.

Respondent G is gevra of 0,9999999.... (met ander woorde, 0,9 repeterend) gelyk aan 1 of kleiner as 1 is. Sy antwoord was: 'Streng gesproke is dit kleiner as 1, maar daar word algemeen aanvaar (met afronding) dat dit gelyk is aan 1.' G se antwoord stem ooreen met Tall en Schwarzenberger (1978:1) wat ondervind het dat die meerderheid universiteitstudente in hul eerstejaar dink dat 0,99999..... kleiner as 1 is. Tall en Schwarzenberger gaan voort en bespreek die moontlike oorsake van studente se foutiewe antwoorde. In sekondêre skole word begrippe van 'n hoë kognitiewe vlak omvorm tot 'n toepaslike manier om aan ontwikkelende studente te onderrig. Hierdie omvorming kan moontlik lei tot verlies aan presiesheid en 'n toename in konseptuele ingewikkeldheid. Die informele taal van die omvorming kan onbedoelde betekenisse van die omgangstaal bybring wat nie van toepassing is op die begrip nie. Tall en Schwarzenberger (1978:6) glo dat daar verskeie redes is vir die verwarring by studente wat dink dat 0,9 repeterend kleiner as 1 is, naamlik:

- hulle verstaan nie die begrip limiet nie
- die wanvertolking van die simbool 0,9999.... as 'n groot maar eindigende aantal 9's
- die intreding van die infinitesimale (oneindig naby, maar nie gelyk nie)
- die persepsie dat daar 'n een-tot-een verwantskap bestaan tussen oneindige desimale en reële getalle

Dubinsky (2005b:261) wys ook daarop dat studente glo dat die vergelyking 0,99999....... = 1 vals is. Studente dink dat (1) 0,99999... 'n bietjie kleiner is as 1, die naaste wat jy daaraan kan kom sonder om dit werklik te bereik; en (2) die verskil tussen die twee (0,9999.... en 1) oneindig klein is – Tall noem dit die intreding van die ifinitesimale (1978:6); of (3) dat 0,9999... die laaste getal voor 1 is.

Dubinsky (2005b:261) gee twee verduidelikings vir die voorafgaande verwarrings van studente in terme van APOS-analise. Eerstens, verwarring ontstaan by studente wat beperk word deur ‘n proses-begrip van 0,999..... (as ‘n oneindige opvolging van 9’s, maar wat ‘n objek-begrip het van die getal 1. Die verskil tussen die twee begrippe is dat ‘n proses deur die individu verstaan word as iets wat ‘n mens doen terwyl ‘n objek verstaan word as iets wat ís en waarmee ‘n mens aksies kan uitvoer. ‘n Student wat beperk is tot ‘n proses-begrip van 0,999... kan die korrekte beskouing hê dat 1 nie op direkte wyse deur die proses voortgebring word nie, maar sonder die inkapseling van die proses is ‘n begrip van die “waarde” van die oneindige desimaal betekenisloos. Nietemin, indien ‘n student die proses as totaliteit kan beskou en dan ‘n evalueringsaksie op die ry 0,9; 0,99; 0,999;...... uitvoer, dan is dit moontlik om die inkapseling van die proses as ‘n transendente objek te begryp (Dubinsky, 2005b:261). Dit is gelyk aan 1 omdat, sodra 0,999... as ‘n objek beskou word, dit ‘n geval is waar twee statiese objekte vergelyk word, naamlik 1 en die objek wat volg uit die inkapseling. Op hierdie manier is dit heeltemal geregverdig om aan laasgenoemde objek te dink as ‘n getal. Die verskil tussen die twee getalle kan alleenlik zero wees.

‘n Tweede verduideliking volgens Dubinsky (2005b:262) vir die verwarring van studente met repeterende desimale is van toepassing op studente wat nog nie ‘n volledige prosesbegrip van die oneindige desimale gekonstrueer het nie. In hierdie geval verstaan die student al die stappe van die proses wat die oneindige desimale voortbring. Byvoorbeeld, die student dink 0,9999.... bestaan uit ‘n reeks 9’s wat self eindigend is, maar wat onbepaald voortgaan. Dubinsky beskryf ‘n gevallestudie waar ‘n student wat gesê het ⅓ = 0,333.... omdat ‘n mens 1 deur 3 kan deel en die resultaat is 0,333... Die student was onversetlik daaromtrent dat die vergelyking 0,999.... = 1 vals is omdat 1 gedeel deur 1 nié 0,999.... is nie. Dit is moontlik dat die student (1÷3) en 0,333.... as prosesse beskou het. Verder beskou die student 0,999.... moontlik as ‘n proses en 1÷1 as ‘n proses wat nie die resultaat 0,9999... gee nie.

Op universiteitsvlak kan ‘n mens ‘n logiese bewys gee waarom 0,99999.... = 1. Vir leerders kan ‘n mens dit (byvoorbeeld) as volg aantoon:

$\frac{1}{3}$ = 0,333........

3 X ($\frac{1}{3}$) = 1

3 X 0,333.... = 0,9999...... = 1

Dit is redelik maklik om deur middel van langdeling aan te toon dat enige breuk $^{m}/_{n}$ (waar *m* en *n* heelgetalle is) ‘n repeterende desimaal is. Die omgekeerde, dat enige repeterende desimaal ‘n breuk is, is veel moeiliker (Tall & Schwarzenberger, 1978:8). Laasgenoemde kan op universiteitsvlak bewys word.

Die menslike verstand is hoofsaaklik aangepas om eindigende werklikhede in ruimte en tyd te hanteer (Fischbein, 2002:309). Sodra ‘n mens te doen kry met die aktueel oneindige, kom die teenstrydighede na vore. Potensiële (dinamiese) oneindigheid is ter sprake wanneer ‘n mens die prosesse, wat op enige gegewe oomblik eindigend is, maar oneindig voortduur, beskou. Fischbein (2002:310) glo dat dit nie problematies is om ‘n lynsegment onbepaald te verleng in ‘n mens se verbeelding nie. Laasgenoemde is immers ‘n voorbeeld van dinamiese oneindigheid – ‘n proses wat onbepaald voortgaan. In die vraelyste het al die leerders op een na gesê dat √2 nie volledig neergeskryf kan word nie. Om neer te skryf en om iets in die verbeelding voor te stel, is natuurlik verskillend. Fischbein (2002:310) skryf dat ‘n 12-jarige kind reeds begryp (in sy verbeelding) dat ‘n lynsegment onbepaald verleng kan word. Kinders verstaan die gelykheid van $\frac{1}{3}$ en 0,3333........ aangesien 0,333.... dinamiese oneindigheid verteenwoordig. Wanneer leerders gevra word of 0,333.... gelyk is aan $\frac{1}{3}$, is hulle geneig om te sê dat 0,333.... strewe na $\frac{1}{3}$ - wat wiskundig nie korrek is nie (Fischbein, 2001:310).

4.3 Verskillende benaderings omtrent die kognisie van oneindigheid

Die benadering van Dubinsky (APOS-teorie) is in paragraaf 4.2 (ten opsigte van repeterende desimale) bespreek. Die beskouing van groot getalle volgens APOS-analise word in paragraaf 4.6 bespreek. In hierdie afdeling word die benaderings van Lakoff en Núñez (beliggaamde kognisie) en Tall (die rol van beliggaamde persepsies in natuurlike en formele oneindigheid) beskou. Tall, Dubinsky, Robutti, Schiralli en Sinclair verskaf redes waarom die BMI van Lakoff en Núñez vir hulle onaanvaarbaar is. Die manier waarop Robutti artefakte gebruik in die onderrig van oneindigheid word ook bekyk. Daar word ook kortliks gewys op die rol van godsdiens en kultuur in die vertolking van oneindigheid by studente.

4.3.1 Beliggaamde kognisie *(embodied cognition)*

Die voorbeelde wat in vraag 6 tot 9 in die vraelys gebruik is, is voorbeelde van potensiële oneindigheid. Die leerders het wel gedink dat hierdie vrae oor dieselfde begrip gaan. Respondent *N* sê dat dit oor oneindigheid gaan. Respondent *L* sê dit gaan oor meetkunde en figure! Ses van die nege leerders het geantwoord dat Jan (vraag 6) aangehou het om te spring. Lakoff en Núñez (2000:156) sê dat *John jumped and jumped and jumped* gewoonlik geïnterpreteer word as ‘n oneindige proses van spring. “Spring” (*jump*) is inherent ‘n perfektiewe (voltooide) werkwoord – in teenstelling met ‘n onvoltooide werkwoord soos “vlieg” of “swem”. ‘n Oneindig herhalende proses word in die sin *Jan het gespring en gespring en gespring* geïmpliseer deur die gebruik van ‘n perfektiewe werkwoord.

Herhalende aksie word in taal in verskillende sintaktiese vorms gebruik om volgehoue aksie uit te druk. In kognitiewe terme word dit gekenmerk deur die metafoor *Indefinite Continuous Processes Are Iterative Processes* (Lakoff & Núñez, 2000:157). Daar is ‘n kognitiewe rede hoekom so ‘n metafoor behoort te bestaan, naamlik:

> Processes in general are conceptualized metaphorically in terms of motion via the event structure metaphor, in which processes are extended motions (Lakoff & Núñez,2000:157).

Dit is moeilik om oneindige, voortgesette beweging te visualiseer. In paragraaf 4.1 van hierdie hoofstuk het respondent N gesê oneindigheid is iets wat aanhou en aanhou – dis iets wat ‘n mens nie meer kan sien nie! Om oneindige, voortgesette beweging vir buitengewone lang periodes te visualiseer, is eintlik onmoontlik. Die mens visualiseer kort bewegings en herhaal dit dan – oneindige, voortgesette beweging word gekonseptualiseer as herhalende beweging. Oneindige kontinue prosesse word gekonseptualiseer via die metafoor waarvolgens prosesse oneindige herhalende prosesse is wat ‘n eindpunt en resultaat het. Die onbepaalde kontinue proses om ‘n limiet in wiskunde te bereik word kenmerkend gekonseptualiseer via die metafoor as ‘n oneindige opvolging van goed-gedefinieerde stappe (Lakoff & Núñez, 2000:157).

Die BMI is deur Lakoff en Núñez ingelei in hul boek *Where mathematics comes from* (2000). Daar is twee begrippe in wiskunde vir oneindigheid, naamlik (1) die letterlike begrip: potensiële oneindigheid en (2) die metaforiese begrip: aktuele oneindigheid (Lakoff & Núñez, 2000:XVI). Die metafoor kom voor wanneer die aktueel oneindige gekonseptualiseer word as die resultaat van ‘n herhalende proses. Die teiken-gebied van die BMI is die gebied van oneindige prosesse en linguïste noem dit onvoltooide prosesse (Lakoff en Núñez, 2000:158). Die effek van die BMI is om ‘n metaforiese voltooiing toe te voeg by die voortgesette prosesse sodat dit beskou kan word asof dit ‘n resultaat het: ‘n oneindige voorwerp. Die uniekheid van die finale toestand van ‘n voltooide proses is ‘n produk van menslike kognisie en nié ‘n feit van die eksterne wêreld nie (Lakoff & Núñez, 2000:160). Met ander woorde: dit is ‘n gevolg van die manier waarop ‘n mens die voltooide proses konseptualiseer. Wiskunde vloei voort uit die aard van die mens se brein en sy beliggaamde ervaring (Lakoff & Núñez, 2000:XVI). Via die BMI word oneindigheid omgeskakel vanaf ‘n oneindige proses na ‘n bepaalde, unieke entiteit.

4.3.2 Natuurlike en formele oneindigheid

Begrippe betreffende oneindigheid spruit normaalweg voort uit refleksies omtrent eindigheid. Hierdie reflekterende gedagtes word dan uitgebrei ten opsigte van die oneindige. Hierdie persoonlike opvattings noem David Tall (2001b:199) *natuurlike oneindigheid.* Die individu se natuurlike belewenis van oneindigheid is onbestendig en teenstrydig. Wiskundiges het tydens die 20ste eeu deur middel van formalisme gepoog om hierdie teenstrydighede te rasionaliseer. Hulle het dít bewerkstellig deur 'n lys aksiomas te selekteer waarvolgens *formele oneindigheid* ontwikkel word deur middel van formele deduksie (Tall, 2001b:199).

Die konstruksie van kennis by 'n jong kind behels dat hy bou op persepsies van die wêreld. Hy maak ook gebruik van die ontwikkelende konsep-beeld wat al hoe meer verfynd raak. Die gesofistikeerde denker kan kenmerke van struktuur en verwantskappe waarneem tussen die wêreld en begripsvorming (Tall, 2001b:202). 'n Natuurlike benadering behels dat die konstruksie van 'n aksiomatiese stelsel bou op die konsep-beeld om 'n persoonlike betekenis te gee aan die formele definisie. 'n Formele benadering fokus hoofsaaklik op die definisies en gebruik formele deduksie om stellings te genereer sonder die gebruik van intuïsie.

Die meeste wiskundiges gebruik beide natuurlike en formele denkprosesse. Só is wiskundiges geneig om die natuurlike benadering te volg in meetkunde en topologie waar visuele beelde aanleiding gee tot stellings wat bewys moet word. 'n Formele benadering word weer gebruik in die geval van abstrakte simboliese teorieë.

Nevertheless, it is a common goal to produce written formal proofs of theorems, whether constructed formally or underpinned by natural imagery (Tall, 2001b:204).

Die biologiese brein bevat beide formele en informele (natuurlike) beelde. Onderlinge verbintenisse tussen hierdie beelde sal voorkom en dit kan lei tot verwarring. Die verbintenisse kan ook lei tot positiewe voordeel wanneer die formele op toepaslike wyse in verband gebring word met die natuurlike. Op hierdie manier is beliggaamde betekenisse die fondamente van wiskunde. 'n Volledige formele uiteensetting van wiskundige teorie is, onder andere, deur Russel en Whitehead (1910-1913) voorgestel (Tall, 2001b:205). Na aanleiding hiervan sou 'n mens filosofies kon praat van 'n 'formele' begrip wat geheel en al voortgespruit het uit 'n formele teorie. Nietemin, wanneer 'n mens 'n denkbeeld vorm van 'n formele begrip, spruit dit voort as wesenlike deel van jou biologiese en kognitiewe ontwikkeling. Hilbert, die grondlegger van formalisme, was deeglik bewus daarvan dat dit in die praktyk moeilik of selfs onmoontlik is om begripsvorming alleenlik op formele deduksie te baseer. Met die term *formele begrip* erken Tall die bestaan van 'n onderliggende kognitiewe struktuur wat daardie begrip ondersteun.

Die konstruksie van beide natuurlike en formele oneindigheid is die produk van menslike denke en daarom word dit beskou in terme van beliggaamde kognisie (Lakoff & Núñez, 2000:XVI). Tall (2001b:199) glo dat formele deduksie so ver as moontlik fokus op formele logika en dat dit voorkeur geniet bo perseptuele beelde - en dat 'n netwerk van formele eienskappe nie afhang van 'n bepaalde beliggaming nie. Volgens Tall (2001b:206) gee Lakoff en Núñez 'n meeslepende en insiggewende verduideliking van '*where mathematics comes from'* in terme van liggaamlike ervaring en fisiese persepsie wat ondersteun word deur aspekte van taal. Tall glo dat Lakoff en Núñez by die natuurlike oneindigheid van die mens bly in plaas van om uit te kom by die formele benadering wat gesuiwer word deur middel van die abstrakte aspekte van aksiomatiese denke. Tall stem nie heeltemal saam met die werk van Lakoff en Núñez nie:

> It is my contention that their theoretical position is better at describing 'where mathematics comes form' rather than 'where mathematics goes to' (Tall, 2001b:206).

Die natuurlike wyse waarop mense leer, groei vanuit die individu se persepsies, aksies en refleksies. Die omsetting van beliggaamde gedagtes na formele wiskunde vind geleidelik plaas en bly dikwels baie nou aaneengeskakel met die natuurlike bron. Alle noodsaaklike wiskundige denke vind in die menslike brein plaas, maar dit beteken nié dat alle gedagtes verwant is aan beliggaamde persepsies nie (Tall, 2001b:207). Daar is fisiese bewyse dat verskillende dele van die brein vir natuurlike en formele denke gebruik word – breinskanderings het aangetoon watter dele van die brein aktief is tydens probleemoplossing (Tall, 2001b:207).

4.3.3 Die gebruik van artefakte

Ornella Robutti (2007:1) het sekere toepassings van die BMI in onderrig- en leersituasies ondersoek. Sy het, onder andere, ondersoek of die gebruik van artefakte (tradisioneel of tegnologies) die kognitiewe prosesse van studente ondersteun. Ergonomie-studies impliseer die moontlikheid dat die gebruik van artefakte die aktivering van skemas laat plaasvind in 'n vakgebied wat dan lei tot transformasie. Hierdie transformasie kan deur middel van sosiale aktiwiteit tussen studente deur bemiddeling van die onderwyser gebruik word (Robutti, 2007:2). Robutti glo dat metafore nie die enigste interpretasie-sleutel tot kognitiewe prosesse is nie. 'n Analise van die interaksie met 'n artefakt, wat 'n noodsaaklike bestanddeel is in begripskonstruksie, is (volgens Robutti) 'n tekortkoming in Lakoff en Núñez se boek *Where mathematics comes from* (Robutti, 2007:5).

Robutti (2007:5) glo dat die benadering tot kennis fundamenteel op twee maniere geskied, naamlik: (1) waarnemend-motories en (2) simbolies-rekonstruktief. Die eerste benadering behels aksie en waarneming wat impliseer dat leer gegrond is op aktiwiteit, aanraking, luister, beweging en sig. Die tweede benadering is formeel teenwoordig by die aanvang van die kognitiewe ontwikkeling van die kind. Laasgenoemde benadering is gegrond op simbole (linguïsties, wiskundig, logies) en begrippe, betekenisse. Die kognitiewe voorstelling daarvan word dan gekonstureer. Die gebruik van artefakte in die leer-situasie verseker dat studente aanvanklik waarnemend-motories betrokke is. Robutti (2007:6) het gepoog om 'n nuwe element, naamlik die gebruik van artefakte in leerder-aktiwiteite, te voeg by die kognitiewe perspektief van Lakoff en Núñez. Die geskiedenis van wiskunde is immers gekenmerk deur interaksie met artefakte. Kulturele elemente soos godsdiens het 'n beduidende invloed op die konstruksie van kognitiewe prosesse en die onderwyser moet daarmee rekening hou (Robutti, 2007:6). Hierdie aspek word in die volgende paragraaf verder bespreek.

4.3.4 Die rol van godsdiens in die kognisie van oneindigheid

Die rol van godsdiens is nie in hierdie verhandeling ondersoek nie, maar daar is genoegsame bronne wat die belangrikheid daarvan bevestig. In paragraaf 1.1 is daar ook opgemerk dat 'n godsdienstige perspektief noodwendig ter sprake sal kom by die interpretasie van oneindigheid. Enkele gedagtes hieromtrent word vervolgens bespreek.

Monaghan (2001:246) sê dat oneindigheid vele vorms en betekenisse het. Oneindigheid kom in meetkunde voor, maar dit hou ook verband met mistisisme en godsdiens. Wanneer die oneindige bespreek word, is dit logies om te verwag dat daar 'n godsdienstige perspektief ter sprake sal kom (Meroz, 1997:49). Dit wil voorkom of oneindigheid en godsdiens nog altyd verwant was. Aristoteles het oneindigheid en godsdiens gekorreleer. Thomas Aquinas het in die metafisiese (bonatuurlike) oneindigheid van God geglo. Hy het ook geglo dat niks in die skepping aktueel oneindig is nie, maar het die potensieel oneindige (volgens die siening van Aristoteles) aanvaar (Meroz, 1997:49). Die filosoof Spinoza het geglo dat God oneindig is op 'n manier wat die mens kan begryp, maar nie in die verbeelding kan voorstel nie. Strauss (1973:191) se onderskeiding tussen begrip en idee in kennisvorming is hier van belang. Die mens kan van God slegs 'n idee vorm, want hy kan God nie in 'n begrip vasvat nie. Meroz (1997:51) het ondersoek ingestel op watter manier die Joodse filosofie studente beïnvloed ten opsigte van die Achilles-paradoks. Sy bevinding was dat die Joodse agtergrond van studente 'n groot invloed het op die interpretasie van die paradoks (Meroz, 1997:68). Studente met 'n Joodse agtergrond sal heel waarskynlik oneindigheid in terme van Aristoteles se siening beskou.

Die BMI is ‘n algemene kognitiewe meganisme (Lakoff & Núñez, 2000:161). Normaalweg praat mense nie in die algemene omgang van ‘die oneindige’ nie. Dit word gewoonlik gebruik binne filosofiese of spirituele kontekste. Volgens die Griekse filosofie van die vroegste tye was alles deel van ‘n hoër kategorie. Daar is dus aanvaar dat daar ‘n oneindige lang stygende hiërargie van kategorieë bestaan. Hierdie oneindige stygende hiërargie het egter ‘n einde gehad, naamlik die hoogste kategorie van Bestaan (*Being*) wat alles omvat het (Lakoff & Núñez, 2000:161). Hierdie beweging vanaf ‘n onbepaalde stygende hiërargie tot ‘n hoogste, allesomvattende punt in die hiërargie kan beskou word as ‘n geval van die BMI waarvolgens die resultaat van ‘n oneindige herhalende proses van hoër kategorisering resulteer in ‘n hoogste kategorie.

Die metaforiese konsep van oneindigheid as ‘n unieke entiteit (die hoogste) is op natuurlike wyse uitgebrei tot godsdiens. Volgens die Christelike geloof is die krag van God die allesomvattende, hoogste punt. Dit is glad nie toevallig nie dat Georg Cantor geglo het dat die studie van oneindigheid in wiskunde teologies van belang is. Hy het in sy studie van die oneindige gepoog om wiskunde en godsdiens te versoen (Lakoff & Núñez, 2000:161).

4.4 Die begrip limiet

Die respondente het almal gesê dat die proses om segmente by te tel (vraag 13: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ .....) nie sal eindig nie. Tall (1980:173-174) verwys na navorsing waarin 84% van die 107 graad 8 en 9 leerders gedink het dat die proses nooit sal eindig nie. Die doel van Tall se studie was om leerders op informele wyse te laat kennis maak met die begrippe limiet en kontinuïteit sodat konsepvorming kan plaasvind voordat hulle met die teorie gekonfronteer word. Dit was duidelik dat die intuïtiewe konsepvorming by leerders spreek van die oneindige aard van die proses eerder as die eindige numeriese limiet. Die meeste leerders visualiseer limiet as ‘n dinamiese proses eerder as ‘n numeriese hoeveelheid (Tall, 1980a:174). Meer nog:

> ...many students come to recognise potential infinity as a reality but actual infinity as a mathematical fiction (Tall, 1980a:175).

Die nimmereindigende stryd met die potensieel oneindigheid van die proses veroorsaak ‘n ernstige kognitiewe struikelblok in die weg van studente se vermoë om die begrip limiet te verstaan (Tall & Tirosh, 2001:131).

In hierdie studie brei respondent L haar antwoord uit deur te sê: “Dit sal aanhou tot jy by ‘n oneindige breukdeel kom of by nul of by ‘n baie klein getal.” Sy het gedink aan die infinitesimale (oneindig kleine). Al die leerders in hierdie studie het gedink die proses sal nie eindig nie. Drie van die leerders was in graad 10 (15 of 16 jaar oud). Die ander leerders was in graad 12 en het dus reeds kennis gemaak met die begrip limiet. Die leerders se begrip wentel nogtans om die oneindige aard van die *proses* en nié op die eindige numeriese limiet nie.

Respondent G is gevra wat die antwoord van $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$ sal wees. Hy het geantwoord dat dit ∞ sal wees. Hy het verder gesê dat die reeks
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots.$ sal divergeer en dat

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Respondent G is moontlik beïnvloed deur die onderwerp van die vraelys toe hy albei antwoorde verkeerdelik aangegee het as ∞. Dit is belangrik om hier by te voeg dat hy ‘n uitstekende student is wat deurentyd met onderskeiding slaag. Sy swak vaardighede betreffende die begrip limiet is egter duidelik en dit strek nog verder.

Hy is gevra om $f(x) = x^2$ te beskou en om te sê of die limiet van f(x) bestaan as x na oneindigheid strewe. Hy het nie gesê of die limiet bestaan of nie, waarskynlik omdat daar te veel verwarring in sy gedagtes was en die feit dat hy die begrip limiet glad nie verstaan nie. Hy het ook nie ‘n skets geteken nie. Dit wil voorkom asof onderwysers te min klem lê op visualisering in die klaskamer. Hy het, onder andere, die volgende neergeskryf:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = x^2 \quad \text{en}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Volgens respondent G is L ‘n horisontale asimptoot op die grafiek. Hy dwaal nog verder af deur te sê die waardes van f(x) kan arbitrêr naby (maar nie gelyk) aan L gebring word deur x groter en groter te maak. Tog het hy in die daaropvolgende vraag beter gevaar. Hy is gevra om ‘n skets te maak van die volgende en dit in woorde te beskryf:

$$\lim_{x \to \infty} {}^{1}/_{x} = 0$$

Sy beskrywing was: dit beteken hoe groter die x-waarde word, hoe nader kom die funksie aan 0.

Jan Bezuidenhout (2001:487) het navorsing gedoen onder eerstejaar-studente van drie Suid-Afrikaanse universiteite omtrent die miskonsepsies wat onderliggend is aan hul begrip van differensiasie en integrasie. Eerstejaar-studente kan dikwels limiete bepaal, differensieer en integreer terwyl hulle nie die verwantskappe tussen onderliggende konsepte van differensiaal- en integraalrekening begryp nie (Bezuidenhout, 2001:487). Die begrip limiet is een van die begrippe wat vir studente probleme skep. Die rede waarom studente nie die rol van limiet as ‘n fundamentele begrip in differensiaal-en integraalrekening beskou nie, is waarskynlik grootliks te wyte aan onvanpaste en swak kognitiewe skakels tussen kennis van ‘limiet’ en kennis van ander begrippe soos ‘kontinuïteit’, ‘afgeleide’ en ‘integraal’ (Bezuidenhout, 2001:487). Goed-gekonstrueerde verstandelike voorstellings van die netwerk van verwantskappe tussen begrippe is noodsaaklik om die fundamentele rol van die begrip limiet deeglik te verstaan.

Die oefeninge omtrent differensiasie in skoolhandboeke konsentreer dikwels op prosedures, soos die berekening van limiete. Prosedures wat gebruik word vir die berekening van limiete kan moontlik sekere studente só beïnvloed dat hulle dink dat die waarde van ‘n funksie by ‘n punt van primêre belang is (Bezuidenhout, 2001:496). Studente wat laasgenoemde gedagtegang het, besef moontlik nie dat die bestaan van ‘n limiet nie afhanklik is daarvan of ‘n funksie by die punt gedefinieer is nie. Die ontwikkeling van studente se konseptuele begrip van limiete, kontinuïteit en differensiasie behoort gepaard te gaan met die ontwikkeling van manipulasievaardighede. Klass-Tsirulnikov en Katz (2006:1) verwys na die swak wetenskap- en wiskunde-agtergrond van eerstejaar-studente in ingenieurswese en glo dat hierdie onontbeerlike vakgebiede (wat op nie-intuïtiewe modelle gefundeer is) soms op ontoereikende wyse onderrig word op sekondêre vlak. ‘n Diepliggende persepsie van die eindige versus die oneindige, diskreet versus kontinu, en die oneindigheid van ‘n reeks versus die oneindigheid van die kontinuum is noodsaaklik om limiete (ensovoorts) te bestudeer (Klass-Tsirulnikov & Katz, 2006:2).

4.5 Ekwivalensie van versamelings

4.5.1 Oneindigheid van meting versus kardinaliteit

In vraag 11, 12 en 13 van die vraelys is die begrip aktuele oneindigheid aangespreek. In vraag 11 is leerders gevra of hulle die aantal punte op ‘n lynstuk (3 cm) kan tel. Respondente *A, C, M, R* en *T* sê ‘n mens kan nie die punte tel nie, want daar is te veel. Respondente *B* en *W* sê jy kan die punte tel. Respondent *L* sê daar is slegs twee punte, naamlik A en B! Respondent *T* gee die interessante antwoord: Die punte is denkbeeldig en oneindig klein as hulle bestaan.

Uit voorafgaande is dit duidelik waarom David Tall (1980b:273) die volgende sê:

> Children have many different intuitions as to the nature of a point.

In vraag 12 is respondente twee lynstukke gegee, naamlik AB en CD waar CD twee keer so lank is as AB. Hulle is gevra of daar op AB en CD dieselfde aantal punte is. Respondente *A, C, L, M, T* en *W* sê daar is nie dieselfde aantal punte op AB en CD nie – daar is twee maal soveel punte op CD. Respondente *B, R* sê daar is dieselfde aantal punte. Dit is heeltemal geregverdig om te sê dat CD twee maal soveel punte het as AB (Tall, 1980b:272).

Die uitbreiding van tel op oneindige wyse lei na die teorie van oneindige kardinale terwyl die uitbreiding van meting op oneindige wyse lei na 'n ander vorm van oneindigheid wat Tall *measuring infinity* genoem het (Tall & Tirosch, 2001a:131). David Tall (1980b:271) glo dat getalle gebruik word vir drie basiese funksies in die alledaagse lewe, naamlik om te (1) tel, (2) orden, en (3) meet. Cantor het die eerste twee funksies uitgebrei deur oneindige kardinale en ordinale in te voer. Daar is aspekte waarvoor hierdie uitbreiding van die getal-konsep nie toepaslik is nie – in die besonder waar meting betrokke is en 'n oneindige interpretasie ten opsigte van hierdie getalle vir meting meer toepaslik sal wees (Tall, 1980b:271). Tall gebruik voorts ook die voorbeeld van CD wat twee keer so lank is as AB. Die kardinaalgetal-oplossing is dat daar 'n ooreenkoms bestaan tussen die twee versamelings. Byvoorbeeld, punt P op AB (x eenhede vanaf A) kom ooreen met Q op CD (2x eenhede vanaf C). Die twee versamelings het dan dieselfde kardinaalgetal. 'n Regverdige alternatief is om te sê dat CD twee keer soveel punte bevat as AB. Die kardinale interpretasie van laasgenoemde sal wees dat AB van kardinaliteit $\aleph$ (Aleph) is en CD van kardinaliteit $2\aleph$. Dít is teenstrydig met 'n geregverdigde intuïsie dat twee keer 'n positiewe hoeveelheid streng gesproke groter as daardie hoeveelheid behoort te wees. Normaalweg sal die onderwyser die leerder probeer heroriënteer deur hom daarop te wys dat hierdie verskynsel normaal is ten opsigte van oneindige kardinale en dat dit die een-tot-een-afparing is van 'n versameling en deelversameling. Laasgenoemde benadering is dikwels onbevredigend vir die kognitiewe en sielkundige vereistes van die leerder (Tall, 1980b:272).

Tall (1980b:273) glo dat daar ‘n rede is waarom ‘n mens veronderstel dat CD twee keer die aantal punte as AB bevat, naamlik dat meting – en nié die tel van punte nié – betrokke is. Kinders het heelwat verskillende intuïsies omtrent die aard van ‘n punt (Tall, 1980b:273). ‘n Fisiese punt het grootte wanneer dit met ‘n penstrepie op ‘n lyn gemerk word. Om laasgenoemde rede sê sommige kinders dat: hoe langer die interval, hoe meer punte kan daarop ingepas word. Andere (soos Respondent L) sê dat daar slegs twee punte op lynstuk AB is. Dit is moontlik dat ‘n kind kan glo dat ‘n lynstuk uit ‘n eindige aantal onverdeelbare punte bestaan, maar Tall (1980b:273) noem die voorbeeld van ‘n agtjarige seun wat die volgende gevra is: Indien ‘n mens ‘n lynstuk halveer, daarna een van die helftes weer halveer, ensovoorts. Uiteindelik sal ‘n mens moet stop omdat die stukkies te klein word om te halveer. Die seun het geantwoord dat ‘n mens steeds kan voortgaan aangesien jy ‘n mikroskoop kan gebruik. Tall gee twee moontlike verduidelikings vir die seun se antwoord (1980b:273), naamlik (1) dat hy in ‘n soort oorgangstadium (Piaget) tussen die eindige en oneindige verdeelbaarheid van ‘n lyn is, en (2) dat hy gekonfronteer is met die teenstrydigheid tussen die eindige verdeelbaarheid in ‘n praktiese tekening en die oneindige verdeelbaarheid in teoretiese verbeelding. Feit bly staan dat die kind getal nie in ‘n kardinale sin beleef nie, maar ‘n ruwe soort manier van meting. Vir die kind is die aantal punte op ‘n lyn in verhouding gelyk aan die lengte van die lyn. Hy begryp nie die verskil tussen die rasionale kontinuum en die reële kontinuum wat verskillende kardinaalgetalle het nie, en ook nie dat reële intervalle van verskillende lengte dieselfde kardinaalgetal het nie (Tall, 1980b:274). Dit is onvanpas om die ‘korrektheid’ van intuïtiewe denkprosesse van die leerder slegs in terme van ‘n formele kardinaal-paradigma te interpreteer – veral by intuïtiewe gedagtes wat verband hou met meting eerder as ‘n een-tot-een-ooreenkoms (Tall, 1980b:271). ‘n Mens se interpretasie van oneindigheid is verwant aan die skema (byvoorbeeld meting, kardinaalgetal) wat ter sprake is eerder as ‘n absolute vorm van waarheid (Tall, 1980b:282). Jong kinders het nog nie toegang tot formele, teoretiese wiskunde nie. Hulle moet hierdie hoër kognitiewe skema’s geleidelik ontwikkel. Onderwysers behoort begrip te hê vir kinders se intuïtiewe gedagtes wat gebore is uit hul leefwêreld en die wiskunde-vlak waarop hulle verkeer.

Fischbein (Tall & Tirosh, 2001:131) het paradoksale konflik in die intuïsie van kardinale oneindigheid bespeur. Sy argument is:

- ons intellektuele skemas is werklik gebou op ons praktiese, werklike lewenservarings en daarom sal stellings soos "die geheel kan ekwivalent wees aan dele daarvan" ons normale verstandelike skemas weerspreek
- ons intuïtiewe interpretasie van oneindigheid is dié van suiwer potensialiteit en hierdie interpretasie lei op 'n natuurlike wyse tot die gevolgtrekking dat alle oneindige versamelings dieselfde (oneindige) aantal elemente bevat.

Uit die voorafgaande antwoorde van die leerders is dit duidelik dat die aktueel oneindige lei tot teenstrydighede en paradokse. Vir die menslike verstand is dit moeilik, selfs onmoontlik, om die aktueel oneindige (byvoorbeeld: die aantal punte op 'n lyn-segment, die werklike bestaan van die oneindigheid van reële getalle as 'n gegewe) te begryp: (Fischbein, 2001:309). Die menslike verstand kan slegs eindigende realiteite (soos versamelings met 'n bepaalde aantal elemente) hanteer. Sodra 'n mens te doen kry met die aktueel oneindige, ontstaan daar teenstrydighede. Galileo het die voorbeeld gebruik van die vierkante van natuurlike getalle: elke natuurlike getal het 'n vierkant, en omgekeerd. Laasgenoemde impliseer dat die versameling heelgetalle en die versameling vierkante ekwivalent is. Die versameling vierkante is 'n deelversameling van die versameling natuurlike getalle. Dít beteken dan dat 'n versameling en die deelversameling ekwivalent is, met ander woorde: die deel en die geheel is ekwivalent. Laasgenoemde afleiding pas nie in by die mens se natuurlike logika nie (Fischbein, 2001:310). Die oorsprong van die teenstrydigheid lê blykbaar in die gebruik van die begrip aktuele oneindigheid. Die natuurlike afleiding hiervan is om (soos Galileo) die aktueel oneindige uit wiskunde te verban sodat die konsekwentheid van die mens se logiese redenasie behou kan word.

Cantor het die probleem van die aktueel oneindige tydens die 19de eeu opgelos (Fischbein, 2001:310). Hy het op sistematiese wyse die begrip een-tot-een-afparing gebruik om te bepaal of versamelings ekwivalent is. Wanneer ‘n mens twee oneindige versamelings vergelyk, moet die elemente van die versamelings nie getel word soos wat ons ‘n eindigende aantal voorwerpe tel nie. Die ekwivalensie of nie-ekwivalensie van twee versamelings behoort op formele wyse bepaal te word. Byvoorbeeld, die versameling natuurlike getalle en die versameling onewe getalle is ekwivalent:

1; 2; 3; 4; 5; 6; ....
1; 3; 5; 7; 9; 11; ....

Indien die kriterium vir ekwivalensie een-tot-een-afparing is, is die afleiding dat die versameling natuurlike getalle en die versameling onewe getalle ekwivalent is. Met ander woorde, die twee versamelings het dieselfde kardinaliteit en grootte. Op dieselfde wyse kan daar gesê word dat AB (3 cm) en CD (6 cm) dieselfde aantal punte bevat, al is CD twee keer so lank as AB. Die ekwivalensie van die versameling onewe getalle en die versameling natuurlike getalle (of die aantal punte wat AB en CD bevat) is vir die eindigende menslike verstand visueel en intuïtief onaanvaarbaar (Fischbein, 2001:311)! Dit is bloot teenstrydig met die mens se inherente logika.

4.5.2 Toetrede van onbewustelike modelle by aktuele oneindigheid

In sy artikel *Tacit models and infinity* analiseer Fischbein (2002:328) die effek van onbewustelike modelle in die redeneringsproses omtrent oneindigheid. Daar is ‘n rede vir die ongemaklikheid van die mens met die aktueel oneindige. Fischbein (2001:311) noem dit onbewustelike modelle (*tacit models)*. ‘n Mens dink in terme van modelle wat optree as plaasvervangers vir oorspronklike begrippe. Normaalweg is hierdie begrippe te abstrak, te kompleks, te groot of te klein vir ons verstandelike vermoë om te begryp. In paragraaf 4.2 het die navorser in die onderhoud met respondent M die ongemaklikheid van die leerder waargeneem: sy het gesê: *My brain is too small. It does not make sense.*

'n Verstandelike model[1] verwys na:

> ....mental representations which replace, in the reasoning process, the original entities, usually in order to stimulate and to ease the solving endeavor (Fischbein, 2001:312).

In wiskunde word daar dikwels op 'n bewustelike wyse modelle (byvoorbeeld grafieke) gebruik. Probleme ontstaan wanneer modelle onbewustelik toetree tot die redeneringsproses. Hierdie onbewustelike modelle vervang soms sekere komponente van die oorspronklike redeneringsproses (Fischbein, 2001:313). Alhoewel hierdie modelle aanvanklik bewustelik teenwoordig was, vergeet 'n mens soms die bewustelike oorsprong daarvan. Hierdie modelle het, met ander woorde, nog voortdurend 'n invloed op die redeneringsproses sonder dat die individu bewus is van die oorsprong en effek daarvan. Byvoorbeeld: beskou die Euklidiese aksioma 'Twee punte bepaal 'n reguit lyn'. Die meetkundige terme 'punt' en 'reguit lyn' is abstraksies. 'n Punt het geen dimensie nie terwyl 'n lyn een dimensie het. 'Punt' en 'lyn' bestaan nie werklik nie. Dit kan slegs verstandelik voorgestel word.

Respondent *L* het in die vraelys gesê dat die lynsegment AB slegs twee punte het, naamlik A en B. Laasgenoemde is respondent L se persepsie van punte. Sy glo die letters dui punte aan. Punte en lyne bestaan nie werklik nie en kan ook nie as sulks verstandelik voorgestel word nie. Ons gebruik visuele modelle: 'n kolletjie om 'n punt voor te stel en 'n dun streep om 'n lyn voor te stel. Sonder hierdie visuele modelle sal dit moeilik wees om (byvoorbeeld) stellings te formuleer. Die visuele modelle speel 'n noodsaaklike rol in meetkunde, ten spyte van die feit dat die oorspronklike modelle in meetkunde 'abstraksies' is (Fischbein, 2001:314). Fischbein beklemtoon dat adolessente en volwassenes in terme van visuele modelle bly dink, al is hulle ook bewus van die abstrakte

[1] In hierdie verhandeling word *mental model* deurgaans in Afrikaans vertaal met 'verstandelike model'.

aard van meetkundige voorwerpe. Op hierdie manier word daar afleidings gemaak wat geregverdig is in terme van die visuele modelle, maar wat moontlik verkeerd is met betrekking tot die meetkundige voorwerpe. Hierdie teenstrydighede tussen intervensie van intuïtiewe modelle en die formele abstrakte afleidings lei op die terrein van oneindighed tot klaarblyklike paradokse (Fischbein, 2001:314).

Daar is nog ‘n faktor wat die redeneringsproses ten opsigte van oneindigheid kompliseer (Fischbein, 2002:314). Aanvanklik verduidelik onderwysers nie die leerders op primêre vlak dat meetkundige voorwerpe slegs abstraksies is nie. Laasgenoemde is te verstane aangesien sulke jong kinders nog nie gereed is om abstrak te dink nie. Hulle is onbewus daarvan dat punte en lyne slegs visueel voorgestel word aangesien dit abstraksies is wat moeilik voorgestel kan word op ‘n verstandelike wyse. Sielkundig gesproke kan ons nie ontslae raak van die visuele modelle nie. Indien ‘n mens die punte op AB en CD beskou in terme van klein kolletjies van dieselfde grootte, sal die twee versamelings punte nie ekwivalent wees nie. ‘n Mens behoort heeltemal afstand te doen van die visuele model (met klein kolletjies) en die abstrakte prosedures van Cantor te volg. In die praktyk gebeur dit dat, wanneer ‘n mens laasgenoemde formele pad van Cantor volg, die intuïtiewe visuele modelle bly inmeng in die denkproses. Die gevolg is dat ‘n mens ‘n gevoel van teenstrydigheid, verwarring en ingewikkeldheid ervaar waarvan ‘n mens moeilik onslae raak.

Wanneer ‘n mens dan weer dink oor die leerders wat in die vraelyste gesê het dat CD twee keer soveel punte bevat as AB, is dit duidelik dat hulle die twee versamelings punte in terme van kolletjies (met dieselfde grootte) vergelyk en dat die twee lynstukke nie ekwivalent kan wees nie. Heel waarskynlik het hierdie leerders nog nie in ‘n klaskamer gehoor dat meetkundige voorwerpe (ensovoorts) abstraksies is nie – dat punte en lyne visuele voorstellings is van abstraksies wat nie as sodanig in die verstand voorgestel kan word nie. Dis te verstane dat die meeste leerders op primêre en sekondêre vlak nog nie so ‘n hoë denkvlak bereik het dat hulle doelbewus intuïtiewe modelle opsy kan skuif nie. ‘n Mens behoort as wiskundige uiteindelik op abstrakte vlak (soortgelyk aan Cantor) te kan dink omtrent oneindigheid om te begryp dat AB en CD ekwivalent is, maar jong kinders moet nog die hoër kognitiewe denke van teoretiese wiskunde ontwikkel – na aanleiding van David Tall se werk in paragraaf 4.3 van hierdie Hoofstuk.

4.6 Groot eindigende getalle en ∞

In paragraaf 1.1 is die vraag gevra of oneindigheid ewivalent is aan groot getalle. Hierdie vraag word nou van naderby beskou.

Respondent *L* sê dat 10^{100} te groot is om neer te skryf te en *dus is dit oneindig groot.* Dit strook met haar intuïtiewe definisie van oneindigheid dat dit ‘n getal is wat groot is. Daar is wel konflik in haar gedagtes te bespeur aangesien sy sê dat ‘n getal só groot kan word dat daar nie meer ‘n naam vir die getal is nie. Tóg word 10^{100} die naam googol gegee, maar sy glo dis oneindig groot. Respondent *M* glo dat 10^{100} groter as ‘n biljoen is en dat dit daarom oneindig is! Respondent *N* glo dat 10^{100} baie groot is, maar seker nie oneindig groot nie. Sy is dus onseker of dit oneindig groot is. Respondent *T* het 10^{100} met sy sakrekenaar probeer bereken. Aangesien die sakrekenaar (weens die beperkte aantal syfers daarop) nie ‘n antwoord kon verskaf nie, glo hy dat 10^{100} ‘n groot getal is.

Robutti (2007:3) het in gesprek getree met vyfjarige kinders en hulle gevra wat *to infinity* beteken. Sy het daaruit afgelei dat die kinders oneindigheid beskou as die ‘laaste getal’. In die huidige studie het die agtienjarige respondente M en C ook gesê dis die laaste getal. David Tall (2001a:4) het sy sewejarige seun gevra wat oneindigheid is. Hy het geantwoord: *A very, very high number.* Die sestienjarige respondent N het in die huidige studie gesê: ‘Ja, dit is ‘n reële getal, maar ‘n vrek groot een’. Een derde van die leerders in hierdie studie het gesê ∞ is ‘n reële getal. Die feit dat mense aan oneindigheid dink as ‘n getal, is nie toevallig nie (Lakoff & Núñez, 2000:165). ∞ word gewoonlik gebruik met ‘n presiese betekenis, naamlik as ‘n getal wanneer ‘n mens opeenvolgende getalle opnoem en nié as ‘n getal in berekenings nie. In die versameling 1; 2; 3; ...... is ∞ die eindpunt in die opnoeming van natuurlike getalle. Normaalweg word ∞ nie gebruik in berekenings nie, byvoorbeeld: 23 vermenigvuldig met ∞**.** Wiskundiges praat ook van ‘strewe na oneindigheid’ wat verder lei tot verwarring.

In hierdie studie was daar ook studente wat ∞ nie as ‘n getal beskou het nie. Respondent L het gesê: ‘Ek dink nie dat ∞ onder reël of nie-reël geklassifiseer kan word nie. Dit is iets op sy eie.’ Respondent R glo dat dit nie ‘n getal is nie omdat dit nie bereken kan word nie. Respondent W sê dat ∞ nie werklik is nie – oneindigheid is denkbeeldig.

Heelwat van die besware in die geskiedenis teen die vermoë van die mens om te dink oor die stappe van ‘n oneindige proses wat almal terselfdertyd teenwoordig is (aktuele oneindigheid) berus op die feit dat geen mens werklik ‘n oneindige aantal stappe kan tel nie (Dubinsky et al, 2005a:353). Oneindige versamelings is nie die enigste voorwerpe wat die mens nie kan tel nie. ‘n Mens kan byvoorbeeld ook nie al die sandkorrels in ‘n woestyn tel nie. Volgens die beskouing van die empiriste kan ‘n proses slegs in totaliteit bestaan indien ‘n mens fisies of kognitief daaroor kan reflekteer of elke stap kan voltooi. Vanuit laasgenoemde beskouing sou ‘n mens die bestaan van groot eindigende getalle moet ontken.

Dit is baie moeilik vir ‘n mens om die bestaan van groot eindigende getalle te ontken, tensy ‘n mens die uiterste vorm van empirisme as uitgangspunt neem. ‘n Mens kan moontlik die bestaan van sulke getalle verantwoord deur te sê ‘n individu kan dit in sy verbeelding voorstel dat hy al die sandkorrels in die woestyn tel. Nietemin, indien ‘n mens aanvaar dat ‘n proses bestaan omdat jy dit in jou gedagtes kan voorstel, dan moet ‘n mens ook die bestaan van natuurlike getalle erken aangesien ‘n individu dit as ‘n voltooide totaliteit in sy gedagtes kan voorstel (Dubinsky, 2005a:353). Dit wil voorkom asof die nie-bestaan van ‘n oneindige versameling nie kan berus op die fisiese onmoontlikheid om al die elemente te tel nie en ook nie op die onvermoë om dit in die gedagtes voor te stel nie. Indien wel, sou ‘n mens die bestaan van groot getalle moet ontken. Om hierdie rede moet ‘n ander kriterium gevind word om kognitief tussen die eindige en oneindige te onderskei.

Wanneer ‘n mens ‘n groot aantal eindigende objekte tel, is daar ‘n laaste objek wat die voltooiing van die proses aandui. Dit is nie die geval met die versameling natuurlike getalle nie. Indien ‘n mens ‘n oneindige proses volgens APOS-analise as voltooid wil begryp - en dit is ‘n noodsaaklike voorloper tot inkapseling en die toepassing van aksies - sal die individu moet besef dat om die hele versameling te tel, beskryf kan word as die herhaalde toepassing van ‘n enkele aksie. Die individu besef waarskynlik dat so ‘n proses nie ‘n finale objek voortbring nie (Dubinsky, 2005a:354). Om in ‘n APOS-analise ‘n denkbeeld te vorm van ‘n proses as voltooid en as ‘n totaliteit, is inkapseling van die proses tot ‘n kognitiewe objek ‘n vereiste. Die verstandelike meganismes internalisering en inkapseling is in paragraaf 2.3.3 van hierdie verhandeling uiteengesit. In die geval van ‘n oneindige proses transendeer die objek (wat volg van die inkapseling) die proses in die sin dat dit nie geassosieer word met of voortgebring word deur enige stap in die proses nie. Só ‘n objek word die *transendente objek* genoem.

4.7 Fraktale

In hierdie studie is die boomfraktaal gebruik om te ondersoek of leerders fraktale ervaar as ‘n voorbeeld van potensiële oneindigheid. Die inleier en generator van die fraktaal is gegee. Leerders is gevra om die 3de en 4de stap te voltooi. Dit was nie vir hulle ‘n probleem nie. Hulle is ook gevra of dit moontlik is om op oneindige wyse voort te gaan met die proses. Hulle glo dat dit moontlik is, maar dat dit op die ou end te klein sal raak om te teken.

Michael Serra (2003:94) gee in Hoofstuk 2.1 van sy boek *Discovering Geometry* aktiwiteite vir studente om herhalende patrone te ondersoek en dit te gebruik om meer getalle in ‘n reeks voort te bring. Aan die einde van die Hoofstuk gee Serra (2003:135-137) geleentheid vir die studente om fraktale met herhalende patrone met behulp van die rekenaarprogram *The Geometer’s Sketchpad,* te verken. Dit is ‘n uitstekende manier vir leerders om op ‘n dinamiese wyse fraktale soos die Sierpi□ski-driehoek en die Koch-sneeuvlokkie te skep. Die onderrig van die begrip oneindigheid via fraktale is ‘n estetiese, aantreklike en toepaslike manier vir jongmense. Leerders kan ook fraktale in die natuur verken.

Klass-Tsirulnikov en Katz (2006:1) het vir die ASEE (*American Society for Engineering Education*) ‘n referaat gelewer. Hulle het beklemtoon dat ‘n stewige agtergrond in wiskunde en fisika belangrik is vir die sukses van ‘n student in ingenieurswese. Die begrip oneindigheid is een van dié belangrikste aspekte, maar ook een van die moeilikste vir voorgraadse studente in ingenieurswese. Dit kan in graad K-12 onderrig word met oefeninge wat die intuïtiewe benadering volg (Klass-Tsirulnikov, 2006:1). Een van die sinvolste maniere om jong studente bloot te stel aan die begrip oneindigheid is deur die verkenning van fraktale (Klass-Tsirulnikov, 2006:11). Die volgende boek is ‘n goeie bron vir die onderrig van fraktale aan kinders: *Computer-generated Fractal Art* van Darin Beigie (2005: 262-269).

4.8 Perspektieftekening en verdwyningspunte

In vraag 16 van die vraelys (hierdie studie) het die navorser ondersoek of perspektief-tekening en verdwyningspunte gebruik kan word in die onderrig van oneindigheid. Die respondente was ongemaklik met hierdie vraag aangesien dit vir hulle ‘n onbekende terrein was. Dit kan beslis gebruik word om die begrip konvergensie te verduidelik. Serra (2003:172) gebruik perspektieftekening ook as ‘n verkenningsprojek vir leerders in sy boek *Discovering Geometry.* Sommige werke van Escher kan ook gebruik word om verdwyningspunte en konvergensie te illustreer, maar aangesien Escher gewoonlik verdwyningspunte met verskeie funksies gebruik, is dit nogal moeilik vir die jonger leerders. Escher se werk kan wel in graad 12 en op tersiêre vlak gebruik word. Perspektieftekening en verdwyningspunte is ‘n interessante manier om die begrip oneindigheid te verken.

4.9 Die werk van MC Escher

In vraag 18 van die vraelys is twee kontrasterende werke van Escher verskaf. Dit was ‘n sinvolle vraag aangesien die respondente raakgesien het dat die een skets na binne kleiner word en die ander kleiner na buite. Respondent L het gesê dat dit ‘n voorbeeld van tesselasie is. Die meeste van die respondente was nie bewus van die werk van Escher nie. Dit was opvallend hoe fassinerend dit vir hulle is en dat hulle dit geniet het om daarmee te werk. Die feit dat Escher hiperboliese meetkunde in sommige werke gebruik het, is nie in hierdie studie met leerders ontgin nie. Laasgenoemde kan in gevorderde werk met oneindigheid gebruik word om aan te toon hoe Escher hiperboliese meetkunde gebruik het om oneindigheid in sy werk te bewerkstellig.

4.10 Opsomming

Uit die voorafgaande is dit duidelik hoe kompleks die intuïtiewe denke van leerders omtrent oneindigheid is. Aangesien die menslike brein van nature slegs die eindige begryp, is intuïtiewe denke omtrent oneindigheid teenstrydig. Laasgenoemde blyk uit die teenstrydighede in respondente se beskrywing en voorbeelde van oneindigheid. Dit blyk verder uit hul ongemaklikheid met nie-repeterende, oneindige desimale, die aantal punte op ‘n lynstuk en die begrip limiet. Die navorsing van Tall, Mückenheim, Fischbein, Lakoff en Núñez het lig gewerp op die ingewikkelde kognitiewe aspekte wat aanleiding gee tot die konflik in studente se intuïtiewe denke omtrent oneindigheid. Hierdie insig kan lei tot meer sinvolle onderrig en leer van oneindigheid. Aanbevelings volg in hoofstuk 5.

HOOFSTUK 5

AANBEVELINGS EN SAMEVATTING

In hierdie hoofstuk word aandag gegee aan die praktyk. Seker probleme betreffende die onderrig van die begrip oneindigheid in die klaskamer word opgenoem. Enkele aanbevelings word gemaak en ‘n paar moontlikhede van onderrigmateriaal word beskryf. Daarna volg ‘n kort samevatting van hierdie studie.

5.1 AANBEVELINGS

Onderwysers (volwassenes) se siening van oneindigheid verskil van dié van leerders vanweë ervaring, godsdiens en teoretiese wiskunde-agtergrond. Onderwysers behoort bewus te wees van die verrassende, gesofistikeerde en komplekse gedagtes van jongmense omtrent oneindigheid. Hierdie gedagtes van jongmense behoort gerespekteer en in ag geneem te word (Tall, 2001a:16). Die intuïsie van leerders behoort gerespekteer te word, selfs al pas dit nie in by ‘n aanvaarde, formele teorie nie. Onderwysers verwring die intuïtiewe denke van jongmense deur te kyk deur die bril van ‘n kardinale paradigma (Tall, 1980a:178) wanneer leerders byvoorbeeld die aantal punte op AB (3 cm) en CD (6 cm) vergelyk. Tall (1980a:178) wys daarop dat:

> Historically it is interesting to note that Leibniz had an intuition of various orders of infinity, suggested by the kinds of functions for which he computed derivatives.

Leibniz het aktuele oneindigheid ten opsigte van kardinale verwerp om die konflik daaromtrent (soos vroeër deur Galileo uiteengesit) te vermy. Só verander tye: tans word die kardinaal-oneindigheid van Cantor aanvaar, maar die meting-oneindigheid van Leibniz word verwerp (Tall, 1980a:178).

Wanneer ‘n onderwyser leermateriaal skep behoort die intuïsie van leerders in ag geneem te word en dít verg ‘n diepgaande kennis van die aard van hul intuïsie omtrent die bepaalde afdeling van die wiskunde-teorie (Tirosh, 1991:214). Dit is uiters belangrik dat relevante, ontoereikende intuïtiewe gedagtes by leerders geïdentifiseer word. Tirosh se studie omtrent die vergelyking van oneindige versamelings het aangetoon dat vele studente se primêre intuïtiewe gedagtes soortgelyk was aan dié van wiskundiges in die geskiedenis van ontwikkeling van die begrip:

> Such palpable parallelism between phylogeny (historical development of the species) and ontogeny (development of the individual), reveals the former as a potential source for identifying students' intuitions (Tirosh, 1991:214).

Wiskundeonderwysers behoort bewus te wees van die belangrike rol wat intuïsie inneem in die klaskamer. Weens die komplekse aard daarvan, moet dit met groot omsigtigheid hanteer word.

'n Ander belangrike aspek in die klaskamer is die feit dat sommige onderwysers self ongemaklik is met begrippe soos byvoorbeeld limiet en dat hulle hierdie ongemak en vrese onwillekeurig aan hul studente oordra (Tall & Swarzenberger, 1978:45). Indiensopleiding van onderwysers kan hierdie situaie verbeter. Onervare onderwysers behoort leiding te kry van ervare vakkundiges.

5.2 DIE ONDERRIG VAN DIE BEGRIP ONEINDIGHEID

Kontemporêre opvoedkundige navorsers stem saam dat die mens se wiskundige redenasie en konseptualisering op informele wyse begin (Klass-Tsirulnikov & Katz, 2006:9). Mense dink normaalweg nie in terme van formele aksiomas, definisies, stellings en bewyse nie. Studente leer deur, onder andere, hul verbeelding in te span, metafore te gebruik en gesprekke met lede van hul portuurgroep te voer. Leerders behoort meer blootgestel te word aan die begrip oneindigheid (Klass-Tsirulnikov & Katz, 2006:9-10) en die intuïtiewe benadering behoort gevolg te word. Die oorgang van die eindige na die oneindige behoort in die primêre skool plaas te vind. Die APOS-teorie bied sinvolle maniere om bepaalde aspekte van oneindigheid te onderrig – enkele voorbeelde is in hoofstuk 4 bespreek. Daar bestaan tans nog min onderrigmateriaal en dit bied 'n groot uitdaging vir opvoedkundige wiskundiges om sulke materiaal te skep en beskikbaar te stel.

Die beskouing van David Tall rakende natuurlike en formele oneindigheid is in 4.3.2 van hierdie verhandeling bespreek. In Hoofstuk 4 is die kompleksiteit van leerders se denke omtrent oneindigheid ontbloot. Die onderrig van oneindigheid verg die vaardighede van 'n ervare onderwyser met diepliggende wiskunde-kennis en insig in verskillende onderrigmetodes. Die onderwyser behoort onderrigmateriaal te ontwikkel wat gepas is vir die bepaalde klas.

Fischbein (2001:328) beveel aan dat onderwysers leerders bewus sal maak van die inwerking van onbewuste (gewoonlik visuele) modelle op hul redenerings-prosesse. Op hierdie manier kan leerders gehelp word om meer beheer te hê oor hul wiskundige redenasies en struikelblokke te vermy.

Strauss se ruimtelike voorstellings van die opeens oneindige wat in 2.3.2.2 verskyn, behoort in die klaskamer gebruik te word.

5.3 ONDERRIGMATERIAAL: 'n paar moontlikhede

Die boeke *Mathematical Quilts* (1999) en *More Mathematical Quilts* (2003) van Venters en Ellison bied uitstekende aktiwiteite vir leerders om oneindigheid deur middel van fraktale te verken, byvoorbeeld:

- Die Sierpinski Driehoek (2003:24)
- Die Koch-sneeuvlokkie (2003:59)
- Die Hilbert-kurwe (2003:70)
- Perspektief-tekening (2003:115)
- Logaritmiese spiraal (1999:17; 59)

Klass-Tsirulnikov en Katz (2006:11-13) bied vier aktiwiteite wat vir leerders geskik is. Daar word ook aangetoon dat die intuïtiewe benadering tot die begrip oneindigheid misleidend kan wees in 'n betreklike eenvoudige situasie. Om laasgenoemde rede is dit belangrik dat ervare onderwysers die onderrig van die begrip oneindigheid met omsigtigheid hanteer. Die eerste aktiwiteit is soortgelyk aan Zeno se paradoks:

1. ‘n VVV (Vreemde Vlieënde Voorwerp) begin beweeg. Tydens die eerste sekonde vlieg dit ‘n halwe km, tydens die tweede sekonde vlieg dit ‘n ¼ km, tydens die derde sekonde vlieg dit ⅛ km. Die VVV hou aan met vlieg deur tydens elke bykomende sekonde van die tyd die helfte van die afstand tydens die vorige sekonde te voltooi.

   Vraag: Indien daar geen struikelblokke in die VVV se pad is nie, hoe lank sal dit vlieg en hoeveel km sal dit aflê?

   Antwoord: Die VVV sal onbepaald aanhou vlieg. Dit sal ‘n aantal km ver vlieg wat gelyk is aan ‘n som van ‘n oneindige aantal terme: ½+¼+⅛+..... Hierdie oneindige som is eindig en gelyk aan 1.

   Aktiwiteit: Sny ‘n stuk tou in twee gelyke dele en hou die een helfte eenkant. Sny nou die oorblywende helfte in twee (twee kwarte) en plaas dit by die helfte wat eenkant lê – dit verteenwoordig die som ½+¼. Sny die oorblywende kwart in twee (twee agstes) en plaas ‘n agste by die ander stukkies – dit verteenwoordig die som ½+¼+ ⅛. Die leerder sien hoe daar al hoe minder van die tou oorbly en dit lei tot die gevolgtrekking dat die som van ‘n oneindige aantal getalle eindig is, en gelyk aan 1.

2. Watter een van die volgende twee getalle is die grootste: 1 of ‘n repeterende desimaal 0,99999.......?

   Antwoord: Die repeterende desimaal 0,99999..... is ‘n som van ‘n oneindige aantal terme: $^9/_{10} + ^9/_{100} + ^9/_{1000} + ^9/_{10000}$ + ..., en dit is gelyk aan 1.

   Aktiwiteit: Neem $^9/_{10}$ van ‘n stuk tou. Daar bly dus $^1/_{10}$ van die tou oor. Neem nou $^9/_{10}$ van die oorblywende tou. Die som is dan: $^9/_{10} + ^9/_{100}$, ens.

   Opmerking: Sommige leerders beskou die repeterende desimaal as ‘n reeks eerder as ‘n limiet. Hierdie leerders sal argumenteer dat 0,9999....

kleiner as 1 is. Die argumente van studente moet in ag geneem word en deeglik ontleed word (Klass-Tsirulnikov & Katz, 2006:12).

5.4 SAMEVATTING

Hierdie studie het getoon dat die komplekse problematiek rondom die begrip oneindigheid ‘n groot uitdaging bied vir wiskundeonderwysers. Dit is noodsaaklik dat wiskundeonderwysers sover moontlik in die skoene van hul studente gaan staan om diepliggende kennis van hul intuïtiewe gedagtes te kry. ‘n Moeilike taak rus op die skouers van wiskundeonderwysers, maar daar wag ‘n blink toekoms vir onderwysers wat bereid is om kreatief te wees. Daar moet kennis geneem word van nuwe onderrigmetodes. Die rykdom van die wonderlike wêreld van Escher se werk, fraktale en irrasionale getalle moet verken word sodat die leerders in ons klaskamers op ‘n dinamiese en interessante wyse kan leer om die begrip oneindigheid beter te verstaan!

BIBLIOGRAFIE

Beigie, Darin 2005 Computer-generated Fractal Art. *Mathematics Teaching in the Middle School.* 10:262-269.

Bell, JL 2005 Continuity and Infinitesimals. http://plato.stanford.edu/entries/continuity. (1/29/2007).

Bezuidenhout, J 2001 Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* 32(4):487-500.

Berryman, S 2005 Ancient Atomism. *Stanford Encyclopedia of Philosophy***.** http://plato.stanford.edu/entries/atomism-ancient/ (1/27/2007).

Bochner, S 2003 Infinity. *Dictionary of the History of Ideas***.** The Electronic Text Center at the University of Virginia Library. http://etext.virginia.edu/cgi-local/DHI/dhi.cgi?id=dv2-67 (3/17/2007).

Boyer, CB 1959. *The History of the Calculus and its Conceptual Development***.** New York: Dover Publications.

Burton, DM 2007. *The History of Mathematics – An Introduction.* Sixth Edition. New York: McGraw Hill.

Campbell, JID (ed) 2005 *Handbook of Mathematical Cognition***.** New York: Psychology Press.

Cangelosi, JS 1996 *Teaching Mathematics in Secondary and Middle School – An Interactive Approach.* Second Edition. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Clarke, AC 2004 *Colours of Infinity – The Beauty and Power of Fractals***.** Singapore: Clear Books.

Cole, A 1992 *Perspective.* Eyewitness Art. London: National Gallery Publications (Dorling Kindersley).

Dauben, JW 2007 Brunelleschi and the Origin of Linear Perspective*.* Adapted from *The Art of Renaissance Science.* http://www.kap.pdx.edu/trow/winter01/perspective/ (1/19/2008).

De Vos, AS 2002 Qualitative data analysis and interpretation. In: De Vos, AS (red) 2002 *Research at grass roots – for the social sciences and human service professions.* Second Edition. Pretoria: Van Schaik Publishers.

Dubinsky, ED; Weller, K; McDonald, MA & Brown, A 2005a Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics.* 58:253-266.

Dubinsky, ED; Weller, K; McDonald, MA & Brown, A 2005b Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics.* 60:335-359.

Ernst, B 1985 *The Magic Mirror of M.C. Escher***.** Norfolk: Tarquin Publications.

Escher, MC 1986 *Escher on Escher – Exploring the Infinite***.** New York: HNA.

Fischbein, E 2002 Tacit Models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics***.** 48:309-329.

Fouché, CB 2002 Research Strategies. In: De Vos, AS (red) 2002 *Research at grass roots – for the social sciences and human service professions.* Second Edition. Pretoria: Van Schaik Publishers.

Fouché, CB & Delport, CSL 2002a The place of theory and the literature review in the qualitative approach to research. In: De Vos, AS (red) 2002 *Research at grass roots – for the social sciences and human service professions.* Second Edition. Pretoria: Van Schaik Publishers.

Fouché, CB & Delport, CSL 2002b Introduction to the research process. In: De Vos, AS (red) 2002 Research at grass roots – for the social sciences and human service professions. Second Edition. Pretoria: Van Schaik Publishers.

Greeff, M 2002 Information collection: interviewing. In: De Vos, AS (red) 2002 *Research at grass roots – for the social sciences and human service professions. Second Edition.* Pretoria: Van Schaik Publishers.

Greene, B 2003 The Elegant Universe. Superstings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory. New York: W.W. Norton & Company.

Hawking, S 2005. *God Created the Integers – the Mathematical breakthroughs that changed history.* London: Penguin Books.

Jahnke, HN 2001 Cantor's cardinal and ordinal infinities: an epistemological and didactic view. *Educational Studies in Mathematics***.** 48:175-197.

Klass-Tsirulnikov, B & Katz, S 2006 *The concept of infinity from K-12 to undergraduate courses.* American Society for Engineering Education: 1-15

Kolmogorov, AN 2001. *Infinity.* Springer Online Reference Works. http://eom.springer.de/i/i051000.htm (4/7/2007).

Kretzmann, N (ed) 1982. *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought***.** Ithaca and London: Cornell University Press.

Lakoff, G & Núñez, RE 2000 *Where Mathematics Comes From – How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being.* New York: Basic Books (Perseus).

Livio, M 2002 *The Golden Ratio – The Story of Phi, the Extraordinary Number of Nature, Art and Beauty.* London: Headline Book Publishing.

Maor, E 1987 Maurits C. Escher – Master of the Infinite. In: Maor, E 1987 *To Infinity and Beyond.* Boston: Birkhäuser.

Meroz, E 1997 *Mathematical, Philosophical, Religious and Spontaneous Students' Explanations of the Paradox of Achilles and the Tortoise.* Thesis: Degree of Master in the Teaching of Mathematics: Concordia University Montreal, Quebec, Canada.

Monaghan, J 2001. Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics.* 48:239-257.

Mückenheim, W 2007 *Actual infinity***.** Wikipedia. http://3n.wikipedia.org/wiki/Actual_infinity (4/11/2007).

Nagornyi, NM 2001 *Abstraction of potential realizability*. This text originally appear in Encyclopaedia of Mathematics – ISBN 1402006098**.** http://eom.springer.de/a/a010500.htm (4/7/2007).

Núñez, RE & Lakoff, G 2005 The Cognitive Foundations of Mathematics – The Role of Conceptual Metaphor. In: Campbell, JID (ed) 2005 *Handbook of Mathematical Cognition.* New York: Psychology Press.

Pimm, D 1987 *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms.* London: Routledge & Kegan Paul.

Robutti, O 2007 *The construction of Mathematical knowledge through multiple perspectives.* Dipartimento di Matematica, Università di Torino. Paper for Mathematics congress.

Schattshneider, D 1990 *Visions of Symmetry – Notebooks, Periodic Drawings, and Related Work of M.C.Escher.* New York: W.H. Freeman and Company.

Schiralli, M & Sinclair, N 2003 A Constructive response to 'Where Mathematics Comes From'. *Educational Studies in Mathematics.* 52:79-91.

Seife, C 2000 *Zero The Biography of a Dangerous Idea.* New York: Penguin Books.

Serra, M 2003 *Discovering Geometry – An Investigative Approach***.** Third Edition. Emeryville: Key Curriculum Press.

Stewart, J 2003. *Calculus – early transcendentals.* Fifth edition. Belmont, USA: Brooks/Cole – Thomson Learning.

Stillwell, J 2002. *Mathematics and Its History.* Second Edition. Springer-Verlag.

Strauss, D.F.M. 1973. *Begrip en idee.* Assen: Van Gorcum & Comp.B.V.

Strauss, D.F.M. 2006. Reasoning about infinity: Mathemathical concepts and implications on the limitations of computing devices. *Journal for New Generations Sciences.* 4(2):46-65

Strauss, D.F.M. 1969. *Wysbegeerte en Vakwetenskap.* Elsiesrivier: Nasionale Handelsdrukkery Beperk.

Strydom, H 2002 Information collection: participant observation. In: De Vos, AS (red) 2002 *Research at grass roots – for the social sciences and human service professions.* Second Edition. Pretoria: Van Schaik Publishers.

Tall, D (ed) 1991 *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D 2001a *A Child Thinking About Infinity*. http://www.warwick. ac.uk/staff/David.Tall (21/07/2007).

Tall, D 1980a Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes. Published in *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education***.** Berkeley: 170-179.

Tall, D 2001b Natural and informal infinities. *Educational Studies in Mathematics.* 48: 199-238.

Tall, D 1980b The Notion of Infinite Measuring Number and Its Relevance in the Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics.* 11:271-284.

Tall, DO & Schwarzenberger, RLE 1978 Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching.* 82:1-13.

Tall, D & Tirosh, D 2001. Infinity – the never-ending struggle. *Educational Studies in Mathematics.* 129-136.

Tirosh, D 1991 The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorian Theory. In: Tall, D (ed) 1991 *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Turchin, V 1991 Infinity. Principia Cybernetica Web. http://pespmc1.vub.ac.be/INFINITY.html (4/7/2007).

Venters, D & Ellison, EK 1999 *Mathematical Quilts.* Emeryville: Key Curriculum Press.

Venters, D & Ellison, EK 2003 *More Mathematical Quilts.* Emeryville: Key Curriculum Press.

Wessels, DCJ 1989 *'n Vakdidaktiese besinning oor die fundamentele invloed van grondbegrippe in die onderwys van wiskunde op skool.* Ongepubliseerde D Ed proefskrif. Pretoria: UNISA.

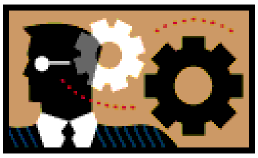
ADDENDUM A

NAAM: ....

OUDERDOM: ....

GRAAD: ....

SKOOL: ....



- Hierdie vraelys is opgestel om inligting in te win vir die voltooiing van 'n verhandeling vir 'n meestersgraad in Wiskunde-onderwys.
- Die doel van hierdie vraelys is om te bepaal hoe leerders **dink**. Dit is nie 'n eksamen nie. Daar is nie regte en verkeerde antwoorde nie.
- Skryf so veel as moontlik neer wanneer jy die vrae beantwoord.
- By voorbaat dankie vir jou aandag en tyd.

VRAELYS

1 Beskryf oneindigheid in jou eie woorde.

....

....

....

2 Gee voorbeelde uit die alledaagse lewe wat, volgens jou, oneindigheid verteenwoordig.

....

....

....

3 Weet jy van enige getalle groter as oneindigheid? Verduidelik.

....

....

....

4 Dink jy minus/negatief oneindigheid bestaan? Verduidelik.

....

....

5 10^{100} staan bekend as ‘n **googol.**

5.1 Is dit ‘n baie groot getal? Is dit oneindig groot? Kan jy dit neerskryf?

Verduidelik.

....

....

5.2 Hoeveel nulle sal hierdie getal (10^{100}) bevat?

....

5.3 Dink jy **googol** het enige verband met die internet-soek-enjin **Google**?

....

6 Lees die volgende: *Jan het gespring en gespring en gespring.*

Beteken dit Jan het aanhou spring? Het Jan ooit opgehou met spring?

....

....

....

7 Stel in jou gedagtes voor dat jy aanhou om desimale van $\sqrt{2}$ neerskryf. Kan jy in jou verbeelding onbepaald hiermee voortgaan? Is dit moontlik om die volledige antwoord van $\sqrt{2}$ neer te skryf?

....

....

....

....

8 Is dit moontlik om ‘n lyn-segment onbepaald te verleng? Verduidelik.

....

....

....

9 Maak in jou verbeelding ‘n prentjie van reëlmatige veelhoeke wat steeds meer sye het. Kan jy die heel laaste moontlike veelhoek visualiseer? Verduidelik.

....

....

....

....

....

10 Wat word voorgestel deur die voorbeelde in vraag 6, 7, 8 en 9? Dink jy dat hulle almal dieselfde idee/konsep verteenwoordig of is hulle almal verskillend?

....

....

....

....

11 Gegee 'n lynsegment AB = 3 cm. Is dit moontlik om die aantal punte op AB te tel? Indien wel, op watter manier?

....

....

....

....

12 Gegee twee lynsegmente AB en CD. CD is twee keer so lank as AB. Is daar dieselfde aantal punte op AB en CD? Verduidelik.

....

....

....

....

13 Gegee 'n lynsegment AB = 1 m. Daarna word BC = ½ m bygetel. Gaan op hierdie wyse voort deur segmente van ¼ m, □ m, ens. by te tel. Sal hierdie proses om segmente by te tel iewers eindig? Verduidelik.

....

....

....

....

....

14 Die Engelsman John Wallis (1626-1703) se werk *Arithmetica Infinitorum* is tydens 1655 gepubliseer. In hierdie publikasie verskyn die simbool ∞ vir oneindigheid vir die eerste keer in druk. Is "∞" 'n reële getal? Watter betekenis het dit vir jou?

....

....

....

....

....

15 Wat is die laaste getal in die versameling natuurlike getalle {1; 2; 3; ....} ?

....

....

....

....

....

16 Kunstenaars en argitekte het tydens die Renaissance **perspektief** ontwikkel. Kunstenaars het probeer om voorwerpe drie-dimensioneel en werklik voor te stel op 'n plat vlak (papier). Ewewydige lyne (wat by die kyker begin en al hoe verder voortgaan) konvergeer (is samelopend) by 'n verdwynpunt op die horison-lyn.

16.1 Merk die horison-lyn, die verdwynpunt en samelopende lyne in die sketse hieronder:

Alchemist's Laboratory, painted by Hans Vredman de Vries.

Heinrich Khunrath. *Amphitheatrum sapientiae aeternae*. [Hamburg: s.n., 1595].

http://www.library.wisc.edu/libraries/SpecialCollections/khunrath/thumbs.html

Other World (1946) – MC Escher

www.mcescher.com

16.2 Dink jy die kunstenaars het reggekry om perspektief te bewerkstellig?

....

....

....

....

....

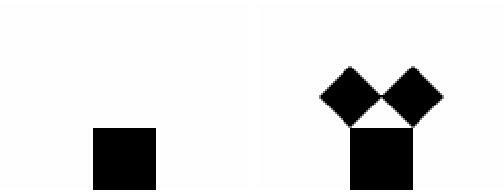
....

....

17 Die volgende skets is eintlik 'n visuele bewys van Pythagoras se stelling, maar dit word ook 'n boom-fraktaal genoem. Die eerste twee stappe van die proses word aangetoon.

17.1 Teken die 3de stap en 4de stap.

17.2 Kan 'n mens oneindig voortgaan met hierdie proses? Is dit moontlik?



....

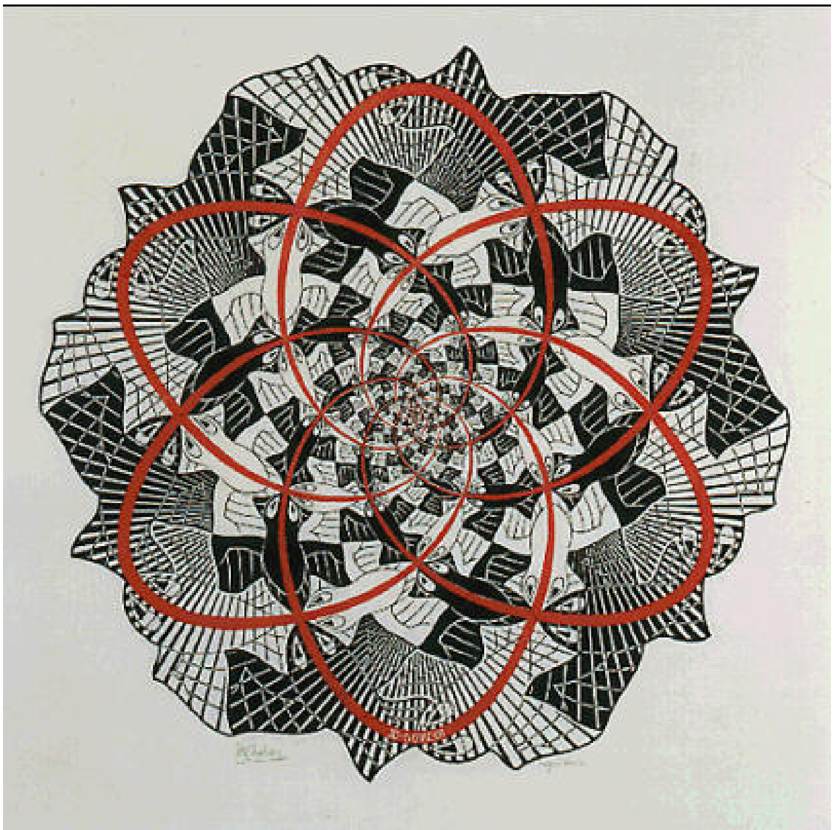
....

....

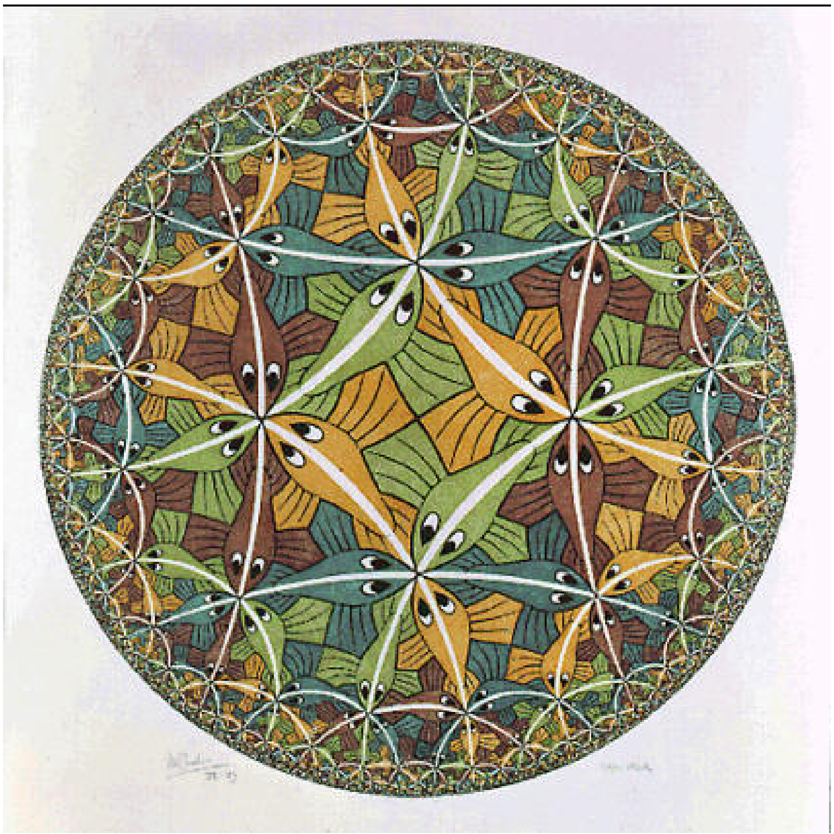
....

....

18 Die volgende is twee van *M.C. Escher* se kunswerke. Wat dink jy probeer Escher voorstel? Op watter manier verskil die twee voorstellings?



Path of Life (1966)



Circle Limit III (1959)

ADDENDUM B

NAAM: ....
OUDERDOM: ....
GRAADKURSUS: ....
WISKUNDE-KURSUS: ....
INSTELLING/UNIVERSITEIT:..

- Hierdie vraelys is opgestel om inligting in te win vir die voltooiing van ‘n verhandeling vir ‘n meestersgraad in Wiskunde-onderwys.
- Die doel van hierdie vraelys is om te bepaal hoe studente **dink**. Dit is nie ‘n eksamen nie.
- Skryf so veel as moontlik neer wanneer jy die vrae beantwoord.
- By voorbaat dankie vir jou aandag en tyd.

VRAELYS

1 Beskryf oneindigheid in jou eie woorde.

....

....

....

2 Gee voorbeelde uit die alledaagse lewe wat, volgens jou, oneindigheid verteenwoordig.

....

....

....

.

3. Is 0,99999999......... (met ander woorde, 0,9 repeterend) gelyk aan 1 of kleiner as 1? Verduidelik.

....

....

4 Gegee ‘n lynsegment AB = 3 cm. Is dit moontlik om die aantal punte op AB te tel? Indien wel, op watter manier?

....

....

....

....

5 Gegee twee lynsegmente AB en CD. CD is twee keer so lank as AB. Is daar dieselfde aantal punte op AB en CD? Verduidelik.

....

....

....

....

6 Gegee ‘n lynsegment AB = 1 m. Daarna word BC = ½ m bygetel. Gaan op hierdie wyse voort deur segmente van ¼ m, ⅛ m, ens. by te tel.

6.1 Sal hierdie proses om segmente by te tel iewers eindig? Verduidelik.

....

....

....

....

....

6.2 Wat sal die som van AB+BC+CD + ... ens. wees?

....

7. Gegee: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n}$

7.1 Konvergeer of divergeer bostaande reeks?

....

7.2 Voltooi: $\lim_{n\to\infty} S_n =$ ....

8. Beskou $f(x) = x^2$

Bestaan die limiet van f(x) as $x \to\infty$? Verduidelik jou antwoord.

....

....

....

9 Gegee: $\lim_{x\to\infty} {}^{1}/_{x} = 0$

Teken ‘n skets om bostaande te illustreer. Beskryf dan in woorde wat dit beteken.

....

....

....

....

....

10 Die Engelsman John Wallis (1626-1703) se werk *Arithmetica Infinitorum* is tydens 1655 gepubliseer. In hierdie publikasie verskyn die simbool ∞ vir oneindigheid vir die eerste keer in druk. Is "∞" 'n reële getal? Watter betekenis het dit vir jou?

....

....

....

....

....

11 Wat is die laaste getal in die versameling natuurlike getalle {1; 2; 3; ....} ? Verduidelik.

....

....

....

....

....

12 Kunstenaars en argitekte het tydens die Renaissance **perspektief** ontwikkel. Kunstenaars het probeer om voorwerpe drie-dimensioneel en werklik voor te stel op ‘n plat vlak (papier). Ewewydige lyne (wat by die kyker begin en al hoe verder voortgaan) konvergeer (is samelopend) by ‘n verdwynpunt op die horison-lyn.

12.1 Merk die horison-lyn, die verdwynpunt en samelopende lyne in die sketse hieronder:

Alchemist's Laboratory, painted by Hans Vredman de Vries.

Heinrich Khunrath. *Amphitheatrum sapientiae aeternae*. [Hamburg: s.n., 1595].

http://www.library.wisc.edu/libraries/SpecialCollections/khunrath/thumbs.html

Other World – MC Escher (1946)

12.2 Dink jy die kunstenaars het reggekry om perspektief te bewerkstellig?

....

....

....

....

....

....

....

13 Benoit Mandelbrot (gebore in 1924) het fraktaal-meetkunde ontwikkel. Kyk na die volgende stadiums van 'n fraktaal wat in die boek *Jurassic Park* (Michael Chrichton) verskyn. Die struktuur is nie baie duidelik in die aanvanklike stadiums nie.

13.1 Op watter manier word die stadiums geskep?

....

....

....

13.2 Kan 'n mens oneindig voortgaan met hierdie proses?

....

....

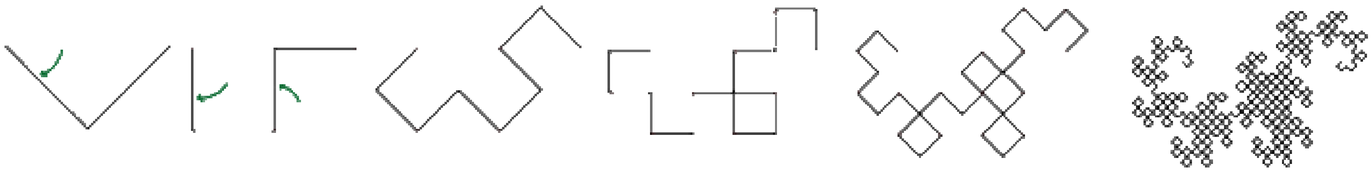
....

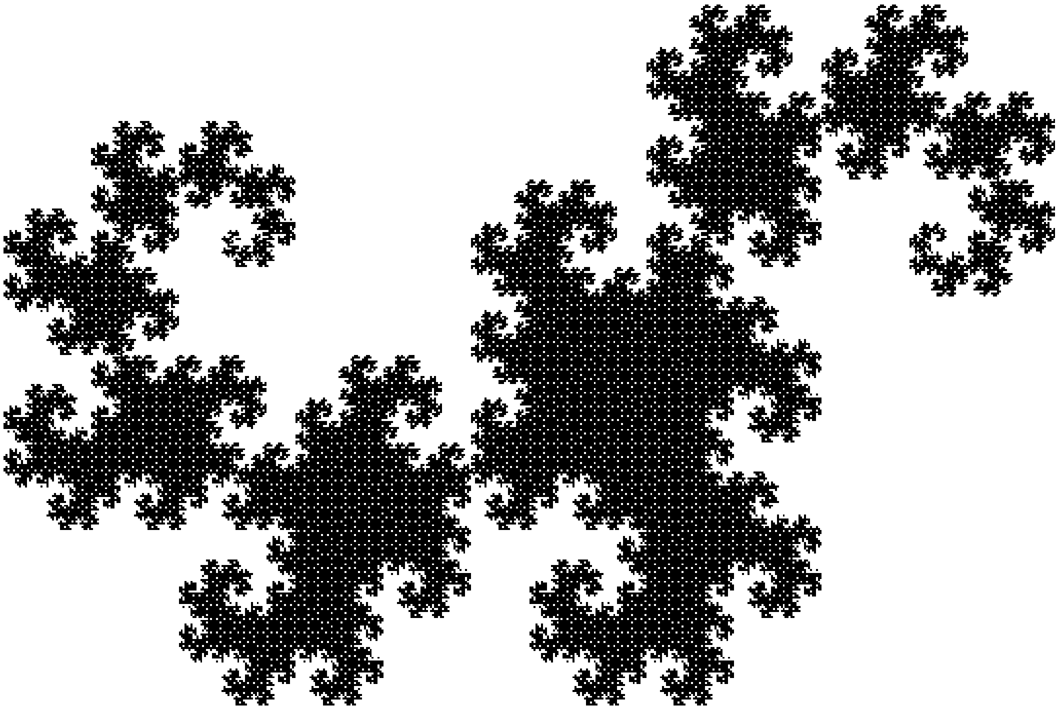
13.3 Beskryf die vorm van die fraktaal in die 7de stadium.

....

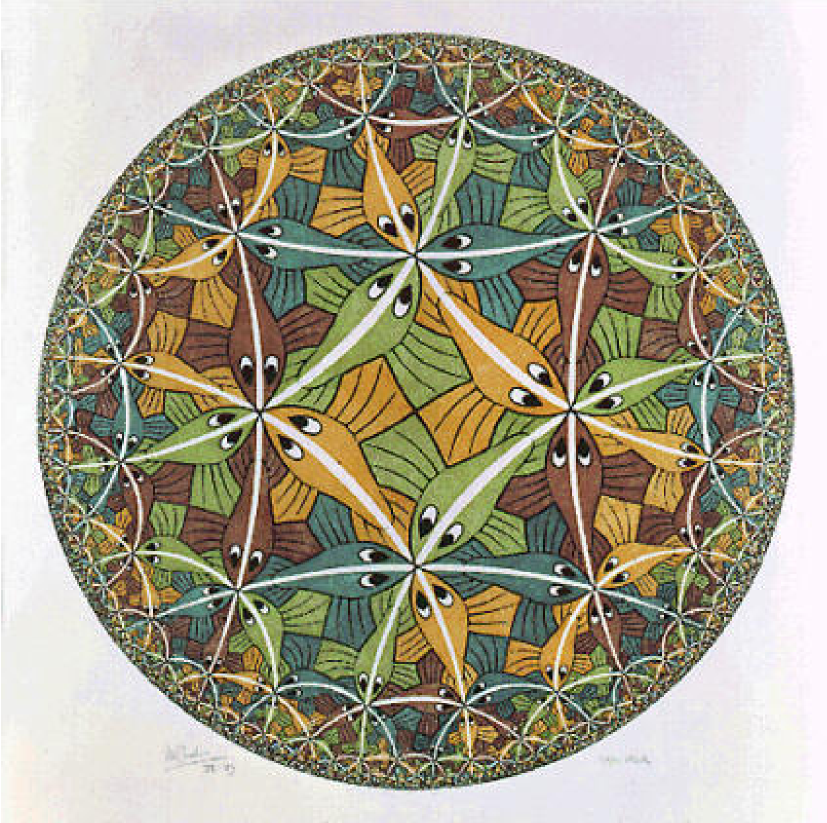
....

....

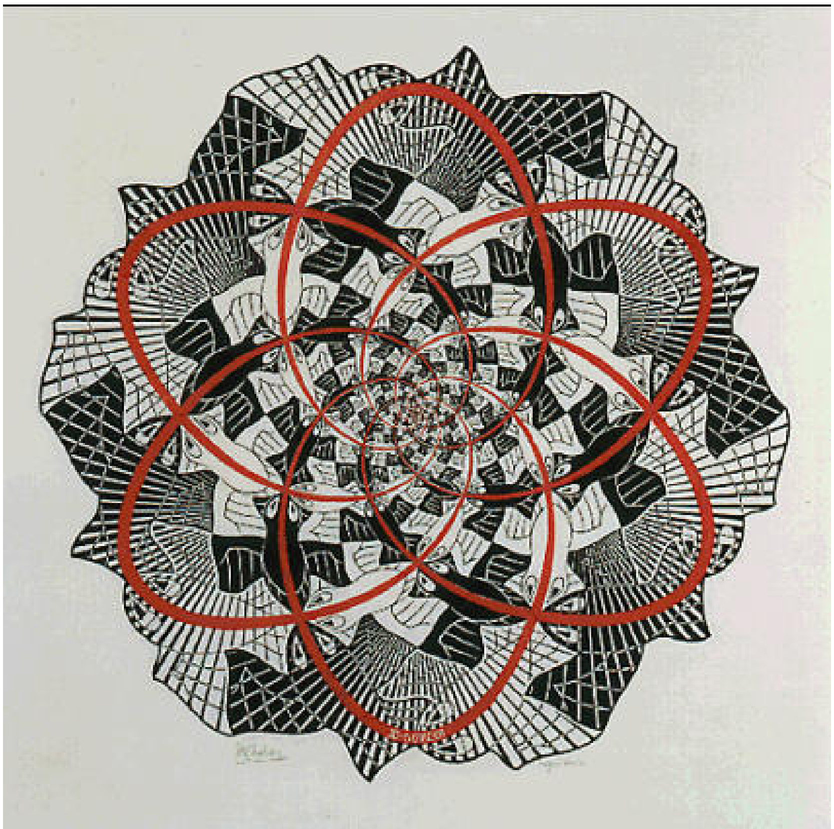




14 Die volgende is van *M.C. Escher* se kunswerke. Hoe dink jy het Escher oneindigheid in hierdie kunswerke vasgevang? Op watter manier verskil die voorstellings – het hy verskillende weergawes van oneindigheid geïllustreer?



Circle Limit III (1959)



Path of Life III (1966)