

**'N ANALISE VAN DIE “REVISED NATIONAL CURRICULUM STATEMENT GRADES  
R – 9 (SCHOOLS)” SE MEETKUNDE IN DIE LIG VAN DIE VAN HIELE MODEL**

deur

**MARGARETHA LOUISA WILLEMSE**

voorgelê ter gedeeltelike vervulling van die vereistes vir  
die graad

**MAGISTER SCIENTIAE**

in die vak

**WISKUNDEONDERWYS**

aan die

**UNIVERSITEIT VAN SUID-AFRIKA**

**STUDIELEIER: PROF J HEIDEMA**

**MEDESTUDIELEIER: PROF DCJ WESSELS**

**FEBRUARIE 2005**

**Studentenommer: 242-894-6**

Ek verklaar hiermee dat

'N ANALISE VAN DIE "REVISED NATIONAL CURRICULUM STATEMENT GRADES R – 9 (SCHOOLS)" SE MEETKUNDE IN DIE LIG VAN DIE VAN HIELE MODEL

my eie werk is en dat ek alle bronne wat ek gebruik of aangehaal het deur middel van volledige verwysings aangedui en erken het.

.....

HANDTEKENING

( ML Willemse )

.....

DATUM

**Romans 11: 36**

**“For of Him, and through Him, and for Him are all things: to Him be glory for ever.”**

## OPSOMMING

### **'N ANALISE VAN DIE "REVISED NATIONAL CURRICULUM STATEMENT GRADES R – 9 (SCHOOLS)" SE MEETKUNDE IN DIE LIG VAN DIE VAN HIELE MODEL**

Suid-Afrika se hersiene nasionale onderwyskurrikulum, die “Revised National Curriculum Statement Grades R-9” word deur uitkomsgebaseerde onderwys gefundeer. Die Van Hiele Model vir die onderrig en leer van meetkunde, is suksesvol in skoolkurrikula van Nederland en Rusland toegepas en geniet wye steun in lande soos Amerika en Europa. Hierdie navorsing het die moontlike verband tussen die Van Hiele raamwerk en die nuwe kurrikulum ondersoek en deur kritiese evaluering baie sterk versoenbaarheid tussen die “Revised National Curriculum Statement Grades R-9” en die Van Hiele Model gevind. Verder is ook aangetoon dat beide sterk gebruik maak van die spiraalbenadering in wiskundeonderwys. Aanbevelings in die verband is dat leerprogramme en onderrigeenhede wat die kurrikulum vir meetkunde in skole implementeer op die Van Hiele Model geskoei word.

**Slutelwoorde:** meetkunde, spiraalbenadering, uitkomsgebaseerde onderwys, denkvlakke, onderrigfases, Van Hiele Model, Revised National Curriculum Statement.

## SUMMARY

### **AN ANALYSIS OF THE GEOMETRY OF THE REVISED NATIONAL CURRICULUM STATEMENT GRADES R – 9 (SCHOOLS) IN VIEW OF THE VAN HIELE MODEL**

Outcomes-Based Education forms the foundation of South Africa's revised national education curriculum, known as The Revised National Curriculum Statement Grades R-9. The Van Hiele Model, developed for the teaching and learning of geometry, has already been used successfully in the school curricula of the Netherlands and Russia. Strong support for this theory exists in leading countries like America and Europe. This study has investigated the possible relationship between the Van Hiele theory and the "Revised National Curriculum Statement Grades R-9" and through critical evaluation found a great compatibility between them. Both are giving strong support for the spiral approach to mathematics education. It is recommended that all geometry learning programmes and teaching units be moulded on the Van Hiele Model.

**Keywords:** geometry, spiral approach, outcomes-based education, levels of thought, phases of learning, Van Hiele Model, Revised National Curriculum Statement.

## **INHOUDSOPGAWE**

### **HOOFSTUK 1 AGTERGROND EN ORIËTERING**

	<b>Bladsy</b>	
1.1	Inleiding	1
1.2	Probleemformulering	2
1.3	Doelstelling en doelwitte	2
1.3.1	Doelstelling	2
1.3.2	Doelwitte	2
1.4	Analise van die probleem	3
1.4.1	Inleiding	3
1.4.2	Die spiraalbenadering tot onderwys	5
1.4.3	Die onderbou van die Revised National Curriculum Statement	7
1.4.4	Die onderbou van die Van Hiele Model	7
1.5	Navorsingsontwerp en metodologie	8
1.6	Uitleg van die studie	9

### **HOOFSTUK 2 DIE VAN HIELE MODEL**

2.1	Inleiding	10
2.2	Die Van Hiele Model	10
2.2.1	Die oorspronklike Van Hiele Model	11
2.2.2	Denkvlakke	13
2.2.2.1	Die eerste denkvlak: Vlak 0 is die basisvlak van herkenning	13
2.2.2.2	Die tweede denkvlak: Vlak 1 is beskrywend en analities	14
2.2.2.3	Die derde denkvlak: Vlak 2 behels ordening en rasionalisering	14
2.2.2.4	Die vierde denkvlak: Vlak 3 waar afleidings of formele deduksie plaasvind	15
2.2.2.5	Die vyfde denkvlak: Vlak 4 word genoem rigorisme	15
2.2.3	Onderrigfases	16
2.2.3.1	Fase 1: Inligting	17
2.2.3.2	Fase 2: Gerigte oriëntasie	17
2.2.3.3	Fase 3: Eksplisitering	18

2.2.3.4	Fase 4: Vrye oriëntasie	18
2.2.3.5	Fase 5: Integrasie	19
2.2.4	Die hersiene Van Hiele Model	19
2.3	Die didaktiese fundering van die Van Hiele Model	20
2.3.1	Inleiding	20
2.3.2	Die realistiese benadering tot onderrig	21
2.4	Klemverskuiwings	25
2.4.1	Betekenisvolle aanpassings in meetkundeonderwys	26
2.4.2	Meetkunde moet vanaf graad R tot graad 12 onderrig word	27
2.4.3	Die 3D – 2D Transformasies	28
2.5	Samevatting	29

### **HOOFSTUK 3 DIE SPIRAALBENADERING IN MEETKUNDEONDERWYS**

3.1	Inleiding	30
3.2	Die doel van hierdie hoofstuk	31
3.2.1	Die ontwerp	31
3.3	Die didaktiese driehoek	31
3.3.1	Die leerinhoud	31
3.3.2	Die leerder	32
3.3.3	Die onderwyser	33
3.4	Die spiraalbenadering in die Van Hiele Model	34
3.4.1	Illustrasie van die denkvlakke	34
3.4.2	Die toepassing van die onderrigfases	41
3.5	Die gebruik van die Van Hiele Model in die onderrig van vierhoeke	41
3.5.1	Vanaf herkenning na analise	42
3.5.2	Vanaf analise na ordening	44
3.5.3	Opsomming	46
3.6	Parallelisme as organiseringsbeginsel	47
3.6.1	Die onderrigfases	48
3.6.2	Meetkundeaktiwiteite	54

3.6.2.1	Aktiwiteit 1	55
3.6.2.2	Aktiwiteit 2	56
3.6.2.3	Aktiwiteit 3	57
3.6.2.4	Aktiwiteit 4	58
3.6.2.5	Aktiwiteit 5	60
3.6.2.6	Aktiwiteit 6	62
3.6.3	Opsomming	63
3.7	Samevatting	63
3.7.1	Asseseringstandaarde	63
3.7.2	Skematiese voorstelling	66

## **HOOFSTUK 4 DIE SKOOLWISKUNDEKURRIKULUM (GRAAD R-9)**

4.1	Agtergrond en geskiedenis	67
4.2	Die oorspronklike verklaring: Kurrikulum 2005	69
4.2.1	Die ontwerpskenmerke van Kurrikulum 2005	70
4.3	Die hersiene verklaring: Revised National Curriculum Statement	72
4.3.1	Die ontwerpskenmerke van die Revised National Curriculum Statement	72
4.3.1.1	Die kritieke- en ontwikkelingsuitkomste	72
4.3.1.2	Leeruitkomste en asseseringstandaarde	73
4.4	Die didaktiese onderbou van die Revised National Curriculum Statement	74
4.4.1	Die konsep “uitkomste”	74
4.4.2	Die oorsprong van Uitkomsgebaseerde onderwys	75
4.4.3	Uitkomsgebaseerde onderwys in Suid-Afrika	78
4.4.3.1	Inleiding	78
4.4.3.2	Uitkomsgebaseerde onderwys en konstruktivisme	79
4.4.3.3	Uitkomsgebaseerde onderwys en die Leerareaverklaring vir Wiskunde	80
4.4.3.4	Die implementering van die Revised National Curriculum Statement	82
4.5	Samevatting	83



## **HOOFSTUK 5 'N KRITIESE EVALUERING VAN DIE RNCS AAN DIE HAND VAN DIE VHM**

5.1	Inleiding en formulering van kriteria	84
5.2	Onderrigfases	86
5.2.1	Skematiese uitleg van vrae rondom die onderrigfases	88
5.2.2	Vraag 1: Praktiese aanbieding	89
5.2.3	Vraag 2: Ruimtelike vermoë	93
5.2.4	Vraag 3: Kommunikasie en redenering	98
5.2.5	Vraag 4: Probleemoplossing en divergente denke	102
5.2.6	Vraag 5: Insig en struktuur	106
5.2.7	Opsomming	107
5.3	Denkvlakke	108
5.3.1	Skematiese uitleg van vrae rondom die denkvlakke	108
5.3.2	Vraag 1: Hiërargiese opbou	109
5.3.3	Vraag 2: Diskontinuuïteite	111
5.3.4	Vraag 3: Taalaspek	116
5.3.5	Vraag 4: Eksplisiet/implisiet	118
5.3.6	Opsomming	122

## **HOOFSTUK 6 BEVINDINGE EN AANBEVELINGS**

6.1	Inleiding	123
6.2	Hoofbevindinge van die navorsing	123
6.3	Die spiraalbenadering in meetkundeonderwys	123
6.4	Die didaktiese fundering	125
6.4.1	Die didaktiese onderbou van die Van Hiele Model	125
6.4.2	Die didaktiese onderbou van die Revised National Curriculum Statement	126
6.5	Bevindinge van die analitiese vergelyk	127
6.5.1	Bevindinge rondom die onderrigfases	127
6.5.2	Bevindinge rondom die denkvlakke	129

6.6	Aanbevelings	131
6.7	Ten slotte	135

## **LYS VAN TABELLE**

Tabel 1	Eerste denkvlak	35
Tabel 2	Tweede denkvlak	36
Tabel 3	Derde denkvlak	38
Tabel 4	Vierde denkvlak	40
Tabel 5	Vyfde denkvlak	40
Tabel 6	Vierhoeke	45
Tabel 7	Skematiese voorstelling	66
Tabel 8	Tradisionele- versus Uitkomsgebaseerde Kurrikulum	67
Tabel 9	Konkrete materiaal	90
Tabel 10	Aktiwiteite	94
Tabel 11	Verskillende soorte redenerings	101
Tabel 12	Meetkundeleerinhoud: 2D vorme en 3D objekte	110
Tabel 13	Aktiwiteite en wiskundemateriaal	113
Tabel 14	Transformasies	121

## **LYS VAN FIGURE**

Figuur 1	Figuurontbloting	45
Figuur 2	Organiseringsbeginsel van parallelisme	48
Figuur 3	Onderrigfase 1	48
Figuur 4	Bedekking van plat vlak	53

<b>BIBLIOGRAFIE</b>	136
---------------------	-----

**Bylae A:** Uittreksels uit die “The Revised National Curriculum Statement Grades R – 9 (Schools) Policy. Mathematics.”

## HOOFSTUK 1

### AGTERGROND EN ORIËTERING

#### 1.1 Inleiding

Hierdie studie het sy ontstaan te danke aan onder meer die volgende faktore:

- lewendige belangstelling in wiskundeonderwys;
- kommer wat by die navorser ontstaan het oor die fundering en implementering van Kurrikulum 2005;
- die oortuiging dat nuwe kurrikulum nie sonder deeglike navorsing en didakties-opvoedkundige onderbou ingestel kan word nie;
- die oortuiging dat die Van Hiele Model (VHM) onderrig- en leerprogram insluit wat wel deeglik didakties-opvoedkundig begrond is, en met sukses toegepas behoort te kan word in meetkundeonderwys in Suid-Afrikaanse skole.

Die *doel* van hierdie studie is om die huidige Suid-Afrikaanse meetkundekurrikulum vir grade R tot 9 analities, in die lig van die Van Hiele Model te evalueer. Hierdeur kan bydrae gelewer word ten opsigte van die kurrikulum en die praktyk van meetkundeonderwys in Suid-Afrikaanse skole. Deur middel van kritiese evaluering sal daar vasgestel word in watter mate die huidige meetkundekurrikulum vir grade R tot 9 aan die Van Hiele Model gekoppel kan word. Die tien verpligte skooljare bestaan uit die Grondslagfase wat strek vanaf graad R (“Reception”) tot graad 3; die Intermediêre fase vanaf grade 4 tot 6 en die Seniorfase vanaf grade 7 tot 9. Hierdie skooljare is saamgegroeper en staan bekend as die Algemene-Onderwys-en-Opleidingsband. Na suksesvolle voltooiing van hierdie band, ontvang leerder die Algemene-Onderwys-en-Opleidingsertifikaat. Die beoordeling van die meetkundekurrikulum vir hierdie band, soos gemeet aan die VHM, sal aan die hand van nege vrae gedoen word. Die oorsprong van hierdie vrae kan teruggevoer word na:

- die didakties-opvoedkundige onderbou van die VHM,
- die unieke kenmerke van die VHM,
- klemverskuiwings in wiskundeonderwys as sodanig, asook na
- die sogenaamde spiraalbenadering tot onderwys.

Die belangrikste bevindinge en aanbevelings, waar nodig, vir die meetkundekurrikulum in die lig van die Van Hiele Model word in Hoofstuk 6 uiteengesit. Die hersiene kurrikulum vir skoolwiskunde vir grade R tot 9 is deur die Nasionale Departement van Onderwys gedurende die jaar 2002 in Suid-Afrika vrygestel en verwoord in die beleidsdokument “The Revised National Curriculum Statement Grades R - 9 (Schools) Policy.” Vir die doeleindes van hierdie studie word verwys na die RNCS.

### **OPMERKING:**

Die Afrikaanse weergawe van die RNCS was by die aanvang, tot diep in die studie van hierdie navorsing nie beskikbaar nie en aldus is daar besluit om met die RNCS te volstaan.

## **1.2 Probleemformulering**

In watter mate beantwoord die huidige meetkundekurrikulum in Suid-Afrikaanse skole vir grade R tot 9, naamlik die RNCS, aan die kurrikuleringsimplikasies wat die VHM inhou? Hierdie vraag word verder in par. 1.4 geanaliseer.

## **1.3 Doelstellings en doelwitte**

### **1.3.1 Doelstellings**

Die twee doelstellings van hierdie navorsing word as volg geformuleer.

Die eerste doelstelling is om analise van die volgende komponente te doen:

- die Van Hiele Model;
- die spiraalbenadering tot kurrikulumontwerp in meetkundeonderwys en
- die huidige Suid-Afrikaanse meetkundekurrikulum vir grade R tot 9.

Die tweede doelstelling is om, gesien teen die agtergrond van die spiraalbenadering tot meetkundeonderwys, kritiese evaluering van die RNCS aan die hand van die VHM te doen.

### **1.3.2 Doelwitte**

Die volgende doelwitte word vir hierdie studie beplan:

- om deur middel van literatuurondersoek die didakties-opvoedkundige onderbou van die VHM te ondersoek;
- om deur middel van literatuurondersoek die didakties-opvoedkundige onderbou van die RNCS te ondersoek;
- om vanuit die literatuurondersoek eksemplaries meetkundeleerinhoud te selekteer en verbandhoudende aktiwiteite binne die konteks van die VHM se eerste drie denkvlakke en vyf onderrigfases te ontwikkel en;
- om sodoende die spiraalbenadering aan te toon en
- om vanuit literatuurondersoek vrae te formuleer wat as kriteria gebruik kan word om die RNCS krities aan die hand van die VHM te evalueer.

## **1.4 Analise van die probleem**

### **1.4.1 Inleiding**

Op die vraag (in par. 1.2) naamlik tot watter mate die huidige meetkunde-kurrikulum vir grade R tot 9 in Suid-Afrikaanse skole, aan die kurrikuleringsimplikasies wat die VHM inhou voldoen, is daar geen eenvoudige antwoord nie, want soos Cangelosi (1992: 1) tereg sê, kan wiskunde-onderrig beskou word as “...a set of messy functions.” Verder meld Swart (1986: 12) dat dit inderdaad kuns vir enige onderwyser is om suksesvol brug te slaan vanaf die teoretiese raamwerk van gegewe kurrikulum (soos die RNCS) na die praktyk van die klaskamer. Die onderwyser benodig hiervoor onderrig- en leerprogram (soos ingesluit in die VHM) om teorie en praktyk bymekaar uit te bring. Tydens die onderriggebeure, moet kennis nie net aan die leerders oorgedra word nie, maar moet hulle ook in staat wees om hierdie kennis in die praktyk te kan toepas. Die leerder se insig en vaardighede moet sodanig ontwikkel word, dat vir hóm brug geslaan is tussen teorie en praktyk.

In werklikheid het bogenoemde, wat meetkunde aanbetref, ongelukkig nie in die verlede in die klaskamer plaasgevind nie. Euklidiese meetkunde is in Suid-Afrika in die verlede as volledige en aparte deduktiewe sisteem (ook geïsoleerd van analitiese meetkunde) slegs op hoërskool onderrig. Dit het verskraling van meetkunde tot gevolg gehad en het meegewerk dat leerders tradisioneel kennis vergaar het deur meetkundestellings en formules paraat te leer, met weinig, indien enige insig. Die blote aanleer van algoritmes, die doen en oefen van roetineprobleme aan die hand van

voorbeeld, en die ontwikkeling van vaardige kunsgrepe buite die nodige praktiese konteks, het wiskunde (en meetkunde) gevreesde en soms gehate skoolvak gemaak. Jaar na jaar is hierdie proses herhaal en is leerderskorps met baie boekekenis, en geen toepassingsvaardighede nie, telkens die wêreld ingestuur. Uit hierdie korps tree dan weer onderwysers na vore wat op hul beurt die bese kringloop herhaal. Wêreldwyd het daar egter die afgelope eeu 'n roep na vernuwing in die onderwys van wiskunde op skoolvlak weerklink en is daar daadwerklike pogings aangewend om wiskundekurrikula en wiskundeonderwys te verander. Die Verenigde State van Amerika as toonaangewende wêreldmoondheid het in 1989 en 1991 onderskeidelik die *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* en die *Professional standards for teaching mathematics* ontwikkel. Hierdie standaardriglyne wat deur die National Council for the Teachers of Mathematics (die NCTM) opgestel is, sal volgens Wessels (1997: 10) “...die hele gang van skoolwiskunde in die wêreld verander en is Suid-Afrika reeds besig om in hierdie spore koers te kies.”

Alhoewel skoolwiskunde die studie van getal (numeriese diskreetheid) en ruimte (kontinuiteit) behels, is meetkunde merendeels as stiefkind behandel en kon eers baie onlangs sy regmatige plek inneem. In Suid-Afrika geniet meetkunde sedert 1994, toe dramatiese en ingrypende veranderinge aan die kurrikula gedoen is, 'n sekere aansien. Volgens kontemporêre beklemtoninge (Murray, Olivier en Human (1993); Van Niekerk (1997) en Nickson (2000)) moet leerder in meetkunde sy visuele asook sy denkvermoëns ontwikkel, sy repertoire van vaardighede uitbrei, sy vrees vir meetkunde oorkom, en egtewêreld-probleme in die praktyk met vertroue kan oplos. Omdat die aard en struktuur van wiskunde (en meetkunde) sodanig is dat die partikuliere geanaliseer en dan beskryf word in 'n algemene reël, wet of beginsel, kan die epistemologiese spesifieke metodes eie aan wiskunde volgens Scopes (1973: 12-14) saamgevat word as die wetenskaplike metode, die intuïtiewe metode, die deduktiewe metode en die skeppingsmetode. Ongelukkig is daar in die verlede slegs op die deduktiewe aspek gekonsentreer, en dit, terwyl volgens Oosthuizen (1986: 198) die wiskundige sisteem in der waarheid 'n dinamiese aard het, waar die ontwikkeling van wiskunde eksperimenteel en induktief is en geen wette ken nie, maar die verifikasie in die bewysstruktuur van wiskunde sistematies, logies en deduktief is. Verder staan die feit van ontdekkings en uitvindsels baie sentraal in die leer van wiskunde (en meetkunde). Hierdie aspekte saam met die feit van skeppings en intuïsie is egter in die verlede erg in meetkundeonderwys verwaarloos.

Een van die belangrikste sienings in die psigologiese perspektief van hoe leer by leerders plaasvind, is dat leer hiërargies van aard is (Donald, D; Lazarus, S en Lolwana, P 1997) en (Van Hiele 1986). Dit beteken dat daar sekere afdelings van kennis en vaardighede nodig en voorwaardelik is vir die aanleer van verdere afdelings en vaardighede. Hierdie siening is ten aansien van die eie aard en struktuur van wiskunde (en meetkunde) in die besonder toepaslik. Soos leerders na hoër denkvlakke in meetkunde vorder, moet hulle in staat wees om meer abstrak verkenningswerk te kan doen om sodoende vir hulself strukture en wetmatighede te kan ontdek. Leerders moet dus op hul vorige kennis en insigte kan bou en hierdie hiërargiese aard vind grootliks aansluiting by die sogenaamde spiraalbenadering tot die onderwys van meetkunde en die daarmee gepaardgaande spiraalgebaseerde kurrikulum.

#### **1.4.2 Die spiraalbenadering tot onderwys.**

Die spiraalbenadering tot die kurrikulum word dikwels in die onderwys van skoolwiskunde gebruik (Mathematics Association (1981)). Die hele idee van spirale kurrikulum in meetkunde is dat konsepte op spirale patroon georganiseer word, dan aangebied word en verskeie kere hersien word, maar elke keer in meer detail en op wyses wat verskillende leerstyle kan akkommodeer. Flores (1993: 152) wys daarop dat die gevaar egter bestaan dat daar jaar na jaar dieselfde leerinhoud in sirkelgang herhaal mag word en dat die effektiwiteit van die spirale kurrikulum dan verlore kan gaan. Om te sorg dat die spirale kurrikulum effektief funksioneer, moet elke hernieude besoek aan dieselfde konsep dus op hoër vlak plaasvind. Kennis en insig bou dus voortdurend op vorige ervarings. Breetzke (1988: 1) het gekyk na klaskamerbeplanning tydens die studie van rye en reekse. Hy beskou die lê van geskikte grondslag vir konseptuele ontwikkeling as uiters belangrik en sê onder andere:

Accepting the view of the spiral nature of the curriculum where one returns to concepts and procedures at increasing levels of sophistication, one needs to identify the position of topics in this spiral and to trace their conceptual foundation. If the teaching of calculus is left until the last moments of the Standard 10 year without proper groundwork, the pupil will be left with little time to develop an understanding of the concepts involved.

Dieselfde beginsel geld natuurlik vir alle vertakkinge van wiskunde, insluitend die studie van meetkunde. Alummoottill (1990: 1) het ondersoek onder voornemende onderwysstudente geloods en sy navorsingsprobleem onder andere binne teoretiese raamwerk van Bruner se spirale

kurrikulum, Ausubel se gestruktureerde-leer en Skemp se relasionêre insig en begrip geplaas. Sy bevinding was dat “ ...structured, integrated presentation around a spiral curriculum promotes relational understanding.”

In 1995 bemerk Janet Wineland in die Verenigde State van Amerika in onder-gemiddelde wiskundeleerders “ ...significant higher scores by ninth and eight graders who were tested using the spiral approach than the control groups.” Volgens Carter (1976: 2) het navorsers van die Mathematics Association in Engeland verskeie aspekte en behoeftes vir die sekondêre skool ondersoek en die gebruik van spirale wiskundekurrikulum vir sekondêre skole aanbeveel. In 1981 herhaal die Mathematics Association (1981b: 6) hierdie aanbeveling en stel spirale ontwikkelingskema voor “ ...where students pass into higher levels of instruction, using tools from earlier levels of abstraction.” Verder verken hierdie navorsers (1981a: 2) die spiraalbenadering in meetkunde ten opsigte van sirkels en keëls en beveel geïntegreerde spiraalgebaseerde kurrikulum aan “ ...that provides vertical links between earlier and later work and horizontal links with other topics in mathematics and other subjects.”

Oorweldigende steun vir die gebruik van spiraalbenadering in die onderwys van wiskunde (en meetkunde) word onder andere gevind in navorsingsuitsette van Cawood (1981), Cowan (1998), Duminy (1987), Mathematics Association (1981), Milne (1971), Nibbelink (1990), Thompson (1996), Strydom (1981), Zais (1976), en vele andere. Onderliggend in al die navorsing vind ons dat die spiraalbenadering klem lê op die volgende oogmerke of uitkomstes wat deur beide die kurrikulum en die leerprogram ingesluit behoort te word:

- Die leerder se *denkvermoë* moet ontwikkel en verhoog word, sy repertoire van *vaardighede* moet uitgebrei word, sy vrees vir meetkunde moet oorkom word, daar moet strategieë tot sy beskikking gestel word waarmee hy probleme in die praktyk met vertroue kan oplos, sy *ruimtelike vermoëns* moet ontwikkel en uitgebou word, *beredenering* wat met *insig en begrip* gedoen word moet bereik word, en sy vermoë om verbaal en skriftelik te kan *kommunikeer* moet ontwikkel word.
- Die rol wat *strukture* speel en die skep van *geskikte grondslae* word beklemtoon, want mense wil graag orde skep, hul wil graag struktureer en dit lei tot hoër vlakke van denke. Sanders (1991: 13) bespreek klompie idees wat onderwyser binne spiraalkurrikulum kan toepas om wiskunde



sukksesvol te onderrig en noem die belangrikheid van “ ...providing manipulative experiences, ...promoting creative thinking, ...and planning enrichment activities.”

- Schulman en Eston (1998: 72) wys ook op dié voordeel dat onderwysers binne spiraalkurrikulum, ontwikkeling, groei en patrone by leerders kan opmerk.

Die vraag is nou of die VHM gebruik kan word in die onderrig-en leergebeure van meetkunde, soos gesien teen die onderliggende beginsels van die RNCS en met inagneming van spiraalbenadering tot onderwys.

### 1.4.3 Die onderbou van die Revised National Curriculum Statement

Die onderliggende beginsels, begrippe en waardes van die RNCS, behoort so gestruktureer te wees dat bogenoemde oogmerke binne spiraalgebaseerde kurrikulum bereik kan word. Suid-Afrika se nuwe onderwyskurrikulum wat sedert Januarie 1998 geïmplementeer word, staan bekend as Kurrikulum 2005 en is gegrond op die visie en waardes wat vervat is in die Grondwet van die Republiek van Suid-Afrika, (Wet 108 van 1996). Die RNCS (2002) bou op hierdie beginsels en implementeer verder die filosofie en praktyk van die uitkomsgebaseerde benadering tot onderwys. In hierdie benadering vind verskuiwing van die tradisionele doelwitte-en-oogmerke-benadering na uitkomsgebaseerde onderwys (UGO) plaas. Die UGO as benadering is onderwysproses wat prestasiegeoriënteerd, aktiwiteitsgebaseerd en leerdergerig is. Dit beteken volgens Dreyer (1999: 4) onder andere dat:

- leerders nie net kennis moet verwerf nie, maar *moet verstaan* wat hulle leer en in die leergebeure toepaslike *vaardighede*, houdings en waardes moet ontwikkel en dat
- leerders *aktiewe deelnemers* van die leergebeure word en *verantwoordelikheid* vir hulle leer moet aanvaar.

Die vraag is nou of hierdie onderbou aansluiting vind by die doelstellings van spiraalgebaseerde kurrikulum, asook by die fundering van die VHM.

### 1.4.4 Die onderbou van die Van Hiele Model

Soos gemeld (in par. 1.4.2) gee navorsers en didaktici baie steun aan die gebruik van spiraalgebaseerde kurrikulum in skole en volgens Flores (1993: 157) kan die VHM as riglyn gebruik

word om spiraalgebaseerde kurrikulum effektief van stapel te stuur. Die eienskappe van die VHM is geleë in die denkvlakke en onderrigfases daarvan. Hierdie unieke eienskappe van denkvlakke en onderrigfases van die VHM (kyk par. 2.2.1) sluit ten nouste aan by die teorieë van onder andere Hegel (1770-1831), Dewey (1859-1952), Piaget (1893-1980), Bruner (1915- ), konstruktivisme, Polya (1887-1985), Dienes (1916- ), Burton, en die *realistiese benadering* tot onderwys (kyk par. 2.3.2). Die VHM bied aan die leerder *leerervaringe* wat hom *bemagtig* om dit wat geleer word, *te verstaan* en *te gebruik*. Die konseptuele denke van die leerder kan sodoende verbreed word en elke hernieude besoek aan dieselfde konsep kan op hoër denkvlak plaasvind. Die *hiërargiese aard* van die denkvlakke in die VHM vind aansluiting by die psigologiese perspektief dat leer hiërargies van aard is en verder plaas Van Hiele baie klem op *ruimtelike ontwikkeling*, en die skep van *strukture* om leerders tot dieper *insig* te bring (Van Hiele 1986).

Die vraag is nou of hierdie onderbou aansluiting vind by die doelstellings van spiraalgebaseerde kurrikulum, asook by die fundering van die RNCS.

### 1.5 Navorsingsontwerp en metodologie

Hierdie navorsing word deur middel van literatuurondersoek gedoen.

Primêre en sekondêre bronne word gebruik om sodoende verwysingsraamwerk te skep waaruit die navorsingsprobleem ondersoek sal word. Elke bron sal sorgvuldig gekies, bestudeer en ondersoek word, met die doel om data in te samel wat relevant, betroubaar en toepaslik vir die studie is. Volgens Johnson en Christensen (2000: 152) kan primêre bronne beskou word as oorspronklike data wat ingesamel is as deel van navorsingsondersoeke. In die bestudering van primêre bronne konsentreer die navorser op die volgende amptelike dokumente:

- Verslae, resensies en geskrifte van die Nasionale Departement van Onderwys.
- Die volgende beleidsdokumente van die Nasionale Departement van Onderwys:
  - Revised National Curriculum Statement Grades R - 9 (Schools) Policy. Overview.
  - Revised National Curriculum Statement Grades R - 9 (Schools) Policy. Mathematics, (kyk Bylae A).

Ten opsigte van die Van Hiele Model is die volgende primêre bronne geraadpleeg:

- Die Van Hiele se geskrifte asook geselekteerde vertalings daarvan deur Fuys, D (1984);

Geddes, D (1984) en Tischler, R (1984).

Volgens Johnson en Christensen (2000: 152) word sekondêre bronne beskou as data wat oorspronklik op vroeëre stadium deur ander outeurs en navorsers met verskillende oogmerke as die van die huidige navorsingsvraag ingesamel is. By die bestudering van sekondêre bronne word daar veral gekonsentreer op navorsing wat reeds vir die Suid-Afrikaanse konteks gedoen is, soos onder andere dié van Booysen (1994), Van Niekerk (1995, 1997, 1996, 1998, 2000, 2001, 2002) en Nixon (2002). Om die navorsingsvraag te beantwoord word ongeveer verdere sestig sekondêre bronne geraadpleeg om sodoende die kurrikuleringsimplikasies wat die VHM inhou, te ondersoek.

Vir die doel van hierdie studie word daar deurgaans na die persoon in die manlike vorm verwys, aangesien dit die lees van die verhandeling sal vergemaklik.

## **1.6 Uitleg van die studie**

Die studieveld word in hierdie Hoofstuk 1 afgebaken deur die verbesondering van doelstellings en doelwitte en die analise van die geformuleerde probleem. In Hoofstuk 2 word die VHM bekend gestel met bespreking van die onderbou van die model asook die stel van die kurrikuleringsimplikasies wat die model inhou. In Hoofstuk 3 word meetkundeaktiwiteite ontwikkel, om die spiraalbenadering binne die denkvlakke en die onderrigfases van die VHM te ondersoek. Vervolgens word die RNCS in Hoofstuk 4 bekend gestel met bespreking van die onderbou van die RNCS. In Hoofstuk 5 word die geformuleerde vrae as kriteria gebruik om kritiese evaluering van die RNCS aan die hand van die VHM te doen. Laastens word die belangrikste bevindinge van hierdie studie, enkele aanbevelings en waargenome leemtes wat betref die implementering van die RNCS in Hoofstuk 6 saamgevat.

## **HOOFSTUK 2**

### **DIE VAN HIELE MODEL**

#### **2.1 Inleiding**

Die Van Hiele Model is 'n niveau-model wat gekarakteriseer word deur sy unieke eienskappe van denkvlakke en onderrigfases wat kortliks in hierdie hoofstuk uiteengesit word. Uit die literatuurondersoek van primêre sowel as sekondêre bronne kon die didaktiese onderbou van die model vasgestel word en dit was al gou duidelik dat hierdie model sekere vereistes waaraan meetkundekurrikulum moet voldoen, impliseer. Die model is oorspronklik vir die onderrig en leer van meetkunde ontwikkel, op 'n tydstip toe skoolmeetkunde afgeskaal was tot die onderrig en leer van Euklidiese meetkunde. Wiskundeonderwys is sodanig het egter ook die afgelope twee dekades deur 'n wêreldwye vernuwingsproses gegaan, wat ingrypende veranderings en klemverskuiwings in kurrikula van die meeste wêreldlande tot gevolg gehad het. Van hierdie veranderings reflekteer ten nouste op die VHM en word dus tesame met die didaktiese onderbou van die model ook kortliks in hierdie hoofstuk bespreek.

#### **2.2 Die Van Hiele Model**

Die VHM as onderrig- en leermodel vir meetkunde het in 1957 uit die doktrale proefskrifte van Pierre en Dina van Hiele ontstaan. Die oorspronklike vyf denkvlakke asook die vyf onderrigfases word vervolgens kortliks bespreek. Die model is weliswaar later uitgebrei en verander en hierdie veranderinge word in par. 2.2.4 bespreek. Die egpaar Pierre M. van Hiele en Dina van Hiele-Geldof het gedurende die tydperk 1938-1951, terwyl hulle wiskundeonderwysers in Montessori sekondêre skole in Nederland was, opgemerk dat baie van hulle leerders onderpresteer (Van Hiele 1986: 2). In 1951, terwyl hy aan 'n nie-Montessori skool onderwys gegee het, vind Pierre van Hiele homself “...immersed in a struggle about insight” (Van Hiele 1986: 4). Hy was oortuig dat die hoofdoel in wiskundeonderrig nie die leer van feite moet wees nie, maar die ontwikkeling van insig. Die egpaar het veral bekommerd geraak omdat daar dele van wiskundeonderwerpe was wat hul oor en oor kon verduidelik, sonder dat leerders dit kon snap (Van Hiele 1986: 39). Hulle het besluit om 'n totaal nuwe benadering te volg en het gedurende die skooljaar van 1955-1956 hul leerders van ongeveer twaalfjarige ouderdom deur middel van 'n nuwe metode onderrig. Hulle wou

vasstel of die leerders se insig in meetkunde deur middel van hierdie nuwe onderrigmetode verbeter kon word. Met behulp van die analise van hierdie studies is in 1957 uit die afsonderlike doktrale proefskrifte van die Van Hiele egpaar aan die Universiteit van Utrecht, onderrig- en leermodel vir meetkunde gebore wat leerders kon help om hul insig in meetkunde te verbeter. Pierre van Hiele het die skema en die psigologiese prinsipe geformuleer, terwyl Dina van Hiele op die didaktiese eksperimentering gekonsentreer het (Hoffer 1983: 207). Dina het kort na die voltooiing van haar proefskrif gesterf. Hans Freudenthal (1905-1990) was Dina van Hiele-Geldof se promotor en hy het groot lof vir haar werk gehad. Hy beskou dit dan ook as 'n ryke skat van didaktiese waarneming en analise in wiskunde. In 1973 beskryf Freudenthal die Van Hiele Model en sê onder andere:

When the Van Hieles started teaching they were just as unprepared as many other young teachers ...as time went on they got the opportunity of discussing their teaching ...and to reflection ...and observing ...and analyzed it. Thinking is continued activity, but there are relative levels. At the higher level, the acting of the lower becomes an object of analysis. That is what the Van Hieles recognized as a remarkable feature of the learning process. They transferred this feature to the learning process of pupils who were learning mathematics. There they discovered similar levels. To me this seems an important discovery (Freudenthal 1973: 121).

Volgens die model van die Van Hieles vorder leerders in meetkunde deur sekere denkvlakke. Dit begin met die mees basiese vlak waar leerders 'n visuele benadering tot meetkunde openbaar. Die leerders vorder dan verder deur gesofistikeerde denkvlakke van beskrywing, analise, abstrahering en bewysvoering (Nixon 2002: 51). Pierre van Hiele het die model soos volg bekendgestel:

You can say somebody has attained a higher level of thinking when a new order of thinking enables him with regard to certain operations, to apply these operations on new objects. The attainment of the new level cannot be effected by teaching, but still, by a suitable choice of exercises, the teacher can create a situation for the pupil favorable to the attainment of the higher level of thinking (Van Hiele 1986: 39).

### **2.2.1 Die oorspronklike Van Hiele Model**

Die Van Hiele Model is 'n onderrig- en leermodel vir wiskunde, en is oorspronklik vir meetkunde ontwikkel. Die onderwyser word in staat gestel om met 'n omvattende teorie wat vyf onderrigfases beskryf, die leerder se denke en insig in meetkunde te help ontwikkel. Die leerder beweeg in hierdie proses deur vyf geïdentifiseerde denkvlakke en ontwikkel nie alleen sy denkvermoëns nie,

maar verkry ook insig en begrip in wiskunde. Die volgende unieke eienskappe van die model kan uitgelig word:

- Volgens Van Hiele (1986: 49) is “...the most distinctive property of the levels of thinking, their discontinuity, the lack of coherence between their networks of relations (or structures)” (vgl. p. 20). Om die denkvlakke te kan identifiseer, sê hy, moet hierdie diskontinuiteite tussen die vlakke uitgewys word.
- Die denkvlakke volg mekaar hiërargies op. Van Hiele het dit hipoteties gestel en dit is bevestig deur Usiskin (1982) en Mayberry (1983: 67) dat leerder deur die denkvlakke in vaste volgorde moet beweeg, dit wil sê “...a student cannot be at Van Hiele level  $n$  without having gone through level  $n - 1$ ” (Usiskin 1982: 5). Vir leerder om dus na behore op een vlak operasioneel te wees, moet hy reeds die grootste gedeelte van die vorige vlak bemeester het (Land 1990: 28).
- Die proses om van een denkvlak na volgende denkvlak te beweeg is nie soseer afhanklik van ouderdom of biologiese ryphed nie, maar is eerder afhanklik van die wyse waarop leerervaringe aan die leerder gebied word (Van Niekerk 1997: 33). In Van Hiele (1986: 50) se eie woorde: “The transition from one level to the following is not a natural process; it takes place under influence of a teaching-learning program.” Van Hiele (1986: 39) verwys na die leerervaringe as “...suitable choice of exercises.”
- Elke vlak het sy eie taal. Dit beteken dat twee persone wat op verskillende vlakke operasioneel is, by mekaar verby sal praat. Hierdie kenmerk is in 1983 deur Mayberry in haar navorsing bevestig.
- Die vyf fases van onderrig maak dit wat implisiet was op die laer denkvlak, eksplisiet duidelik op die hoër denkvlak. “Concepts that are intrinsically understood at one level become extrinsic at the next, i.e. concepts the learner may not have known they had are manifested in an overt way” (Nickson 2000: 53).
- Nuwe denkvlak is nie iets wat deur die onderwyser aan die leerder geleer kan word nie, maar dit is moontlik vir die onderwyser om die leerder deur die gebruik van geskikte aktiwiteite te rig, om sodoende van een denkvlak na volgende denkvlak te vorder. Volgens hierdie model word op die kennis van die vorige vlak voortgebou (Van Hiele 1986: 39-46).
- Die logiese struktuur van meetkunde en die leerder se denke en insig in meetkunde-probleme is onafskeidbaar verweef. Van Hiele (1986: 5) skryf self: “I learned that insight might be understood as the result of perception of a structure.” Hy beskou die basis van sy teorie as samehang tussen die leergebeure en die logiese struktuur van meetkunde.

Meetkunde as wetenskap bestudeer nie slegs die ruimte en figure binne die ruimte nie, maar veral die verwantskappe tussen die figure, asook die relasies tussen die verwantskappe. Booyesen (1994: 149) merk op dat vir beginner in meetkunde hierdie konteks nog nie duidelik is nie, en noem as voorbeeld dat die gelykbenige driehoek vir die beginner slegs figuur is wat hy visueel beleef en as sodanig herken, soos wat hy olifant sou herken. Deur onderrig, wanneer die leerder die eienskappe en verwantskappe binne die figuur begin herken, verander sy persepsie van die driehoek egter en beweeg die leerder in hierdie proses na hoër vlak van denke. Die verskillende denkvlakke word vervolgens onder die loep geneem.

## 2.2.2 Denkvlakke

Alhoewel die denkvlakke in die VHM aansluiting vind by die teorieë van Piaget en Gagné, wys Land (1990: 24) op die volgende opmerking van Han (1986: 19):

A strength of the van Hiele theory is the detailed description of levels which can be directly employed in designing curriculum and instruction, while Piaget's theory is too general and Gagné's is too subjective to provide a specific guide for the design of curriculum and instruction.

Hier moet ook melding gemaak word van raakpunte met Bloom se taksonomie van onderrigdoelwitte en bemeesteringleer (kyk 4.4.2) en die raamwerk wat Van Hiele se denkvlakke en onderrigfases bied. Land (1990: 62) is van mening:

While Bloom's taxonomy of educational objectives for the cognitive domain and van Hiele's level framework, Bloom's mastery learning and van Hiele's phases of instruction share a kindred spirit, the van Hiele theory more operatively describes a student's hierarchical thought processes for a structured discipline.

Die Van Hieles (1986: 39-47) het aanvanklik vyf denkvlakke geïdentifiseer. Die denkvlakke word vervolgens saamgevat.

### 2.2.2.1 Die eerste denkvlak: Vlak 0 is die basisvlak van herkenning

Op hierdie vlak herken die leerder meetkundige figuur slegs visueel. Ons vind 'gestalt'-herkenning van figure, waar leerders entiteite soos kubusse en driehoeke as geheel herken, maar glad nie die eienskappe daarvan kan identifiseer nie. Hier vind slegs intuïtiewe waarneming van klasse van figure plaas. Hoffer (1988: 237) beskryf dit as holistiese vlak en die geassosieerde vaardighede van hierdie vlak is volgens Fuys, Geddes en Tischler (1988: 5) onder andere, "...the

student identifies, names, compares and operates on geometric figures e.g. triangles, ...parallel lines, according to their appearances.” Williams (1992: 336) noem ook as vaardighede, “ ...choosing examples from sketches or models of examples and non-examples.”

### **2.2.2.2 Die tweede denkvlak: Vlak 1 is beskrywend en analities**

Op hierdie denkvlak kan die leerders figure op grond van hul eienskappe herken. Die eienskappe word egter in isolasie, sonder enige verwantskap met mekaar onderskei (Williams 1992: 336). Deur eksperimentele waarnemings, soos meting, sketsing, papiervou, diagramme en modellering kan die leerder die eienskappe van figuur ontdek (Van Niekerk 1997: 35). Gelyksydige driehoek word as voorbeeld gebruik. Op hierdie denkvlak weet die leerder dat die sye van die figuur almal ewe lank is en dat die hoeke almal ewe groot is. Die leerder sal nooit weer twyfel oor die gelyksydige driehoek nie, maar sal dit uitken en herken aan die eienskappe daarvan, selfs al is die figuur versteek. Die leerder begin hier figure analiseer en mag verwantskappe tussen die komponente van figure onderskei, maar Hoffer (1988: 238) waarsku dat leerders op hierdie denkvlak “ ...at most, implicitly realize there are relationships among figures.” So kan leerder op hierdie vlak nie enige verwantskap tussen vierkante en reghoeke onderskei nie. Nixon (2002: 51) meld vervolgens ook dat die insluiting van onnodige inligting op hierdie vlak deur leerders tydens definiëring plaasvind. Die vaardighede wat met hierdie vlak geassosieer kan word, sluit in die beskrywing van figure in terme van komponente soos byvoorbeeld die kleinste hoek,  $90^\circ$  hoek of gelyke sye.

### **2.2.2.3 Die derde denkvlak: Vlak 2 behels ordening en rasionalisering**

Op hierdie vlak kan formele definisies deur leerders begryp en gebruik word. Dit gaan op hierdie vlak om die logiese samehang en ordening tussen die eienskappe van figuur. In die voorbeeld van die gelyksydige driehoek kan die leerder nou tot die gevolgtrekking kom dat hoeke gelyk is, wanneer sye ewe lank is, en omgekeerd. Op hierdie vlak sê Nixon (2002: 52) kan leerders ook die verwantskap tussen eienskappe van verskillende figure verstaan soos byvoorbeeld dat vierkant oor al die eienskappe van reghoek beskik en gevolglik ook op sigself reghoek is. Die insluiting van klasse van figure word vir die leerder op hierdie denkvlak duidelik soos byvoorbeeld dat vierkant reghoek is, wat op sy beurt weer parallelogram is en wat op sy beurt weer vierhoek is. Mayberry (1983: 59) wys daarop dat alhoewel logiese beredenering van die “if-then” samehang



verstaan en die klasse-insluiting begryp word, die leerder nog nie die rol en betekenis van formele deduksie begryp nie. Leerders beskik dus nog nie oor die vaardigheid van bewysvoering nie.

#### **2.2.2.4 Die vierde denkvlak: Vlak 3 waar afleidings of formele deduksie plaasvind.**

Hier kan leerders die verwantskappe tussen verskillende stellings, die rol van aksiomas en die bewys van stellings, asook die belangrikheid van afleidings, verstaan. Volgens Booysen (1994: 151) kom deduktiewe redenering en die ontwikkeling van aksiomatiese sisteem binne die meetkunde hier na vore. Leerders kan ook onderskei tussen ‘nodig’ en ‘voldoende’. As leerder byvoorbeeld gevra word om te bewys dat die ingeskrewe hoek van gegewe boog op sirkel, die helfte van die grootte is van die sentrale hoek wat deur dieselfde boog onderspan word, kan die leerder dit doen deur vanaf die gegewe, logiese uitsprake te maak wat die gevolgtrekking regverdig.

#### **2.2.2.5 Die vyfde denkvlak: Vlak 4 word genoem rigorisme**

Hierdie vlak kom nooit binne die sekondêre skoolfase voor nie en soos Hoffer (1988: 239) dit stel “This is the most *rigorous* level of thought- the depth of which is similar to that of a mathematician.” Op hierdie denkvlak word dit duidelik dat Euklidiese meetkunde maar een van verskeie maniere is om abstrakte matematiiese stelsel te beskryf. Clements en Battista (1992: 425) vat dit saam in neutedop:

As this description indicates, the levels move from:

0. The visual
1. to the descriptive and analytic,
2. to the abstract and relational. This is the theoretical level with logical relations, geometry generated according to Euclid,
3. to formal deduction; a study of the laws of logic, and finally,
4. to a level characterized as mathematical and involving rigor; the nature of logical laws.

Navorsing (Land 1990: 99) het getoon dat dit blyk dat leerders nie soseer op diskrete denkvlakke beweeg nie, maar eerder by wyse van spreke, tussen aangrensende denkvlakke ossilleer en selfs teruggaan na die basisvlak wanneer hul met nuwe meetkundeprobleem gekonfronteer word. En

van Hiele (1986: 41) self het op stadium gesê: “Tracing of the levels of thinking that play a part in geometry is not a simple affair, for the levels are situated not in the subject matter but in the thinking of man.” Alvorens die onderrigfases kortliks bespreek word, moet ons eers let op die klem wat Van Hiele op struktuur plaas. Vir Van Hiele is struktuur baie belangrik, aangesien dit verband hou met die didaktiese leergebeure, en soos hy dit stel:

Some psychologies lay much stress on the learning of facts. The learning of structures, however is a superior goal. Facts very often become outmoded; they sink into oblivion because of their lack of coherence. In a structure facts have sense, if a part of structure is forgotten, the remaining part facilitates recall of the lost one. It is worth studying the way structures work because of their importance for the process of thinking (Van Hiele 1986: viii).

In die Van Hiele Model beskik elke denkvlak, behalwe die basisvlak, oor netwerk van verwantskappe, naamlik struktuur (kyk par. 2.3.2: vertikale matematisering). Volgens Van Hiele verkry leerder insig in meetkunde wanneer hy hierdie struktuur kan waarneem (“perceive”); kan uitbrei; in besonderhede kan ondersoek en groter omvattender struktuur kan visualiseer. Eers dan is hy gereed om na die volgende vlak van denke te beweeg. Van Hiele (1986: 6) druk homself soos volg uit: “Structure is what structure does. First see how structure works, and afterwards you will understand what structure is.” Van Hiele (1986: 39-47) sê verder dat die potensiaal van die leerder vermeerder is omdat hy hoër vlak van denke bereik het. Die leerder kan nou met beter insig die groter struktuur onderskei. Die leerder mag dalk die wiskunde-inhoud oor spesifieke onderwerp vergeet, maar dit is baie onwaarskynlik dat hy weer sal terugval na laer denkvlak. In hierdie benadering word die onderrig van meetkunde geskoei op die beginsel van progressiewe matematisering soos uiteengesit deur Treffers (1987: 248) (kyk par. 2.3.2).

### **2.2.3 Onderrigfases**

Volgens Van Hiele (1959: 247) hang die vordering wat leerder van een denkvlak tot volgende denkvlak maak, nie soseer af van sy biologiese ontwikkeling of volwassenheid nie. Vir Van Hiele is die onderrig- en leergebeure eerder die bepalende faktor. Omdat die denkvlakke hiërargies op mekaar volg, moet die leerders die denkvlakke ordelik deurloop. Wanneer leerder die een denkvlak bemeester het, moet die onderwyser die nodige aktiwiteite voorsien om die leerder na die volgende denkvlak te lei (Nixon 2002: 53). Op grond van hulle navorsingseksperimente het die Van Hieles onderrigprogram ontwikkel wat uit vyf onderrigfases bestaan. Nixon (2002: 57) wys

op die invloed wat Dienes (1916- ) se raamwerk op die Van Hiele Model het en noem dat eersgenoemde ses onderrigfases identifiseer. Dienes beweer ook verder dat die leergebeure in wiskunde nie regtig leersituasie van stimulus en respons is nie, want, sê hy, “ ...the accent in mathematics is more on structure and less on content” (Dienes 1968: 19). Dienes se teorie leun swaar op struktivisme as sodanig en Land (1990: 79, 97) verwys daarna as “ ...the constructivity principle which states that experiences should be ordered to effect construction of a concept in a student.” Ons vind hier wisselspel (“interplay”) tussen struktivisme en konstruktivisme (kyk par. 2.4 en 4.4.3.2). Dienes se teorie leun egter meer oor na struktivisme, terwyl Van Hiele se teorie ruimte tot vernuwing na konstruktivisme bied.

In die Van Hiele se onderrigprogram vind die onderrig tussen elke oorgang van een denkvlak na volgende denkvlak, in vyf fases plaas. Soms moet hierdie vyf fases herhaal word, indien leerder nog nie die volgende vlak van denke bereik het nie. Vir elke nuwe onderwerp of elke nuwe afdeling van wiskunde moet hierdie vyf fases deurloop word (Booyesen 1994: 151). Die vyf fases kan kortliks soos volg opgesom word (Van Hiele 1959: 243-252; 1986: 53-57 en Van Hiele-Geldof 1958: 218-223):

### **2.2.3.1 Fase 1: Inligting**

Dina van Hiele-Geldof (1958: 217) beskou hierdie fase as vasstelling van die voorkennis van die leerders. Tydens klasgesprek tussen die onderwyser en leerders word sorgvuldig voorafgekose materiaal, vrae en woordeskate aan leerders oorgedra, terwyl die onderwyser beoordeel hoe leerders daarop reageer en dit interpreteer. Die onderwyser stel dan vas hoeveel die leerders alreeds van die onderwerp af weet (Booyesen 1994: 151). Terselfdertyd egter word die leerders in hierdie fase bekendgestel aan die terrein van die onderwerp. Die leerders word van inligting en materiaal voorsien, “ ...to bring them to purposeful action and perception” (Van Hiele-Geldof 1958: 223). Die materiaal wat aan die leerder voorsien word is belangrik, aangesien dit die leerder help om sekere struktuur waar te neem (Van Hiele PM 1959: 24). Verder noem Fuys *et al.* (1988: 7) dat voorbeelde en teenvoorbeelde tydens hierdie onderrigfase nuttig is.

### **2.2.3.2 Fase 2: Gerigte oriëntasie**

Met behulp van die hantering van die materiaal word die leerders nou vertrouwd gemaak met

meetkundige idees. Vir Dina van Hiele-Geldof (1958: 219) is manipulasies van geskikte konkrete materiaal hier prominent. Die materiaal word so gekies dat die karakteristieke struktuur van die studie-onderwerp vir die leerder geleidelik duidelik word. Die rol van die onderwyser is steeds belangrik. Hy rangskik aktiwiteite sodat spesifieke response (uitkomste) bereik word en volgens Van Hiele (1986: 53) “...pupils are guided by tasks.” Die doel is om leerders met die belangrikste strukture van die onderwerp bekend te maak. Fisiese hantering van konkrete materiaal is hier van groot belang en dit vorm die basis van die denke van die volgende vlak. Dina van Hiele-Geldof beklemtoon die belangrikheid dat leerders gedurende onderrigfase twee toegelaat moet word om foute te maak, maar dat foute-analise onmiddellik daarna moet plaasvind. Die aktiwiteite wat hier ter sprake is, sluit in vou, uitknip, meet en soeke na simmetrie (Fuys *et al.* 1988: 7).

### **2.2.3.3 Fase 3: Eksplisitering**

Deur middel van klasgesprekke word die strukture van die vorige fase eksplisiet ondersoek. Die relasienetwerk van die onderwerp binne die meetkunde begin reeds op hierdie vlak ontwikkel. Die leerders word nou bewus van die verwantskappe en begin uitbrei op hul intuïtiewe kennis. Hulle beskryf die verwantskappe in hulle eie taal en word ook terselfdertyd gereed om die tegniese wiskundige taal van die onderwerp aan te leer. Die resultate van die vorige fase se manipulasies word nou in woorde weergegee (Van Hiele-Geldof, D 1958: 219). Die onderwyser tree op die agtergrond, terwyl die leerders hul handeling met mekaar bespreek. Die onderwyser se rol is om die nodige tegniese woorde en simbole te voorsien en om die meetkundige onderwerp, verwantskappe en patrone tot eksplisiete vlak van bewuswording te lei (Van Niekerk 1997: 37). Fuys *et al.* (1988: 7) noem as voorbeeld vir hierdie fase “...the learner expresses ideas about properties of figures.”

### **2.2.3.4 Fase 4: Vrye oriëntasie**

Gedurende hierdie fase is die onderwyser se rol om geskikte materiaal en meetkundige probleme te voorsien. Take met heelwat stappe of verskeie oplossings word nou aan die leerders gegee. Die onderwyser moet terme, konsepte en verbandhoudende oplossingsprosesse voorsien. Die leerders werk in groepe of as individue. Genoegsame opdragte bied geleentheid om die wye studieveld van die onderwerp te verken, sodat die leerders werklik vertrouwd kan raak met die gekose studieveld.

Soos Treffers (1987: 244) tereg opmerk: “...free exploration of the field in question by using the now available means of organisation.” Leerders leer hier om vinnig keuse te maak tussen verskillende oplossingsmoontlikhede. Die leerders leer om hulself binne die netwerk van relasies te oriënteer. Fuys *et al.* (1988: 7) gee as voorbeeld vir hierdie fase “...knowing properties of one kind of shape, investigates these properties for a new shape, such as kites.”

### **2.2.3.5 Fase 5: Integrasie**

Die onderwyser help die leerders om die studieveld te hersien en die werk saam te vat en om geheelbeeld te vorm. Die leerders kan die kennis wat hulle opgedoen het, nou in die praktyk toepas. Hulle kan ook die verskillende netwerke in die onderskeie taal beskryf en is nou in posisie om na die volgende denkvlak gelei te word. Treffers (1987: 244) som hierdie fase soos volg op: “...and, finally condensing the learned matter and fitting it into the total inventory of knowledge, abilities and insight.”

### **2.2.4 Die hersiene Van Hiele Model**

Dit was mettertyd vir Van Hiele duidelik dat elke denkvlak oor taal van sy eie beskik, en hy maak (1986: 40) die volgende opmerking: “Later, especially with the collaboration of J. De Miranda, I came to understand that a new language was involved.” Omdat elke denkvlak oor taal van sy eie beskik, is dit van die uiterste belang dat die onderwyser en die leerder dieselfde taal op vlak moet besig. Hierdie taalaspek was juis een van die veranderinge wat deur Van Hiele aan sy teorie gemaak is (Van Hiele 1986: 39-47). In Suid-Afrika, sê Wessels (2002: 15), was die belangrikste rede waarom Euklidiese meetkunde onderrig vir alle bevolkingsgroepe in ons land tot katastrofe gelei het, juis die feit dat onderwysers en leerders meestal op verskillende denkvlakke operasioneel was. Van Hiele (1986: 6, 40) gee erkenning aan H.J. De Miranda, skeikundige wat die Van Hiele-model op skeikunde van toepassing gemaak het en baie daartoe bygedra het om die Van Hiele Model te help uitbou. Dit was dan ook De Miranda wat bevind het dat drie denkvlakke voldoende is om die diskontinuiteite in die leergebeure uit te wys. Booysen (1994: 155-163) verwys na die samehang tussen denke, struktuur, taal en die vlakke in die hersiene model en noem dat die vyf denkvlakke verminder word na drie, naamlik die visuele, die beskrywende en die teoretiese vlakke. Die oorspronklike vlakke 2, 3 en 4 is saamgevoeg in enkele vlak, naamlik die teoretiese vlak.

1. Die *visuele vlak* is gebaseer op nie-verbale denke en waarneming. Die ruimte word waargeneem soos dit beleef word. Taal kan aan hierdie waarnemings naam gee en so kan taal ontwikkel, wat dan beskikbaar is vir die beskrywing van eienskappe op die beskrywende vlak. Interessante feit in die verband is dat Pontjragin wat blinde wiskundige was, nie met fisiese oë die ruimte kon waarneem nie, en tog het hy as wiskundige op sensories-motoriese wyse hierdie denkvlak beleef .
2. Die *beskrywende vlak* berus op verbale denke en die taal vloei nie outomaties voort uit die taal van die visuele vlak nie, want daar is verskillende moontlikhede van beskrywings. Die netwerk van verwantskappe (die struktuur, vgl. p. 12) van die beskrywende vlak is anders as dié van die visuele vlak. Hier is die netwerk afhanklik van konstruksie en gevolglik kom daar minder misverstande voor. Konsepte op hierdie vlak is egter nie onfeilbaar nie, en dit kan gebeur dat veranderings aangebring mag word.
3. Die *teoretiese vlak* op sy beurt beskik weer oor ander taal en struktuur as die beskrywende vlak. Hierdie vlak is veral van belang vir wiskunde, fisika en rekenkunde. Die struktuur is baie meer rigied en kan maklik in teorie ontwikkel. Die meeste verwantskappe binne die netwerk van hierdie vlak kan in terme van taal en wiskundige simbole uitgedruk word.

Elkeen van die vlakke word van mekaar geskei deur leerperiode waarin onderrig gebaseer op die vyf onderrigfasies soos hierbo vermeld, leerders in staat stel om na die volgende vlak te beweeg. Vir die doel van hierdie navorsing sal die oorspronklike vyf denkvlakke (0 tot 4) soos reeds bespreek, as verwysingsvlakke gebruik word en ook daarna verwys word as die eerste tot die vyfde denkvlakke (vgl. p. 34). Omdat daar in grade R tot 9 hoofsaaklik van die eerste drie denkvlakke sprake is, word daar in hierdie navorsing hoofsaaklik op die eerste drie denkvlakke gekonsentreer.

## **2.3 Die didaktiese fundering van die Van Hiele Model**

### **2.3.1 Inleiding**

Volgens Mayberry (1981: 22-26) kan die wortels van die Van Hiele Model nagespoor word tot in die epistemologiese aspekte van Plato se denkskool. Die klem wat Van Hiele plaas op insig en struktuur en sy benadering tot die onderrig- en leergebeure sluit volgens Mayberry sterk aan by die teorieë van Gagné, Hegel, Dewey, Piaget en Bruner, asook by konstruktivisme. Land (1990: 75) noem dat die onderrig- en leergebeure van die VHM vergelyk kan word met “...the principle of

consecutive phases of Polya (1988), with the learning cycle of Dienes (1968), and with the (recent) dynamics of mathematical thinking of Burton (1984).” Volgens Land (1990: 84) plaas nie net Van Hiele baie klem op *struktuur* nie, maar so ook Dienes en Bruner. Verder bevind Land, netsoos Hoffer (1983), onderliggend in al bogenoemde voorstelle tot die onderrig- en leergebeure gemeenskaplike faktor, naamlik, “ ...the *spiraling manner* in which ideas are generated, refined, and extended by the students.” So stel Bruner (1960: 176) byvoorbeeld spiraalgebaseerde kurrikulum voor, waar sentrale tema vertikaal oor die grade heen onderrig moet word wat onder andere lei tot die *bemagtiging* van die leerder “ ...knowing today that you have more power and control and mastery over a subject than you had last year.” Volgens Cowan; Morrison en McBride (1998) stel Bruner spirale kurrikulum voor, “ ...whereby students are ‘scaffolded’ to higher and higher levels of generalization by revisiting a problem on multiple occasions, each time with an increased understanding of the task at hand.” Van Hiele (1986: 45) lê ook klem op hierdie spirale eienskap in die onderrig- en leergebeure en verwys daarna as “telescoped reteaching.” Die didakties-opvoedkundige begronding van die VHM sluit ten nouste aan by al bogenoemde voorstelle tot die onderrig- en leergebeure, maar word as ‘vernuwe’ ten beste ten toongestel binne die sogenaamde *realistiese benadering* tot onderwys.

### 2.3.2 Die realistiese benadering tot onderrig

Deesdae bestaan daar wye verskeidenheid van verskillende benaderings ten opsigte van die wyse waarop wiskunde in skole onderrig kan word. So is daar byvoorbeeld die probleemoplossingsbenadering, die uitkomsgebaseerde benadering en die realistiese benadering. Van Niekerk (1997: 39-40) en Treffers (1978: 245) wys daarop dat gedurende die tydperk toe die Van Hieles hul teorie bekend gestel het, die klem in wiskundeonderwys nie op vraagstukke soos wiskunde vir almal, of meetkundeonderrig vir die laerskool, geval het nie. Aan die einde van die sestigerjare het hierdie vraagstukke egter al hoe meer op die voorgrond getree en het die Wiskobasgroep in Nederland besef dat die VHM soos dit in 1958 deur die Van Hieles beskryf is, sekere didaktiese vrae nie doeltreffend beantwoord nie. Van Niekerk (1997: 39) formuleer hierdie didaktiese vrae as volg:

- How to shape concretely the phenomenological exploration at the first level?
- Which didactical acts should be performed to raise the pupils as efficiently as possible from one level to the next?

Die skoolkurrikulum in Nederland is gefundeer op die realistiese benadering tot onderwys wat beide bogenoemde vrae doeltreffend beantwoord. Die Nederlanders het daarin geslaag om hulle wiskundekurrikulum ten volle op die werklikheid te grondves en volgens Wessels (2001: 2) is hierdie onderwysstelsel gebou “ ...on a solitary didactical foundation.” Treffers (1987: 294) beskryf in sy navorsing die realistiese benadering baie volledig en meld ook dat die teoretiese onderbou van die Van Hiele Model gesien moet word teen die agtergrond van Dienes se leersiklusse, die teorieë van Piaget en Bruner asook Freudenthal se didaktiese fenomenologie.

Die wiskundige Hans Freudenthal (1905-1990) kan beskou word as die stigter van die realistiese wiskundeonderwys en volgens sy siening is wiskunde menslike aktiwiteit en moet wiskundeonderrig *herontdekking* of te wel “ ...a guided reinvention” vir die leerder wees (Freudenthal 1973: 130). Freudenthal is van mening dat die leerder nie die finale wiskundige strukture, wat alreeds deur wiskundiges oor die jare heen daar gestel is, moet bestudeer nie, maar dat die leerder eerder self die wiskunde-konsepte moet herontdek. Om hierdie konsepte te herontdek, behoort die vertrekpunt, die realiteit en die alledaagse leefwêreld van die leerder te wees. Volgens Freudenthal “ ...the phenomena by which the concepts appear in reality should be the source of concept formation” (Treffers 1987: 241). Hierdie beginsel van matematiese herontdekking tydens die leerder se denkproses, asook die *realiteitsbasis* wat as uitgangspunt gebruik word, kan sterk met die denkvlakke van die Van Hiele Model geassosieer word. So het Dina van Hiele-Geldof (1957: 207) byvoorbeeld haar proefskrif beskryf as *ondersoek na die didaktiese moontlikhede in meetkundeonderrig*

...where the child is given *concrete material* in a systematic way so as to unfold *visual thinking* and to transform it in the abstract way of thought which the logical system of geometry demands.

Volgens haar moet daar op die leerder se vorige ondervindinge gebou word en gebruik gemaak word van die eeue-oue didaktiese beginsel waar daar vanaf die bekende na die onbekende beweeg word. Nixon (2002: 67) wys daarop dat *visualisering* tydens wiskundeonderrig vir Freudenthal belangrik is en dat Freudenthal (1991: 56) self voorstel dat die gebruik van konkrete, en as dit moontlik is, visuele situasies as *wiskundeonderrig* beginsel toegepas behoort te word. Die uitsprake van Freudenthal het aanleiding gegee tot die volgende uitgangspunte van die realistiese benadering in wiskundeonderwys, wat Treffers (1987: 241-242) soos volg saamvat:



1. Gee baie aandag aan *herontdekking* van wiskunde-konsepte en strukture op die basis van intuïtiewe begrippe of idees op *aktiewe* grondslag.
2. Onderrig en leer vind plaas op verskeie vlakke van *konkrete* sowel as *abstrakte* vlakke
3. Die program van onderrig word gerig deur vertikale beplanning dit wil sê vanuit die historiese perspektief van wiskunde, eerder as deur “ ...the subject matter systematic method.”
4. Gebruik *realiteitsgebonde* en beduidende, dit wil sê, wiskundigryke onderrig.

Genoemde uitgangspunte plaas die realistiese benadering sterk binne teoretiese raamwerk van die onderrigteorie. In hierdie benadering word die onderrig van meetkunde geskoei op die beginsel van progressiewe matematisering. Hierdie proses van matematisering is een van die belangrikste pilare van die realistiese benadering en Streefland (1993) verduidelik dat die konsep van progressiewe matematisering uit twee komponente bestaan, te wete: “ ...horizontal, that is, from the world in which the learner lives to what is still a world of symbols to him; and vertical, that is within the world of symbols.” Progressiewe matematisering word horisontaal en vertikaal gerig deur vyf onderrigbeginsels wat logies met die denkvlakteorie en die didaktiese fenomenologie verband hou (Treffers 1987: 248). Die didaktiese karakter van die vyf onderrigbeginsels kom kortliks op die volgende neer: Nickson (2000:1-5) en Treffers (1987: 223):

1. Die bron van konsepvorming is realiteit. Probleme in konteks speel belangrike rol -as bron vir konsepvorming en ook as terrein vir toepassings. In die fenomenologiese verkenning vind die wiskunde-aktiwiteite plaas binne konkrete konteks. Konsepte en strukture word sodanig verken, dat ryke basis van intuïtiewe begrippe of idees op aktiewe grondslag gevorm word.
2. Oorbrugging deur vertikale instrumente. Vertikale instrumente word beskou as *modelle*, *skemas*, *diagramme* en *simbole* wat deur die onderwyser aan die leerder gebied word om te verken en te ontwikkel. Die oogmerk is om die informele, intuïtiewe konteks van die eerste denkvlak te oorbrug na die meer reflektiewe, formele en sistematiese derde denkvlak. Leerders se intuïtiewe en informele aktiwiteite word hierdeur getransformeer na reflektiewe en meer formele aktiwiteit. Daar word dus geleidelik in stap vir stap patroon progressief gematematiseer. Die som van die horisontale komponente verteenwoordig die reële situasies, terwyl die vertikale komponente die meer formele, sistematiese kennis en vermoëns weergee. Die leerders speel belangrike rol in die verwerking van die kurrikulum deurdat hulle *self*

*probleme kan formuleer en oplossings kan konstrueer.* Verder moet die verskillende werktuie wat tydens die proses gebruik word soos om wiskundige simbole te verstaan, diagramme, skemas en visuele modelle te ontwerp en te gebruik, hul oorsprong hê in die behoefte om te verduidelik en om dit wat leerders vir hulself uitgevind het te kan gebruik.

3. Leerders se eie konstruksies en pogings. Die leerders moet konkrete konstruksies en produkte na vore bring en self die onderliggende reëls en wetmatighede kan ondersoek en ontdek. *Leerders moet self matematiseer.* Matematisering word gesien as die doel van wiskundeonderrig en behels die soeke en oplos van probleme binne georganiseerde wiskunde-inhoud. Matematisering kan gedoen word binne wiskunde as dissipline of binne die realiteit van alledaagse probleme en situasies.
4. Die *interaktiewe karakter* van die onderrig- en leergebeure. Die leergebeure moet interaktief wees sodat leerders tydens die konstruktureringsproses saam oor die werk moet besin en saam besprekings hou. Leerders moet onderling kan kommunikeer, gedagtes, begrippe en idees kan uitruil.
5. *Integrering.* Vaardighede, algoritmes, begrip en insig moet saam met verskeie lyne of “strands” eenheid in die onderrig- en leergebeure vorm. Verskillende lyne van leer (bv. breuke; verhoudings en meetkunde) moet verstrengel word sodat beide horisontale en vertikale matematisering kan plaasvind. Die integrering en strukturering help om konseptuele insig en begrip te bou.

Gravemeijer, Cobb, Bowers en Whitenack (2000: 225) wys op die klemverskuiwing wat daar die laaste aantal jare ten opsigte van die begrip *wiskundeleer* ontstaan het. Huidige tendense wil dit hê dat wiskundeleer nie meer slegs beskou moet word as die individuele ontwikkeling van die leerder nie, maar dat wiskundeleer inderwaarheid beskou moet word as inherente sosiale en kulturele aktiwiteit. Hierdie beskouing hou sekere implikasies vir die teorieë van onderrigmodelle in en Gravemeijer *et al.* (2000: 225-273) is van mening dat in onderrigmodel albei komponente aandag moet geniet, naamlik, individuele ontwikkeling en die sosiale klaskamerpraktik. Hulle wys daarop dat die horisontale en vertikale matematisering van die realistiese benadering hierdie tweeledige aspek kan aanspreek en sê “It is important to note that reinvention is a collective as well as an individual activity” (Gravemeijer *et al.* 2000: 237). In die geval van horisontale matematisering wys Gravemeijer *et al.* (2000: 238) die rol van die sosiale klaskamerpraktik uit en sê onder andere:

the classroom community develops informal, taken-as-shared ways of speaking, symbolizing, and reasoning as the students attempt to mathematize starting-point problems.

In Dina van Hiele-Geldof se didaktiese eksperiment het die leerders saam besluit op die begrippe “saws and ladders” ( kyk par. 3.6.1: Onderrigfases 2 en 3) en Retha van Niekerk (1997: 274-275) het in haar navorsing opgemerk met watter gemak leerders tussen die spreektaal “ ...a fish caught in a net” na die vak-spesifieke taal “ ...the net of the cube consists of six similar squares linked together”, kon beweeg.

Hierdie spanning tussen wat Meira (1995: 270) noem die leerder se interne (kognitiewe) asook eksterne (kultuurgebonde notering en simbolisering) prosesse, kom veral in aktiwiteitsgebaseerde wiskundeonderrig na vore. In die oorbrugging na vertikale matematisering wys Gravemeijer *et al.* (2000: 238-239) op die voordeel wat die realistiese benadering inhou aangesien veronderstelde leertrajekte eksplisiet deur “ ...instructural activities, instructional sequences and local instruction theories” geformuleer kan word. Onderwysers kan hierdeur die aktiwiteite vir die klaskamer en vir die individuele leerder skeduleer, en Gravemeijer *et al.* (2000: 270) sluit af met

this dual focus on communal norms and practices and on individual students’ socially situated mathematical understanding is a major strength of RME design theory.

Bogenoemde klemverskuiwing is egter nie die enigste verandering wat wiskundeonderwys die afgelope twee dekades ondergaan het nie. Wiskundeonderwys het die afgelope aantal jare deur wêreldwye vernuwingsproses gegaan wat ingrypende veranderings en klemverskuiwings in kurrikula van die meeste wêreldlande tot gevolg gehad het. Van hierdie veranderings reflekteer ten nouste op die VHM en moet vervolgens kortliks hier bespreek word.

## **2.4 Klemverskuiwings**

Benewens die vereistes wat die unieke kenmerke van die VHM en die didaktiese onderbou soos hierbo bespreek vir die kurrikulum inhou, stel die volgende klemverskuiwings in wiskundeonderwys, verdere vereistes aan die kurrikulum.

### 2.4.1 Betekenisvolle aanpassings in meetkundeonderwys

Soos reeds in par. 2.3.2 aangedui, is daar verskeie benaderings tot wiskundeonderrig wat almal op die een of die ander wyse by die VHM aansluiting mag vind. Vir die doel van hierdie studie word daar gelet op die VHM se aansluiting by die konstruktivistiese benadering tot leer, aangesien dit sterk element in die Suid-Afrikaanse kurrikulum is (kyk par. 4.4.3.2). Die probleemgesentreerde benadering tot onderrig wat gebaseer is op 'n konstruktivistiese benadering tot leer, is daarop gemik dat leerders wiskunde (en meetkunde) deurgaans as sinvol sal ervaar en dit werklik sal begryp. Probleemsituasies wat vir die leerder sinvol is, word telkens as die vertrekpunt vir nuwe werk gebruik, en verskaf dan ook konteks waarbinne wiskundige begrippe, prosedures en notasiewyses sinvol beleef kan word. Die fokus val op die leerder se eie pogings om konsepte te verstaan en betekenis daaraan te gee. Die sosiale interaksie tussen leerders onderling, asook tussen leerders en onderwyser word sterk beklemtoon. Volgens Murray *et al.* (1993: 195-196) is die rol van die sosiale interaksie in die probleemgesentreerde benadering onder andere om aan leerders die geleentheid te gee om

- oor hul denkwyses te praat en daaroor te reflekteer,
- met mekaar te rededeneer en te kommunikeer,
- uit hul eie konstruksies en die van mede-leerders te leer,
- met die onderwyser te kommunikeer.

Wat betref die ontwikkeling van leerder se ruimtelike vermoëns word Van Niekerk (1997: 56) as volg aangehaal:

There is ample evidence in literature and research that supports a constructivist/problem-centred approach on how young children learn and should be taught spatial/geometric ideas.

Die navorsers van die Oregon-projek in die Verenigde State van Amerika het die volgende belangrike aanbeveling gemaak. Burger en Shaugnessy (1986: 46) wat deel was van genoemde projek, rapporteer dat daar eenparig deur die onderhoudvoerders besluit is dat:

...the van Hiele model of development in geometry may well serve as a basis for constructivist teaching experiments in geometry, as described by Cobb and Steffe.

Nickson (2000: 54) som die verband tussen konstruktivisme, Van Hiele en Piaget soos volg op:

The constructivist perspective of the learning of spatial concepts and skills which build upon the Piagetian view of children's development of spatial concepts has much in common with the Van Hiele theory of levels of development. Perceptual vision is first of all seen to be constructed

through the early sensory-motor exploration by the child of the environment (hence manipulatives are as central to this view of spatial development as they are to the progression through the van Hiele levels).

Verdere vernouwing in wiskundeonderwys, wat nie in Van Hiele se tyd (1958) onderwyskwessie as sodanig was nie, is dat meetkunde reeds op Laerskool onderrig moet word.

#### **2.4.2 Meetkunde moet vanaf graad R tot graad 12 onderrig word**

Hierdie is aspek wat wêreldwyd in die laaste aantal dekades ondersoek is. Die Russe het hierin die voortou geneem en reeds van so vroeg as 1968 word meetkunde in Russiese skole vanaf graad R onderrig. Die Van Hiele Model is ook in daardie jaar, onder leiding van die Russiese navorser A. M. Pyshkalo op die Russiese meetkundekurrikulum van toepassing gemaak. Volgens Booyesen (1994: 189) het die Russe fundamentele beginsel in die onderrig van meetkunde wat onder andere deur die wêreldbekende psigoloog Piaget beklemtoon is, aanvaar, naamlik dat

...traditional geometry instruction begins too late and then takes up measuring right away, thus omitting the qualitative phase of transforming spatial operations into logical ones (Wirszup 1974: 3).

Nadat die navorser A.M. Pyshkalo in 1959 te Parys na Van Hiele se toespraak getiteld: “La pensée de l’enfant et la géometrie” geluister het (Land 1990: 42), is daar onder leiding van Pyshkalo agtjaarprogram in die onderrig van meetkunde in Russiese skole begin, waarin intensief gebruik gemaak is van Van Hiele se idees soos vervat in sy 1959-voordrag (Booyesen 194: 190). Die Russe het Van Hiele se denkvlakke eksperimenteel nagevors en geverifieer en in Russiese skole word meetkunde sedertdien met sukses vanaf graad R tot graad 12 onderrig. Aan die einde van die agtjaarprogram het Pyshkalo die resultate soos volg weergegee:

Our data enable us to establish criteria for choosing geometry material such that by the end of grade 3, *all* pupils could reach the second level (Van Hiele level 1) of geometric development, having establish a sufficiently stable stock of geometric notions. This permits them to advance to a higher stage in the study of geometry by grades 4-5 (Hoffer 1983: 210).

Die res van die wêreld het eers later, in die sewentiger- en tagtigerjare op die VHM gereageer en stortvloed navorsingsprojekte is wêreldwyd die lig laat sien. In die Verenigde State van Amerika byvoorbeeld is die VHM deur drie groot navorsingsprojekte, te wete die Oregon-, Brooklyn- en Chigago- projekte ondersoek. Prominente vraag onder die navorsers was “Should we change the

way we teach geometry?" Dit is met oorweldigende **Ja** bevestigend beantwoord. Die woorde van Burger en Shaughnessy (1985: 427) wat aan die Oregon-projek verbonde was is hier ter sprake:

Geometry must be given serious attention throughout school mathematics. Reasoning about geometric shapes is a basic skill just as much as arithmetic computation and the study of geometric concepts has a high payoff for problem solving as does arithmetic computation. We should develop informal geometry parallel to the development of number concepts throughout a student's school years, not much later as we do now!

Vir die Suid-Afrikaanse konteks het Booysen (1994: 275-295) in haar studie riglyne opgestel waarvolgens die VHM in Suid-Afrikaanse skole vanaf graad R tot 12 geïmplementeer kan word en Van Niekerk (1997) in haar navorsing vind ondersteuning hiervoor en sê onder andere:

Navorsers en opvoedkundiges is in ooreenstemming dat die ontwikkeling van die ruimtelike vermoëns van jong leerders, reeds in aanvang moet neem in die beginjare van laerskool (Van Niekerk 1997: v).

Die volgende aspek wat ten nouste met die VHM aansluit en wat dikwels in die literatuur gevind word, is die ontwikkeling van die ruimtelike vermoëns van leerders en in die besonder die impak van 3D 2D transformasies.

### **2.4.3 Die 3D 2D Transformasies**

Die Russiese navorser, Yakimanskaya (1991: 26) gee die volgende definisie van ruimtelike denke:

Spatial thinking is a specific type of mental activity which is manifested in solving problems that require an orientation in physical and mental space (both visible and imaginary).

Retha van Niekerk (1995, 1996a, 1996b, 1997) wat die ontwikkeling van die ruimtelike vermoëns van leerders deeglik vir die Suid-Afrikaanse konteks nagevors het, sluit by Yakimanskaya aan en meld dat die ruimtelike ontwikkeling van die leerder nie net afhang van die begryp van vorme nie, maar ook van die posisionering in die ruimte en die leerder se vermoë om na voorwerpe in die ruimte te kan kyk en dit raak te sien. Sy onderskei dus drie raakpunte: vorm, posisie en visie. Sy bepleit ook verder dat

- die ruimtelike ontwikkeling van die leerder deel moet uitmaak van skoolkurrikula, en
- dat meetkunde op intuïtiewe basis met voorwerpe en ondervindige uit die leerder se werklike leefwêreld, reeds in die laerskool onderrig moet word.

Booyesen (1994: 134) stel voor dat daar geskikte meetkunde binne kurrikulumverband vir jong leerders ontwikkel moet word, wat aansluiting kan vind by die ruimtelike ontwikkeling van die

leerder. Dit moet ontwikkel word vanuit die intuïsie deur eksperimentele aktiwiteite wat beweging of transformasie insluit. Dit sou aanleiding gee tot die bekendstelling van transformasiemeetkunde wat rotasies (draaie), refleksies (weerspieëlings), verskuiwings (verplasings), en simmetrieë insluit. Daarom die belangrikheid van 3D – 2D transformasies.

Alhoewel die ontwikkeling van die leerder se ruimtelike vermoëns kardinaal tot die VHM is, is die belangrikheid van 3D – 2D transformasies nie deur die Van Hiele's aangespreek nie. Dina van Hiele-Geldof het in haar didaktiese eksperiment deurgaans die leerders vanaf die 3D-vlak na die 2D-vlak laat werk en sy het nie verder na die algemene ontwikkeling gekyk nie. Vir die behoorlike ontwikkeling van die leerder se ruimtelike vermoëns moet die 2D – 3D – 2D transformasies egter benut word. Dit kan alleenlik gedoen word as geskikte aktiwiteite, materiaal en leerinhoud ontwikkel word.

## 2.5 Samevatting

In hierdie hoofstuk is die VHM bekend gestel en die didaktiese begroning daarvan beskryf. Hierdie model met sy kenmerkende eienskappe van denkvlakke en onderrigfases hou sekere implikasies waaraan meetkundekurrikulum moet voldoen in. Bo en behalwe hierdie kurrikuleringsimplikasies, het wiskundeonderwys as sodanig wêreldwye vernuwingsproses ondergaan, wat ingrypende veranderings en klemverskuiwings in kurrikula tot gevolg het. Van hierdie veranderings reflekteer ten nouste op die VHM en hou dus verdere kurrikuleringsimplikasies in. Daar die model oorspronklik vir die onderrig en leer van meetkunde ontwikkel is, op tydstip toe skoolmeetkunde afgeskaal was tot Euklidiese meetkunde, het ook hierdie aspek vernuwingsimplikasies. Die kurrikuleringsimplikasies soos in hierdie hoofstuk bevind, sal as vroeë gekonsolideer word en onder ander as kriteria in Hoofstuk 5 gebruik word tydens die kritiese evaluering van die RNCS ten opsigte van die VHM. Vervolgens word gekyk na aantal meetkundeaktiwiteite wat ontwikkel is binne die konteks van die denkvlakke en onderrigfases van die VHM en ondersoek daardeur die spiraalbenadering in meetkundeonderwys.

## HOOFSTUK 3

### DIE SPIRAALBENADERING IN MEETKUNDEONDERWYS

#### 3.1 Inleiding

Die spiraalbenadering tot die kurrikulum word dikwels in die onderrig van skoolwiskunde gebruik. Ria Smuts (1999: 527-528) noem dat Bruner die teorie van die spiraalkurrikulum in 1960 uiteengesit het, maar dat sy model mate van skatpligtigheid teenoor Alfred Whitehead se “The rhythm of education” het, wat reeds in 1922 verskyn het. Sy meld verder dat Dewey ook in 1938 diè beeld van spiraal gebruik het. Die hele idee van spirale kurrikulum in wiskunde is om dieselfde konsepte verskeie male oor die grade heen te herhaal, maar telkens in meer diepte en met groter insig. Die gevaar is egter dat dieselfde leerinhoud jaar na jaar in sirkelgang herhaal mag word en dat die effektiwiteit van die spirale kurrikulum dus verlore kan gaan. Om te sorg dat die spirale kurrikulum effektief funksioneer, moet elke hernieude besoek aan dieselfde konsep dus op dieper vlak plaasvind. Die Van Hiele Model leen hom by uitstek daartoe om hierdie probleem die hoof te bied, want in Van Hiele se model kan dieselfde leerinhoud telkens op hoër vlak aangebied word. Flores (1993: 157) stel dit as volg:

The teaching of mathematics can be done in a spiral curriculum if a guide such as the Van Hiele-levels of development in geometry is kept in view. Students of all levels of geometrical development can become acquainted with a theorem of geometry and be convinced, at their level, of its truth. Students can revisit a theorem at different levels, gaining a deeper insight each time.

Die RNCS stel dit nie eksplisiet duidelik of spiraalbenadering tot die kurrikulum gevolg word nie, maar uit die volgende aanhalings kan die aanname gemaak word dat die RNCS implisiet spiraalbenadering tot die kurrikulum volg:

The Assessment Standards for each Phase are presented in a way that makes it possible to track progression. That is, similar Assessment Standards for each grade are lined up with each other so that the teacher will be able to compare progression over the years (RNCS 2002b: How to use this).

...conceptual progression from grade to grade, are central to this curriculum (RNCS 2002b: 2).

These cognitive links are reflected in Assessment Standards that sometimes stay the same across one or more grades (RNCS 2002b: 6).



Assessment should take place in the increasingly sophisticated contexts in which learners can work as they progress from one grade to the next (RNCS 2002b: 6).

### **3.2 Die doel van hierdie hoofstuk**

Die doel van hierdie hoofstuk is om binne didaktiese ontwerp die spiraalbenadering in die VHM uit te wys deur:

- \_ as illustrasie geselekteerde leerinhoud binne die konteks van die Van Hiele Model te ontwikkel en aktiwiteite aan te dui wat ooreenstem met Van Hiele denkvlakke 0,1 en 2,
- \_ die vyf onderrigfases deur hierdie aktiwiteite aan te dui, en
- \_ aan te dui in watter mate die kurrikulum binne hierdie ontwerp kan figureer.

#### **3.2.1 Die ontwerp**

Onderrig-en-leer, gesien vanuit kompleksiteitsperspektief, omsluit talle aspekte. Hierdie aspekte is onder andere die onderrig-en-leeromgewing (kyk par. 4.4.3.2), die intensie van onderrig, die interaksies wat tydens onderrig en leer plaasvind, die rol van assessering in die onderrig, die sosio-ekonomiese bydraes, die klaskamermilieu, die onderwyser se perspektiewe, kennis, benaderings, repertoire van vaardighede en klaskamerbestuur, asook die leerder se kognitiewe, affektiewe en psigomotoriese karakteristieke. In hierdie studie is daar nie gekonsentreer op bogenoemde en vele ander aspekte soos ras, geslag, geloof, houdings, waardes en norme nie. Vir die doel van hierdie studie is die *wisselwerking* tussen die drie fundamentele didaktiese komponente, te wete die leerder, die onderwyser en die leerinhoud in oënskou geneem. Hierdie wisselwerking geld vir die didaktiek in die algemeen, asook vir die verbesondering van vak (vakdidaktiek) soos byvoorbeeld wiskunde of onderafdeling van die vak, soos meetkunde. Model soos dié van die Van Hiele kan beskou word as besondere manier waardeur gepoog word om hierdie wisselwerking sinvol aansluiting te laat vind. Hierdie wisselwerking word deur die twee kenmerke in die VHM, te wete, die onderrigfases en die denkvlakke, gerig.

### **3.3 Die didaktiese driehoek**

#### **3.3.1 Die leerinhoud**

Die gekose tema uit die leerinhoud is *parallelisme*. Die parallelogram (as vierhoek) en parallelisme as organiseringsbeginsel word gebruik. Die rede vir die besondere keuse is tweërlei.

Eerstens blyk dit uit die literatuurstudie dat hierdie konsep ook deur ander outeurs bestudeer is, maar dit is gedoen vanuit verskillende oogpunte en behoeftes. In die besonder het Dina van Hiele-Geldof haar werk onder meer hierop gebaseer. Tweedens is dit konsep wat in die kurrikulum oor die grade heen versprei is en daarom geskik is om die spiraalbenadering binne besondere graad, asook oor grade heen ten opsigte van die VHM te ondersoek. Meetkunde word tans as geïntegreerde onderafdeling in die wiskundekurrikulum vanaf graad R tot 12 aangebied. Parallelisme as konsep word in die besonder deur die RNCS vir graad 8 soos volg gestel:

Uses vocabulary to describe parallel lines cut by a transversal, perpendicular lines, intersecting lines and triangles in terms of angle relationships (e.g. vertical opposite, corresponding) (RNCS 2002b: 81).

### 3.3.2 Die leerder

Uit die literatuurstudie (De Villiers 1997: 43; Van Niekerk 1995: 11) blyk dit duidelik dat die meeste hoërskoolleerders glad nie gereed is vir formele (en Euklidiese) bewysvoering nie en word die noodsaaklikheid van meer informele meetkunde op aktiewe grondslag op laerskool beklemtoon (kyk par. 2.4 en 5.2.2). Met die implementering van Kurrikulum 2005 in Suid-Afrikaanse skole is informele meetkunde, met die klem op transformasiemeetkunde sedert 1994 op laerskool ingefaseer. Volgens Van Niekerk (1998: 63-67) toon navorsing dat dit bykans die totale primêre skoolfase neem om denkvlakke 1 en 2 volledig by die leerder te ontwikkel. Die ideaal sou dan wees dat, nadat die leerder meetkundeonderrig in die Grondslagsfase (Grade R-3) en die Intermediêrefase (Grade 4-6) ontvang het, hy reeds meetkundig op denkvlakke 0 en 1 operasioneel behoort te wees. By die leerder van graad 7, wat nou aan die einde van sy laerskoolloopbaan kom en reeds in die Seniorfase ingedeel is, behoort denkvlakke 0 en 1 goed ontwikkel te wees. Dit beteken dat die Seniorfase (Grade 7-9) se fokus moet wees om denkvlak 3 te ontwikkel. Die leerder op denkvlak 0 kan meetkundefigure herken aan hul vorm as geheel. Die leerder kan byvoorbeeld parallelogram of driehoek onderskei deur dit op kolletjiespapier te skets en dit te benoem. Hierdie kennis het hy opgedoen deur aktiewe, fisiese manipulasies van konkrete materiaal soos deur met geobord te speel (Van Hiele-Geldof 1958: 218). Hy kan parallelogram, hoeke, ewewydige lyne, “sae en lere” (verwisselende- en ooreenstemmende hoeke) op rooster (“grid”) natrek (kyk par. 3.6.2.1).

Die leerder op denkvlak 1 kan byvoorbeeld op parallelogramrooster gelyke hoeke identifiseer en inkleur en op informele wyse die eienskappe van parallelogram analiseer. Die ideale oogmerk is dat denkvlak 2 in die eerste jare van leerder se hoërskoolloopbaan ontwikkel moet word, alvorens formele aksiomatiese deduksie van hom vereis word. So kan die leerder van die Seniorfase (Grade 7-9) wat op denkvlak 2 operasioneel is, reeds in graad 8 parallelle lyne op driehoekrooster gebruik om op informele wyse die gelykheid van ooreenkomstige hoeke te bewys. Die leerder in graad 9 wat op denkvlak 2 operasioneel is, kan die ordening van relasies binne figuur begryp deurdat hy byvoorbeeld met die toepaslike woordeskat, die eienskappe van parallelisme kan gebruik om die hoekrelasies van parallelogram te beskryf, soos waarom die teenoorstaande hoeke van parallelogram gelyk is. Verder kan parallelisme met behulp van transformasiemeetkunde onderrig word. In die RNCS kry die leerders in grade R tot 3 besondere blootstelling aan die simmetrie-konsep. Die leerder doen vanaf graad 4 oefeninge met tesselasies (teëling) wat ideale onderrigmedium vir parallelisme is. In die RNCS word die leerder vanaf graad 5 tot graad 9 in transformasiemeetkunde onderrig.

### 3.3.3 Die onderwyser

Die onderwyser se taak in die onderrig van meetkunde aan leerders van grade R tot 9 is om met behulp van die onderrigfases, die leerder sodanig te onderrig dat die leerder se kennis en insig in meetkunde vanaf denkvlak 0 na denkvlak 1 en verder na denkvlak 2 kan verbreed. Die oorgang in die denkvlakke is waarneembaar, wanneer ons, volgens die Van Hiele's, tydens die onderrig- en leergebeure die volgende herhaling in die oorgang van denkvlakke kry: aanvanklike periode van struktuurvorming, gevolg deur periode van assosiasievorming. Wat betref die periode van struktuurvorming, is daar verskil tydens die oorgang van vlak 0 na vlak 1 en die oorgang van vlak 1 na vlak 2. In die oorgang van vlak 0 na vlak 1 begin ons op vlak 0 en vanuit meetkundige oogpunt is alles op vlak 0 globaal. Deur die analyses in globale konteks en vanuit globale struktuur word die leerder in die rigting van denkvlak 1 gestuur. *Meetkunde word as 't ware gebore.* Geleentheid word geskep om die ordening of organiseringsbeginsel (kyk par. 3.6) wat in die konteks ingebed lê, uit te lig met die oog op latere gebruik. *Substruktuur word geskep.* In die oorgang van vlak 1 na vlak 2 is dit egter heel anders. Dina van Hiele-Geldof (1957b: 187) stel hierdie oorgang as volg:

The transition from the first to the second level brings only about a structuring-through within the geometric context. There can be a transition to the second level of thinking precisely because of the opportunity that has been created to make use of the organizing principles of the context. These principles provide geometric characteristics rather than a global aspect.

En dit is presies wat die onderwyser tydens die onderrigfases doen. Hy skep aanvanklik meetkundige substruktuur vir die leerder wat operasioneel is op vlakke 0 en 1. Die leerder sal later op vlak 2 besef dat daar binne hierdie substruktuur ordening of organisering in die relasies kan plaasvind en dat hy dié organiseringsbeginsel kan gebruik om sy weg binne die meetkunde te vind. Struktuurblootlegging is spilpunt van die Van Hiele Model en deur die denkvlakke en onderrigfases as kenmerke te gebruik kan die onderwyser die leerder help om meetkundige strukture bloot te lê totdat sinvolle geheelbeeld gevorm word. Michael de Villiers (1997: 44) beklemtoon die feit dat in die Van Hiele Model informele aktiwiteite tydens onderrig op vlakke 0 en 1 belangrik is om konseptuele substrukture daar te stel vir die latere formele aktiwiteite op die volgende vlak 2. Die konseptuele substratum maak dit moontlik dat dit wat implisiet op vlakke 0 en 1 waargeneem word eksplisiet op vlak 2 duidelik word. So is dit byvoorbeeld vanuit Van Hiele-oogpunt verkeerd om leerders die hoeke van driehoek met gradeboog te laat meet en te sommer, om daardeur te ontdek dat die totaal  $180^\circ$  is, want nou ontbreek die nodige konseptuele substruktuur waarbinne die formele bewys implisiet ingebed moet wees, en gaan die konseptuele insig en begrip van die leerder verlore. Die onderwyser kan transformasiemeetkunde gebruik om parallelisme te onderrig en in die transformasieaktiwiteite wat later (in par. 3.6.2) bespreek word, word dit duidelik hoe goed gestruktureerde aktiwiteite wel voorsiening maak vir die skep van sulke konseptuele substrukture.

### **3.4 Die spiraalbenadering in die Van Hiele Model**

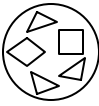
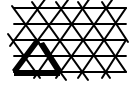

#### **3.4.1 Illustrasie van die denkvlakke**

Die denkvlakke is reeds (in par. 2.2.2) beskryf en vir die doel van hierdie illustrasie sal die oorspronklike vyf denkvlakke (0 tot 4) as verwysingsvlakke gebruik word en ook daarna verwys word as die eerste tot die vyfde denkvlakke (vgl. p. 20). Die volgende tabelle vergelyk die bekrywende aanduiders (“descriptors”) vir denkvlak met die verwagte uitkomst (“respons”) van die leerder.

**Tabel 1 Eerste denkvlak**

Vlak 0: Herkenning: Die leerder herken figure en vorme slegs op hul voorkoms as geheel en is nie bewus van spesifieke dele of eienskappe van die vorm nie.

Fuys *et al.* (1988: 58-59) gee die volgende aanduiders vir Vlak 0

Vlak 0 aanduiders	Vlak 0 leeruitkomst
<p>1. Leerder identifiseer driehoek as geheel</p> <p>a) In eenvoudige skets of diagram;</p> <p>b) in verskillende posisies;</p> <p>c) in meetkundige vorm van meer komplekse konfigurasies.</p> <p>2. Leerder benoem driehoek en ander meetkundige konfigurasies en gebruik toepaslike standaard of nie-standaard name en etikette.</p>	<p>1. Leerder identifiseer driehoeke:</p> <p>a) in versameling van uitgeknipte meetkundige vorme en</p> <p>b)  wys driehoeke uit in verskillende posisies in foto of diagram;</p> <p>c) trek driehoeke, hoeke, lyne, ewewydige lyne, sae en lere op rooster na. </p> <p>2. Leerder wys na hoeke van driehoek en noem dit 'draaie', 'hoeke' OF leerder wys na hoeke deur kleure 'bloue', 'rooie' OF hy gebruik simbole soos A, B, C </p>

Fuys *et al.* (1988: 59) wys daarop dat leerder op Vlak 0 wel dele van figuur kan identifiseer, maar nog nie:

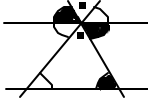
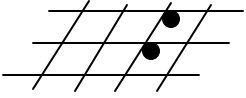
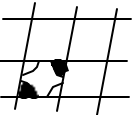
1. analise van die figuur op grond van sy dele kan doen nie;
2. kan dink aan eienskappe as karakterisering van klas van figure nie;
3. veralgemenings omtrent vorme kan maak nie en
4. verbandhoudende kwantifiseerders soos alle, geen, sommige en elke kan gebruik nie.

In die eerste deel van meetkundekursus behoort dit die hoofdoel van die onderwyser te wees om leerder vanaf Vlak 0 na Vlak 1 te lei. Die doel van hierdie gedeelte is dat figure en konsepte soos driehoeke, parallelogramme, ewewydige lyne ensovoorts, *draers* moet word van die eienskappe daarvan (Van Hiele 1959: 249). Figure word in der waarheid op Vlak 0 deur die eienskappe daarvan bepaal, maar die leerder, wat nog op Vlak 0 is *beseft* dit nie, want hy is nog nie *bewus* van die eienskappe nie. Hy skep nog nie assosiasies nie (Van Hiele-Geldof 1957b: 187).

## Tabel 2 Tweede denkvlak

Vlak 1: Analise van eienskappe: Die leerder analiseer figure in terme van dele (komponente) en relasies tussen komponente; stel eienskappe van klas van figure empiries vas en gebruik eienskappe om probleme op te los.

Fuys *et al.* (1988: 60-63) gee die volgende aanduiders vir Vlak 1

Vlak 1 aanduiders	Vlak 1 leeruitkomst
<p>1. Leerder ontdek eienskappe van driehoek empiries en veralgemeen eienskappe vir daardie klas van figure.</p> 	<p>1. Nadat leerder gelyke hoeke op driehoek-rooster ingekleur het, ontdek hy dat die som van die hoeke van driehoek dieselfde is as die som van die hoeke wat reguit lyn vorm. Die leerder dink dit sal ook werk vir ander driehoeke en probeer dit op die rooster verifieer.</p>
<p>2. Leerder interpreteer verbale of simboliese stel reëls en kan dit toepas.</p>	<p>2. Leerder kan leer op rooster beskryf en dit gebruik om gelyke hoeke op rooster aan te dui.</p> 
<p>3. Leerder identifiseer en kontroleer relasies tussen komponente van figure (bv. teenoorstaande hoeke van parallelogram is gelyk).</p> 	<p>3. Nadat leerder gelyke hoeke op parallelogramrooster ingekleur het, ontdek hy dat die teenoorstaande hoeke van parallelogram gelyk is. Die leerder dink dit sal werk vir ander parallelogramme en probeer dit op die rooster verifieer.</p>

Fuys *et al.* (1988: 63) wys daarop dat leerder op Vlak 1 spontaan, of onder begeleiding van die onderwyser wel veralgemenings ten opsigte van die eienskappe van figure kan formuleer en gebruik, asook kwantifiseerders soos alle, elke of geen gebruik,

1. maar hy kan nie die interrelasies van sekere eienskappe van figuur verduidelik nie;
2. hy gebruik beskrywings in plaas van definisies;
3. hy kan nie die verwantskappe in subklasse verduidelik nie – hy kan alleenlik spesifieke gevalle teenoor gegewe lys van eienskappe kontroleer;
4. hy sien nie die noodsaaklikheid van formele bewys of logiese deduktiewe redenasies in om aan te toon dat die beginsel wat hy empiries ontdek het, as veralgemening waar is nie. Hy gebruik nie verbandhoudende begrippe soos ‘as-dan’ nie.

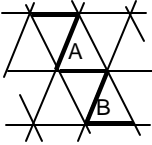
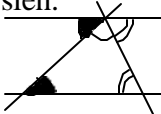
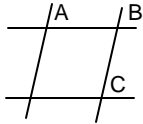
Daar kan aanvaar word dat leerder op denkvlak 1 die eienskappe van figure kan onderskei, maar in isolasie, sonder verbinding met mekaar. Omdat die eienskappe in isolasie as komponente van individuele figure gesien word, kan die verwantskappe tussen figure nog nie onderskei word nie. Die hoofdoel in die tweede deel van meetkundekursus is om die leerder vanaf Vlak 1 na Vlak 2 te rig. Die doel van hierdie gedeelte is om die relasies te leer wat die eienskappe van figure en konsepte verbind, soos byvoorbeeld dat die som van die hoeke van driehoek  $180^\circ$  is of dat verwisselende hoeke wat gevorm word deur twee parallelle lyne en snylyn gelyk is. Die ordening in die eienskappe van verskillende figure kan vergelykenderwys bepaal word (Van Hiele 1959: 250).

**Tabel 3 Derde denkvlak**

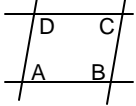
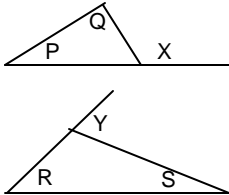
Vlak 2: Informele deduksie en ordening:

Leerders formuleer en gebruik definisies, lewer informele argumente wat die eienskappe wat voorheen ontdek is, orden, en volg asook gee kort deduktiewe redenasies.

Fuys *et al.* (1988: 64-67) gee die volgende aanduiders vir Vlak 2

Vlak 2 aanduiders	Vlak 2 leeruitkomst
<p>1. Leerder gee informele argumente (gebruik diagramme, uitgesnyde vorme of enige ander materiaal). Nadat afleiding uit gegewens gemaak is, kan die afleiding geregverdig word deur logiese relasies te gebruik.</p>  <p>2. Gee informele deduktiewe redenasies.</p> <p>a) Leerder volg deduktiewe argument en kan dele van die argument voorsien.</p> 	<p>1. Leerder gee informele argumente</p> <p>a) Leerder lei af dat as hoek A = hoek B en hoek C = hoek B, dan is hoek A = hoek C want albei is gelyk aan hoek B.</p>  <p>b) Gevra waarom hoek A = hoek B in driehoekrooster, kan leerder sê dat die lyne parallel is en dat daar saag is (wys daarna), dus is hoek A = hoek B as gevolg van saag.</p> <p>c) In familieboomordening kan leerder uitwys dat sae en lere die voorgeslagte is tot 'die som van die hoeke van driehoek is 180°.'</p> <p>2. Doen informele deduksie.</p> <p>a) Terwyl die onderwyser hom rig, kan die leerder redes gee vir stappe in die bewys dat die som van die hoeke van driehoek 180° is.</p>



<p>b) Leerder gee opsomming of variasie van deduktiewe argument.</p>  	<p>(b) Leerder word parallelogramrooster gegee en gevra om logiese verduideliking waarom teenoorstaande hoeke gelyk is. Die leerder kan dit nie op sy eie doen nie, maar kan die verduideliking dat hoek A = hoek C verstaan. Daarna som die leerder die verduideliking in sy eie woorde op en verduidelik self waarom Hoek B = hoek D.</p> <p>En verder:</p> <p>Die onderwyser lei die leerder deur deduktiewe argument waarom die buitehoek X van driehoek gelyk is aan die som van die teenoorstaande binnehoeke (hoek Q + hoek P). Leerder som die argument op en gee sy eie argument vir hoek Y = hoek R + hoek S.</p>
--	---

Op Vlak 2 gebruik die leerder die eienskappe van sae en lere om gelykheid van hoeke te regverdig en te bevestig. Aan die begin van Vlak 2 kan die leerder insien dat daar ordening in die relasies kan plaasvind. Hy kan definisies en die onderlinge relasies tussen figure begryp en die leerder kan ook figure volgens hulle eienskappe orden. Hy kan kort, informele afleidings maak uit vorige aanvaarde feite. Logiese implikasies en klasse-insluiting word verstaan. Die rol en betekenis van formele deduksie kan egter nog nie begryp word nie. Fuys *et al.* (1988: 68) wys daarop dat, alhoewel die leerder op vlak 2 die rol van deduktiewe redenasie begryp en ook probleem deduktief benader, die volgende nog afwesig is. Die leerder:

1. sien nie die noodsaaklikheid vir basiese definisies en aannames in nie;
2. kan nie formeel onderskei tussen bewering en die omgekeerde daarvan nie; en
3. kan nie interrelasies tussen netwerke van stellings staaf nie.

**Tabel 4 Vierde denkvlak**

Vlak 3: Aksiomatiese deduksie

Die leerder kan die betekenis van bewys binne die konteks van definisies, aksiomas en stellings begryp. Hy kan langer afleidings maak.

Fuys *et al.*(1988: 69 - 70) gee die volgende aanduiders vir Vlak 3.

Vlak 3 aanduiders	Vlak 3 leeruitkomstes
1. Leerder herken die noodsaaklikheid van definisies, aksiomas en stellings.	1. Leerder gee voorbeelde van definisies, aksiomas, postulate en stellings in Euklidiese meetkunde en beskryf hoe dit verband hou.
2. Leerder bewys binne aksiomatiese stelsel die verhoudings wat informeel op vlak twee verduidelik is.	2. Leerder bewys streng formeel dat die som van die hoeke van driehoek $180^\circ$ is. Gebruik byvoorbeeld die parallelpostulaat, en stellings in verband met hoeksomming.
3. Leerder staaf die verhoudingsverband tussen netwerk van stellings.	3. Leerder herken die rol wat sae en lere in verskillende stellings speel waar stellings verband hou met eienskappe van parallelogramme.

Die leerder op Vlak 3 kan formele deduktiewe argumente verskaf, maar hy ondersoek nog nie verskillende aksiomatiese sisteme nie.

**Tabel 5 Vyfde denkvlak**

Vlak 4: Rigorisme

Vergelyking met ander aksiomatiese sisteme.

Die onderwyser behoort hierdie ander aksiomatiese stelsels te noem, sodat leerders bewus word van die sentrale rol wat spesifieke stelling in Euklidiese meetkunde speel, en dat dit in ander stelsels ook te voorskyn tree. So noem Michael de Villiers (1997: 37) hoe die stelling dat die som van die hoeke van driehoek  $180^\circ$  is, ook voorkom in ander meetkundes. Die twee nie-Euklidiese

meetkundes van eerstens Lobachevsky-Bolyai met sy sogenaamde Poincare-skyfmodel en tweedens Riemann se meetkunde van die sfeer word in onderstaande tabel as voorbeeld gegee.

<b>Lobachevsky-Bolyai</b>	<b>Riemann</b>
<i>(Playfair) Axiom</i>	<i>(Playfair) Axiom</i>
Through a point $P$ not on a line $l$ at least two lines parallel to $l$ can be drawn.	Through a <i>point</i> $P$ not on a line $l$ no lines parallel to $l$ can be drawn.
<i>Theorem</i>	<i>Theorem</i>
The angle sum of a triangle is less than $180^\circ$ and its area is proportional to the “ <i>defect</i> ” of its angle sum.	The angle sum of a triangle is more than $180^\circ$ and its area is proportional to the “ <i>excess</i> ” of its angle sum.

In hierdie navorsing word die vordering van leerder vanaf graad R tot graad 9 in oënskou geneem. Vir graad R tot 9 word net aandag gegee aan die eerste drie denkvlakke (Vlakke 0,1 en 2). Die denkvlakke in die Van Hiele Model is nie rigied oor die grade heen nie en daarom word die leerder se vordering oor die verskillende grade heen, in die breë soos volg gegee:

**(Graad R-6):** Van die basiese vlak, **herkenning** en benoeming van vorme, na die volgende vlak, die **analise** van die eienskappe van hierdie vorme. Vervolgens van die vlak van **analise** na die volgende vlak, die **ordening** van eienskappe, waar definisies betekenisvol word **(Graad 7-9)**. Dit is egter baie belangrik dat vir enige leerder, in watter graad ook al, elke keer, wanneer nuwe konsep bestudeer word, *al* die denkvlakke weereens deurloop moet word.

### 3.4.2 Die toepassing van die onderrigfases

Die onderrigfases is reeds (in par. 2.2.3) beskryf en aan die hand van enkele voorbeelde word daar nou getrag om die oorgang in die denkvlakke in die Van Hiele Model, tydens toepassing van die onderrigfases, aan te toon. Die onderrigfases word bespreek en gebruik om die keuse uit die leerinhoud, naamlik parallelisme, aan die leerder te onderrig. Vierhoeke, waaronder spesifiek parallelogramme, sal *eerstens* (in 3.5) oor die denkvlakke heen, en deur middel van die onderrigfases, ontwikkel word. *Tweedens* sal parallelisme as organiseringbeginsel (in 3.6) oor die denkvlakke heen, en deur middel van die onderrigfases, ontwikkel word.

### 3.5 Die gebruik van die Van Hiele Model in die onderrig van vierhoeke

Die onderwyser onderrig die konsep van vierhoeke, en meer spesifiek dié van parallelogram

as meetkundefiguur oor die denkvlakke heen, en deur middel van die onderrigfases, aan die leerders. Die leerder word eerstens vanaf denkvlak 0 (herkenning) gestuur in die rigting van denkvlak 1 (analise). Die taak van die onderwyser in die tydperk *herkenning* na *analise* word deur Norma Presmeg (1990: 3) soos volg opgesom:

Thus the task is to help pupils progress from recognition of shapes by their visible forms, to an analysis of properties of individual figures, without yet comparing properties of different shapes or tracing relationships between properties in a single figure. These competences will come later, in the level of ordering.

Om die leerder te help om te groei vanaf vlak 0 na vlak 1 is dit dus die onderwyser se taak om die leerder te stuur vanaf die herkenning van vorme aan hul visuele voorkoms, tot analise van die eienskappe van individuele figure, *sonder* om alreeds die eienskappe van verskillende figure te vergelyk, en *sonder* om relasies tussen die eienskappe in enkele figuur uit te wys. Laasgenoemde bevoegdheids sal later, op die vlak van ordening, gedoen word. Om hierdie groei vanaf herkenning na analise te fasiliteer, kan die onderrigfases nou een vir een geneem word. In navolging van Norma Presmeg (1990: 3-4) wat die konsep van vierkant gebruik het, word die konsep van parallelogram vervolgens gebruik om die leerder vanaf vlak 0 na vlak 1 met behulp van die onderrigfases te lei.

### **3.5.1 Vanaf herkenning na analise**

#### **Onderrigfase 1: Inligting**

Die leerder leer om die veld wat ondersoek word te herken deur middel van die materiaal wat aan hom voorgelê word. Hierdie materiaal help die leerder om sekere struktuur te ontdek. Die leerders word in klein groepies verdeel en word voorsien van fisiese, konkrete materiaal van spesifieke meetkunde vorm, sê byvoorbeeld, uitgeknipte papier parallelogramme in verskillende kleure en groottes. Sommige parallelogramme is identies, om sodoende vergelykings te fasiliteer. Laat die leerders toe om paar oomblikke met die parallelogramme op hul eie te speel. Die onderwyser vra elke leerder om parallelogram op spesifieke manier (bv. op die diagonaal) te vou en te sê wat hy kan waarneem. Dit is belangrik dat *geen* poging tydens hierdie fase aangewend moet word om dit wat waargeneem is te formaliseer nie. Elke leerder vou eenvoudig verskillende parallelogramme en vergelyk die resultaat met die van ander leerders in sy groep.

### **Onderrigfase 2: Gerigte oriëntasie.**

Die leerder verken die veld wat ondersoek word, deur middel van die materiaal wat aan hom verskaf is. Die karakteristieke strukture tree geleidelik na vore. Omdat vordering deur die denkvlakke ten nouste saamhang met die verbreding van die taal en die leerder gestuur word in die rigting van denkvlak 1, behoort die infasering van standaardtaal, soos byvoorbeeld: parallel, ewewydig, diagonaal, aangrensende sye, teenoorstaande hoeke, ensovoorts nie agterweë te bly nie. Tydens hierdie fase gee die onderwyser meer spesifieke instruksies aan die leerders, soos byvoorbeeld om as groep meer uit te vind oor:

- (a) die regoorstaande sye van parallelogram,
- (b) die aangrensende sye van parallelogram,
- (c) die diagonale,
- (d) die hoeke.

Daar word ook segsman vir elke groep gekies, wat later die samevatting van die groep se bevindinge aan die hele klas kan oordra. Dit lei dan tot die volgende fase.

### **Onderrigfase 3: Eksplisitering**

Die leerervaringe wat opgedoen is in die vorige onderrigfase moet aan eksakte simbole gekoppel word. Die leerders moet tydens die eksplisiteringsfase standaard taal en terme in hulle besprekings gebruik. Dit is tydens hierdie fase dat die netwerk van relasies gedeeltelik gevorm word. Die leerders moet binne hulle groep hul bevindinge bespreek en die segsman help om lys van die eienskappe van parallelogram wat hulle ontdek het, met die nodige korrekte woordeskat, saam te stel. Die segsman rapporteer aan die klas as geheel en verdere klasbesprekings volg.

### **Onderrigfase 4: Vrye oriëntasie**

Die veld wat ondersoek word is in groot mate vir die leerder bekend, maar hy moet nog leer om sy weg vinnig binne hierdie veld te kan vind. Dit word grootliks bereik deur take aan die leerder te gee wat op verskillende maniere gedoen kan word. Die eienskappe van parallelogram is nou in breë trekke bekend, maar tot nog toe nie geformaliseer nie. Verskillende take word nou gegee soos byvoorbeeld dat die leerders (individueel of in groepe) die eienskappe van parallelogram op rooster wat bestaan uit identiese identiese parallelogramme kan ondersoek. Hierdie keer word die ondersoek nie deur papiervou gedoen nie, maar byvoorbeeld met transformasiemeetkunde.

### **Onderrigfase 5: Integrasie**

In hierdie essensiële laaste fase word opsomming deur die onderwyser en die leerders te same maak. Die eienskappe van parallelogram word geformaliseer en in standaardtaal neergeskryf. Die leerder vorm oorsigtelike beeld van die metodes tot sy beskikking en kondenseer die domein wat deur sy denke ondersoek is. Die leerder bevind hom nou op denkvlak 1.

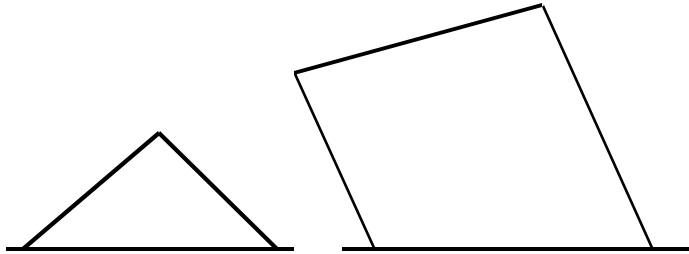
Die leerders het vanaf die *herkenning* van parallelogram na die *analise* van die eienskappe van parallelogram beweeg. Hierdie proses kan deur al vyf onderrigfases vir verskillende vierhoeke (reghoeke, vierkante, trapesiums, vlieërs, ens.) asook vir driehoeke (gelyksydig, gelykbenig, ens.) herhaal word, *sonder* om op hierdie stadium die eienskappe van verskillende figure te vergelyk, en *sonder* om relasies tussen die eienskappe van figure uit te wys. Laasgenoemde bevoegdhede word vervolgens beskou wanneer die onderwyser in kontinuasie van dieselfde leerinhoud, soos in spirale kurrikulum voorgestel, die konsep van vierhoeke (met inbegrip van parallelogram) met behulp van die onderrigfases onderrig. Die *denkvlakke* in die VHM kan waargeneem word wanneer die leerder tweedens vanaf denkvlak 1 (analise) in die rigting van denkvlak 2 (ordening) gestuur word. In navolging van Norma Presmeg (1990: 5-7) se voorlegging op die 10de Nasionale Kongres oor Wiskunde-onderwys, word die konsep van vierhoeke (met inbegrip van parallelogram) vervolgens met behulp van die onderrigfases uiteengesit.

#### **3.5.2 Vanaf analise na ordening**

Wanneer leerders die plato van analise begryp, verskuif die klem na vergelyking van verskillende figure en hul eienskappe, asook na die ordening van die verwantskappe tussen die eienskappe binne spesifieke individuele figuur.

### **Onderrigfase 1: Inligting**

Die aandag word gevestig, nie alleen op die eienskappe nie, maar ook op vergelyking van die eienskappe van verskillende vorme, in hierdie geval, vierhoeke. Die onderwyser kan geleidelik meetkundefiguur of vorm ontbloot en aan die leerders telkens vra om die ontblote gedeelte te identifiseer. Die leerder sien die gedeeltelik-ontblote figuur slegs visueel. Die aandag word sodoende nie alleen op die eienskappe van enkele figuur gevestig nie, maar ook op vergelyking van die eienskappe van verskillende figure.

**Figuur 1** Figuurontbloting (Presmeg 1990: 6)**Onderrigfase 2: Gerigte oriëntasie.**

Die onderwyser kan sestien drinkstrooitjies aan elke groep gee. Vier van die strooitjies is groen en 10 cm lank. Vier van die strooitjies is blou en 15 cm lank. Vier van die strooitjies is rooi en 20 cm lank. Vier van die strooitjies is geel en 30 cm lank. Die leerders in die groep moet nou byvoorbeeld met die rooi strooitjies vlieër maak, met die bloues parallelogram, met die geles vierkant en met die groenes reghoek. Die leerders as groep moet telkens die motiverende redes waarom hulle sê dat die model byvoorbeeld parallelogram is, notuleer (bv. teenoorstaande sye is parallel).

**Onderrigfase 3: Eksplisitering**

Die leerders moet binne hulle groep hul bevindinge bespreek en die segsman help om tabel op te stel waarin alle moontlike eienskappe wat elke vierhoek mag hê in die tabel af te merk. Die onderwyser kan ekstra vierhoeke byvoeg soos byvoorbeeld dat ruit ook teen die eienskappe afgemerkt moet word.

**Tabel 6 Vierhoeke**

	<b>Vierhoeke</b>			
<b>Eienskappe</b>	Vlieër	parallelogram	ruit	ens...
Teenoorstaande sye is parallel				
Diagonale is gelyk				
Hoeke is almal 90°				
ens...				

Hier kom alreeds mate van keuses voor wat die leerders later onder die besef behoort te bring dat selfs in die opstelling van definisie daar element van *keuses* is.

#### **Onderrigfase 4: Vrye oriëntasie**

Leerders moet hier probeer om definisie vir byvoorbeeld parallelogram vanuit die eienskappe wat in hulle tabelle voorkom te formuleer. Die leerders behoort op te merk dat sommige eienskappe van vierhoek oorbodig kan wees in die formulering van definisie. Die segsman moet later die definisies van al die vierhoeke in die tabel soos deur die groep geformuleer, aan die klas voorlê.

#### **Onderrigfase 5: Integrasie**

Opsommenderwys word samehangende stelsel van definisies deur die onderwyser uitgewerk tesame met die klas as geheel of met die klein groepies. Leerders kan nou begryp dat rombus is parallelogram (want dit het al die eienskappe van parallelogram), maar dat parallelogram nie noodwendig rombus is nie. Die leerders het die vlak van ordening (denkvlak 2) bereik. Die leerders moet egter nog verder in meetkunde-kennis groei, alvorens nodige en voldoende voorwaardes ten volle begryp word. Wanneer leerders die plato van ordening begryp, verskuif die klem verder en reik leerders na die volgende vlak van deduksie. Om die vlak van deduksie te bereik, vereis dat die leerders aan baie meetkundige ondervindinge blootgestel moet word.

#### **3.5.3 Opsomming**

Tot dusver is aangetoon hoe daar om die spiraalbenadering in die VHM, deur middel van vyf onderrigfases onderrig kan word. Die konsep van vierhoeke en in die besonder dié van parallelogram as meetkundefiguur is in dié proses gebruik. Die konsep van parallelogram as meetkundefiguur kan byvoorbeeld in een enkele skooljaar binne spesifieke graad ontwikkel word, veral tydens die periode herkenning na analise. Dit is egter belangrik dat die onderwyser die konsep *nie* in isolasie nie, maar interrelasionêr, binne die konteks van vierhoeke moet onderrig. Tydens die periode analise na ordening word die konsep van vierhoeke (waaronder parallelogram) in *relasionêre* verband binne meetkundestruktuur byeengebring. As die konsep in isolasie onderrig word, sal die leerder verlies aan konseptuele insig en begrip ondervind. Parallelisme moet nie alleen oor die grade heen verspreid onderrig word nie, maar dit moet ook oor die denkvlakke heen verspreid onderrig word. Die spirale kurrikulum, die spirale denkvlakke en ook die spirale onderrigfases in Van Hiele se model kan ideaal aangewend word om geïntegreerde neerslag van meetkundeonderrig in die praktyk te bewerkstellig. Die onderwerpe in

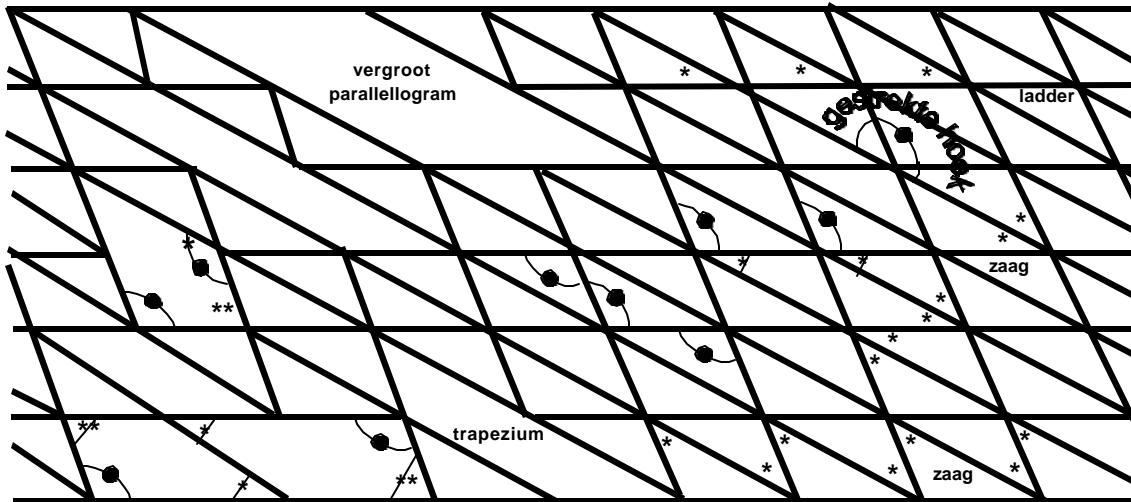


wiskunde (en meetkunde) is in wese baie kompleks en moet nooit op sigself aangebied of geleer word nie, maar binne kontekstuele verband binne die vak self, asook in samehang met ander skoolvakke, met inagneming van leerders se kulturele agtergronde. Hierdie kompleksiteit word deur Cangelosi (1992: 1) tereg “...a set of messy functions” genoem; funksies, wat nie almal binne hierdie studie bespreek sal word nie. Dit blyk egter dat dit moontlik is om met die Van Hiele Kenmerke die drie didaktiese komponente, te wete die leerinhoud, die leerder en die onderwyser tydens die meetkundeonderrig en leergebeure tot ordelike integrasie te kan bring. Vervolgens word die spiraalbenadering in die Van Hiele Model verder belig, wanneer die konsep van parallelisme verder ontwikkel word deur gebruik te maak van die organiseringsbeginsel van parallelisme oor die denkvlakke heen met klem op die gebruik van transformasiemeetkunde, tydens die onderrigfases.

### **3.6 Parallelisme as organiseringsbeginsel**

Dina van Hiele-Geldof (1957b: 187) beskryf die *organiseringsbeginsel van parallelisme* oor die denkvlakke heen as volg: Globaal of holisties beteken parallelisme, dieselfde rigting (eerste denkvlak: Vlak 0). Visueel beteken dit om vertrouwd en bekend te wees met die meetkundige eienskappe van parallelisme, soos onder andere gelykheid van hoeke wanneer parallelle lyne deur snylyn gesny word. Om hierdie eienskap van parallelisme, naamlik die gelykheid van hoeke, naam te gee, praat die leerders aanvanklik op die eerste denkvlak van ‘dit lyk soos saag’ of ‘dit lyk soos leer’, begrippe wat spontaan deur die leerders vanuit hul bekende konseptuele omgewing gebruik is (kyk par. 3.6.2.1). As die leerder nou die onderstaande figuur met die organiseringsbeginsel van parallelisme organiseer deur middel van die ewewydige lyne, sae en lere wat hy kan waarneem, kan hy die gelyke hoeke in kleur aandui en daardeur *ontdek* dat die som van die hoeke van driehoek altyd dieselfde is (tweede denkvlak: Vlak 1). As die leerder stap verder gaan en onderstaande figuur weereens met die organiseringsbeginsel van parallelisme kan organiseer tot informele argumente en informele deduksies van die eienskappe van parallelisme wat hy ontdek het, vind *strukturering na en tot ordening* in die relasies plaas. Deur hierdie *strukturering* is in der waarheid nuwe struktuur gevorm. Wanneer hy hierdie nuwe struktuur voor hom het, het die leerder na die derde denkvlak (Vlak 2) beweeg en het hy begrip van waaroor dit eintlik in meetkunde gaan.

**Figuur 2 Organiseringsbeginsel van parallelisme** (Van Hiele-Geldof 1957b: 149)

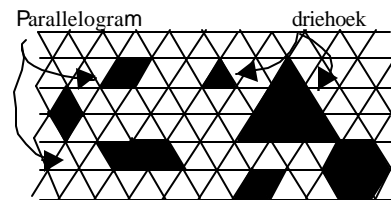


Om die spiraalbenadering in die Van Hiele Model verder te belig, word die vyf onderrigfases, soos dit toegepas kan word tydens die onderrig van parallelisme as organiseringbeginsel ten eerste onder die loep geneem. Daarna word ses aktiwiteite wat hierby aansluit, met klem op die gebruik van transformasiemeetkunde, saamgestel.

### 3.6.1 Die onderrigfases

#### Onderrigfase 1: Inligting

Die leerder word aan die werksdomein bekend gestel, Deur materiaal wat die onderwyser aan hom verskaf. Met hierdie materiaal kan die leerder sekere (sub-) struktuur ontdek.



**Figuur 3 Onderrigfase 1**

Aktiwiteite: Baie informele aktiwiteite.

Die onderwyser stel tydens hierdie fase die leerder aan die leerdomein bekend en stel ook vas hoeveel die leerder weet. Dina van Hiele-Geldof (1958: 218) het in haar studie met leerders van  $\pm$  12-13 jaar oud in hul eerste jaar op Hoërskool, die leerders tydens hierdie fase verskillende kubusse as konkrete uitgangsmateriaal laat manipuleer en dan gevra watter ooreenkomste die leerders raaksien. Die leerders antwoord spontaan dat al die kubusse gelyke aantal vlakke, gelyke aantal sye en  $90^\circ$  hoeke het. Die leerders wys hulle besit eksplisiete kennis van hierdie eienskappe. Hulle toon

egter nie spontaan *parallelisme en gelykheid van hoeke* aan nie. Laasgenoemde kennis lê dus moontlik implisiet in hulle opgesluit. Dit is nou die onderwyser se taak om die leerder sodanig te rig, dat die leerder parallelisme en gelykheid van hoeke eksplisiet kan beleef, dit wil sê die onderwyser moet die leerders vanaf vlak 0 denke na vlak 1 denke stuur. In die RNCS moes die onderwyser in Suid-Afrika in grade R tot 6 transformasiemeetkunde gebruik het om intuïtiewe visuele fondament (Van Hiele vlak 0) te skep vir verskeidenheid van meetkundige konsepte wat later in meer formele deduktiewe konteks bestudeer kan word. Alhoewel tesselasies (RNCS, graad 4) groot estetiese waarde het, moet onderwysers en handboekouteurs besef die belangrikheid daarvan ten opsigte van die Van Hiele teorie, lê juis in die feit dat die intuïtiewe visuele fondament van vlak 0 denke geskep moet word (De Villiers M 1997: 43). In aansluiting by transformasiemeetkunde, kan die onderwyser tydens hierdie onderrigfase, op die eerste dag die leerders in klein groepies indeel (of leerders individueel laat werk) en die leerders voorsien van prentjies van meetkundige konsepte wat in driehoekrooster ingebed is soos in bostaande figuur uitgebeeld word. Die leerders kan alternatiewelik self so rooster skets. Deur vrae aan leerders te vra en hulle aan te moedig om die rooster 'te lees', dit wil sê om observasies te doen en om sekere meetkunde-konsepte soos ewewydige lyne, parallelogramme, driehoeke, gelyke hoeke, saag, en so meerte herken, te benoem, of in te kleur, evalueer die onderwyser die leerders. Die visuele herkenning, benoeming en sortering (denkvlak 0) van veelhoeke, waaronder parallelogramme, asook die herkenning van ewewydige lyne en verskillende tipes hoeke binne die konteks van bogenoemde rooster toon aan die onderwyser tot watter mate die leerder reeds meetkunde-organisering en in besonder die organiseringsbeginsel van parallelisme as vaardigheid geleer het. Die reëlmatigheid in die verskillende meetkunde-vorme (soos driehoeke en vierhoeke) wat die leerder vanuit sy ervaringe oor grade R-6 heen ontdek het, het alreeds globale meetkundestruktuur van die vorme en figure daar gestel. So kan die leerder byvoorbeeld visueel sorteer en orden dat driehoeke en vierhoeke (parallelogramme) nie dieselfde vorm het nie. Die leerders maak self binne hul begripsvermoë die gelykheidsrelasie eksplisiet, omrede gelykvormigheid en kongruensie die wyse is waarop ons meetkundig sorteer en orden. Die belangrikheid daarvan dat *geen* poging tydens hierdie fase aangewend moet word om dit wat waargeneem is te formaliseer nie, word beklemtoon. Hierdie fase is vir beide onderwyser en leerders bloot bekendstelling en oriëntasie tot die werksdomein.

## Onderrigfase 2: Gerigte oriëntasie.

Die leerder doen manipulasies of take met die materiaal wat die onderwyser voorsien, met die doel om die verskillende relasies van die netwerk (struktuur) wat gevorm moet word, progressief bloot te lê.

Aktiwiteite: Tydens die vorige onderrigfase het die onderwyser en die leerders hulleself georiënteer ten opsigte van die domein wat ondersoek gaan word. Die onderwyser het vasgestel die leerder bevind hom op denkvlak  $n$ . In onderrigfase 2 (gerigte oriëntasie) word die leerder deur die onderwyser *gerig* in die rigting van die volgende denkvlak  $n+1$ . Baie informele aktiwiteite word tydens hierdie fase deur die onderwyser aan die leerders gebied om nie alleen die struktuur wat gevorm moet word, bloot te lê nie, maar *ook* om implisiet konseptuele strukture daar te stel vir die latere formele aktiwiteite van vlak  $n+2$ . Tydens hierdie fase is fisiese *manipulasies* soos vou, uitknip, plak, skets, en inkleur prominent, sodat die leerder die *eienskappe* van die konsep of figuur kan ondersoek. In aansluiting by transformasiemeetkunde kan weereens rooster met ingebedde figuur gebruik word. Die onderwyser vra die leerders om sekere manipulasies soos verskuiwings, rotasies of refleksies uit te voer. Die onderwyser kan byvoorbeeld die leerders vra om, nadat spesifieke transformasie uitgevoer is, die gelyke hoeke wat hulle kan waarneem, in te kleur. Die leerder maak op hierdie stadium implisiet gebruik van die organiseringsbeginsel van parallelisme en Dina van Hiele-Geldof (1958: 226) noem dat deur die inkleur van hoeke die relasies vir die leerder *visueel sigbaar* word, wat die leerder op die pad van struktuurblootlegging plaas. Verskeie aktiwiteite om parallelisme en die eienskappe in die gelykheid van die hoeke te ondersoek moet tydens die gerigte oriëntasie-onderrigfase aangepak word. Hierdie aktiwiteite wat die onderwyser aan die leerder bied, moet die leerder *stuur* in die rigting van denkvlak  $n+1$ . Die leerder gebruik implisiet (of eksplisiet) die organiseringsbeginsel van parallelisme. Vir leerder om denkvlak 1 te bereik behoort hierdie aktiwiteite hom te *oortuig* van die waarheid van die relasies. Dit is belangrik dat *geen* poging op denkvlak 1 *of* tydens onderrigfase 2 aangewend mag word om vanuit matematiese oogpunt aan te toon hoe die komponente, deel vorm van die gehele struktuur nie. Ons haal Flores (1993: 153) as volg aan:

Students at Van Hiele level 1 can be convinced of the truth of the relationship. At this level, no attempt is made to show, from a mathematical point of view, that the pieces of the puzzle fit exactly in the different positions.

In die geval waar die onderwyser die leerder vanaf denkvlak 1 na denkvlak 2 rig, behoort die leerder wat reeds op vlak 1 is, tot die besef te kom, dat hy nou moet gebruik maak van die organiseringsbeginsel van parallelisme om die eienskappe van die konsep(te) te ondersoek sodat die relasionêre verwantskappe kan realiseer. Sodoende ontwikkel die leerder sy vlak 1 denke. Tydens die gerigte oriëntasiefase gee die onderwyser meer spesifieke instruksies aan die leerders, soos byvoorbeeld om as groep of as individu sekere transformasies uit te voer en vas te stel wat gebeur met die hoeke en die sye van die driehoek of vierhoek. Fuys *et al.* (1988: 34) wys daarop dat gedurende hierdie fase aktiwiteite eers op vlak 0 kan plaasvind. So kan die leerder byvoorbeeld, sonder om na parallelisme te verwys, homself uitdruk as “...the figure looks like a saw” (kyk par. 3.3.2). Verder moet die onderwyser onthou dat vordering deur die denkvlakke ten nouste saamhang met die verbreding van die taal en wanneer die leerder gestuur word in die rigting van denkvlak  $n+1$ , behoort die infasering van standaardtaal, soos byvoorbeeld: parallel, diagonaal, ooreenkomstige hoeke, verwisselende hoeke, en so meer nie agterweë te bly nie. Die tipe vrae wat die onderwyser stel sal aan hom toon of die leerders spontaan in terme van eienskappe begin dink en ook hoe geredelik hulle standaardtaal gebruik wat uit vorige onderrig opgedoen is. Volgens van Hiele-Geldof (1958: 232) sal die onderwyser gedurende hierdie fase merk dat tydstip aanbreek waar die leerder die simbole van die tegniese taal begin gebruik. Die volgende onderrigfase word vervolgens onder die loep geneem.

### **Onderrigfase 3: Eksplisitering**

Die leerder raak bewus van die relasies. Hy probeer die relasies in woorde uitdruk en hy leer die toepaslike tegniese woorde.

Aktiwiteite: Die leerder se subjektiewe waarnemings tydens gerigte oriëntasie word nou in woorde uitgedruk. Die leerder kan homself uitdruk ten opsigte van die eienskappe of relasies waarvan hy bewus geraak het. Die leerder kan saag en leer identifiseer en kan dit eksplisiet verwoord as: “Ladders have two sets of corresponding angles and one set of parallel lines; saws have two sets of parallel lines and equal angles” (Van Hiele-Geldof 1958: 226). Deur sy subjektiewe aktiwiteite tydens die vorige onderrigfase is die leerder *oortuig* van die waarheid van die relasies wat hy ontdek het. In teenstelling met die vorige aktiwiteite, is die aktiwiteite tydens die eksplisiteringsfase meer formeel sodat konsepte eksplisiet duidelik kan word. Deur gebruik te maak van die organiseringsbeginsel van parallelisme, moet die leerder hier in sekere mate gebruik

maak van matematiese redenasies om die betrokke konsep as resultaat te bevestig. Veral op denkvlak 2 is leerders *bereid en gereed* om afleidings te maak, deur gebruik te maak van vorige resultate wat hul aanvaar het, en ook van resultate wat nie bewys hoef te word nie, aangesien dit klaarblyklik is. Op denkvlak 2 word die resultate nie slegs uit aksiomas en vorige bewese stellings afgelei nie. Die leerder moet deur die gebruik van die organiseringsbeginsel van parallelisme, *insig* openbaar om die nodige matematiese redenasie te kan uitvoer. Die leerders wat in groepies verdeel is, moet binne die groep hul bevindinge bespreek, eienskappe identifiseer en met die organiseringsbeginsel van parallelisme, sekere informele afleidings maak. Die onderwyser behoort tydens hierdie fase spesifiek *gerigte vrae* te stel totdat die leerders uiteindelik op eksplisiete wyse dit kan verwoord as: ‘...die som van die binnehoeke van driehoek is  $180^\circ$ ’ en ‘...in parallelogram is die teenoorstaande hoeke gelyk.’ Die onderwyser moet dit vermy om leerders op hierdie stadium met liniaal of gradeboog te laat meet, want dan is bogenoemde uitsprake nie meer sy eie wat hy self ontdek het nie. Tydens eksplisitering is die leerder in werklikheid reeds besig om hipotese te vorm, en in wiskunde word hipotese nie geverifieer deur meting nie, maar deur deduksie. As die leerder op hierdie stadium die hoeke meet, verloor ons die geskepte konseptuele substratum wat later nodig is vir die onderrig van deduktiewe redenering. Die doel tydens eksplisitering is om die eienskappe van figuur te staaf en volgens Dina van Hiele-Geldof (1958: 219) word op hierdie stadium die vorm as geheel vir die leerder minder belangrik, want hy beskou die figuur nou as agglomeraat van eienskappe.

#### **Onderrigfase 4: Vrye oriëntasie**

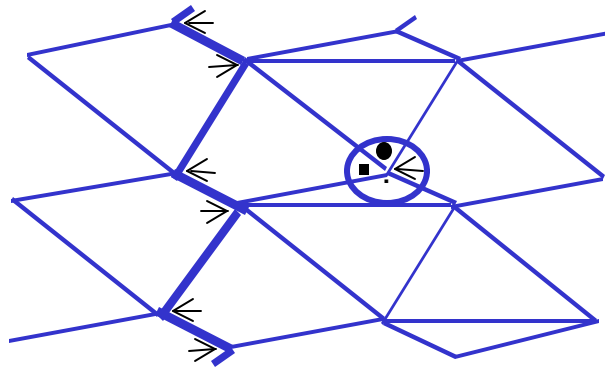
Deur die doen van meer komplekse take, leer die leerder om sy weg binne die struktuur van relasies te vind.

Aktiwiteite: Baie take en probleme, dit wil sê oefeninge, met verskillende media word aan die leerder gegee om die betrokke studieveld te verken. Die leerder kan die ontdekking van die vorige fase ondersoek op verskillende roosters met kleiner en groter parallelogramme en driehoeke in verskillende oriëntasies. Die leerder kan ook verskeie tesselasiepatrone gebruik om hierdie ontdekking te ondersoek. Dit baan die weg na veralgemening. Die rekenaar kan gebruik word om die ontdekking van die vorige fase te ondersoek. Sodoende word die leerder se visuele vermoëns ook ontwikkel. Die leerder maak met behulp van al hierdie oefeninge, die kennis wat hy verwerf het, sy eie. Die leerder kan byvoorbeeld op sy eie, op die plat vlak bedekking skets wat bestaan

uit gelyke driehoeke en gelyke vierhoeke wat by mekaar aansluit soos in figuur 4 aangetoon word. Deur gebruik te maak van die organiseringsbeginsel van parallelisme, kan die leerder nou hierdie bedekking meetkundig struktureer deur vir sae en lere, ewewydige lyne, parallelogramme, driehoeke, gelyke hoeke, diagonale, en so meer te soek. Sae word byvoorbeeld herken aan gelyke hoeke of aan ewewydige lyne. Die leerder kan die verwantskappe of stellings wat in die vorige onderrigfase ontdek is, in sy eie skets ondersoek. Dina van Hiele-Geldof (1958: 228) meld dat tydens die oorgang van denkvlak 0 na denkvlak 1, die leerder nog nie sistematies na eienskappe soek nie, en gevolglik ontdek hy ook nog nie al die eienskappe van byvoorbeeld parallelogram nie. Wat egter wel belangrik is, is dat elke leerder self deur sy eie manipulasies dit wat in die vorige onderrigfase ontdek is, moet kan vind en sy eie kan maak.

#### **Figuur 4 Bedekking van plat vlak**

(Van Hiele-Geldof 1958: 227)



#### **Onderrigfase 5: Integrasie**

Die leerder kom tot geheelbeskouing.

Aktiwiteite: Die onderwyser en leerders som die werk sinvol op. Die leerder werk met die figuur as totaliteit van eienskappe. Die leerder kan die organiseringsbeginsel van parallelisme gebruik en die figuur in sy totaliteit met die onderskeie eienskappe organiseer. Die figuur het tekens en simbole wat nie almal eksplisiet gestel hoef te word nie, maar wat duidelik spreek uit die aksies. Die aantal meetkundeterme word vermeerder, deur die gebruik van die meetkundetaal, simbole en terme. Die leerder verstaan hierdie terme en weet hoe om dit te gebruik. Dit wat ontdek is word geformaliseer en die leerder moet in sy eie woorde, of deur die gebruik van tegniese taal, sy ontdekking kan neerskryf. Die leerder is nou op vlak  $n+1$ . As finale stap, kan die leerder selfassessering doen en ook deur die onderwyser geëvalueer word.

Vervolgens word die organiseringsbeginsel van parallelisme in die volgende aktiwiteite ingespan wanneer die onderwyser onder andere van transformasiemeetkunde gebruik maak om die leerders deur middel van die onderrigfases deur die *denkvlakke* te lei.

### **3.6.2 Meetkundeaktiwiteite**

Die volgende aktiwiteite is aangepas uit die navorsing van Dina van Hiele-Geldof soos in haar proefskrif gerapporteer en ook uit die navorsing gedoen in die Brooklyn-projek soos deur Fuys *et al.* gerapporteer. Geddes (1992) se aktiwiteite vir die NCTM en Michael de Villiers se aktiwiteite vir die Suid-Afrikaanse konteks is ook bygewerk.

#### **3.6.2.1 Aktiwiteit 1**

Ontdek nuwe patrone en eienskappe in sae en lere.

#### **3.6.2.2 Aktiwiteit 2**

Ontdek in kleur die relasie tussen die teenoorstaande hoeke van      parallelogram.

#### **3.6.2.3 Aktiwiteit 3**

Ontdek in kleur dat die som van die binnehoeke van      driehoek  $180^\circ$  is.

#### **3.6.2.4 Aktiwiteit 4**

Ontdek in kleur die relasie tussen die buitehoek van      driehoek en die som van twee teenoorstaande binnehoeke.

#### **3.6.2.5 Aktiwiteit 5**

Uit die bekende prinsipe van sae en lere, bewys met informele deduksie die relasie tussen die teenoorstaande hoeke van      parallelogram.

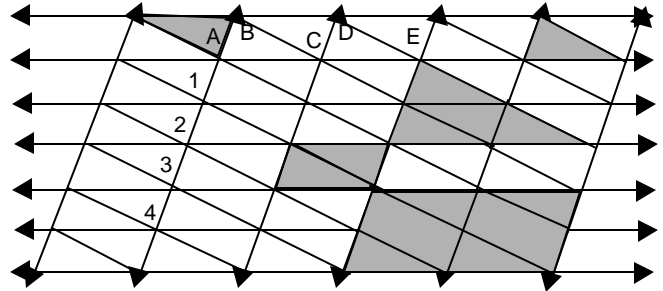
#### **3.6.2.6 Aktiwiteit 6**

Uit die bekende prinsipe van sae en lere, bewys deur informele deduksie dat die som van die binnehoeke van      driehoek  $180^\circ$  is.



### 3.6.2.1 Aktiwiteit 1 (De Villiers 1997: 43)

#### Driehoekrooster



Hierdie rooster is gevorm deur drie stelle ewewydige lyne.

#### Fase 1

Identifiseer en kleur ewewydige lyne in.

#### Fase 2

Wat merk jy op van hoeke A,B,C,D en E en hoekom?

Wat merk jy op van hoeke A,1,2,3 en 4 en waarom?

In manipulasies wat transformasieaktiwiteite insluit, sal leerders opmerk dat hoeke A,B,C,D en E dieselfde is omdat halwe draai van die grys driehoek rondom die middelpunt van die sy AB die hoek A op die hoek B afbeeld, en so meer. Op hierdie manier kan leerders vir die eerste keer bekendgestel word aan die begrip sae (“zig-zags” of “saws”) wat niks anders as verwisselende hoeke is nie. Soortgelyk sal leerders opmerk dat hoeke A,1,2,3 en 4 gelyk is, omdat verskuiwing van die grys driehoek in die rigting van hoeke 1,2,3 en 4, die hoek A agtereenvolgend op elkeen van hierdie hoeke afbeeld. Op hierdie manier kan leerders vir die eerste keer bekendgestel word aan lere (“ladders”) of te wel ooreenstemmende hoeke.

#### Fase 3

Deur vrae te stel kan die onderwyser die leerder lei totdat hy uiteindelik op eksplisiete wyse kan uitroep dat leer bestaan uit een stel ewewydige lyne en twee stelle gelyke hoeke en dat saag bestaan uit twee stelle ewewydige lyne en gelyke hoeke.

#### Fase 4

Leerders moet nou aangemoedig word om verskillende sae en lere in dieselfde tesselasie- asook ander tesselasiepatrone te vind om daardeur hul visuele vermoëns te verbeter. Wye verskeidenheid take kan gedoen word.

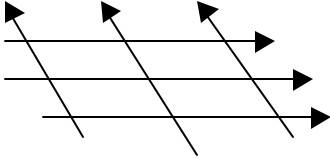
#### Fase 5

Samevatting en opsomming

### 3.6.2.2 Aktiwiteit 2 (Fuys *et al.* 1988: 37)

#### Parallelogramrooster

Hierdie rooster is gevorm deur twee stelle ewewydige lyne.



#### Fase 1

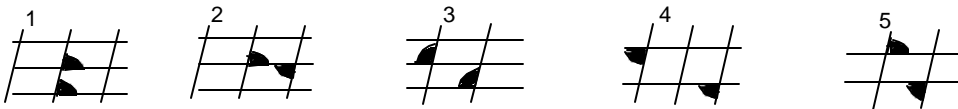
Identifiseer ewewydige lyne, saag en leer deur dit in te kleur.

#### Fase 2

Die volgende diagramme is uit parallelogramroosters gehaal.

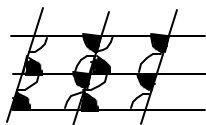
Wanneer ons gelyke hoeke wil inkleur, kan ons sae en lere gebruik om ons te help. Kan jy op diagram 1 saag of leer gebruik om aan te toon dat hierdie twee hoeke gelyk is? Doen dieselfde met diagram 2. Soms het ons kombinasie van sae en lere nodig om gelyke hoeke aan te toon.

Kan jy op diagram 3 saag of leer gebruik om aan te toon dat hierdie twee hoeke gelyk is? Doen dieselfde met diagramme 4 en 5.



#### Fase 3

Gebruik nou hierdie parallelogramrooster asook twee verskillende kleure. Kleur alle hoeke wat gelyk is aan die hoek wat met die sterretjie gemerk is, in dieselfde kleur in. Herhaal dit vir die hoek met die kolletjie. Wat merk jy op ten opsigte van die hoeke van 'n parallelogram? Dink jy hierdie afleiding is waar vir *alle* parallelogramme?



Teenoorstaande hoeke van 'n parallelogram is gelyk.

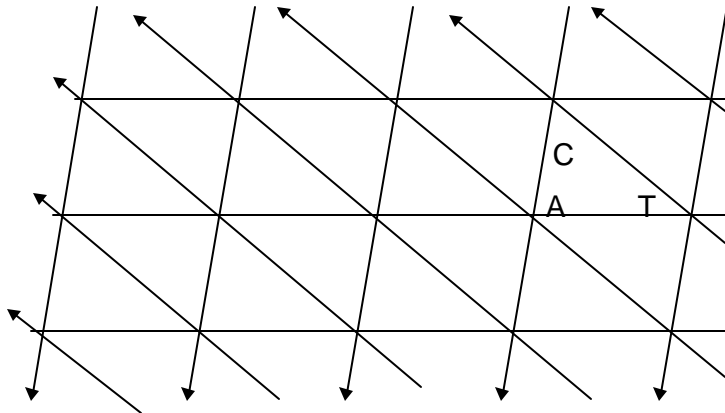


**Fase 4**

Leerders moet nou hierdie ontdekking ondersoek op ander parallelogramroosters wat bestaan uit kleiner of groter parallelogramme.

**Fase 5**

Leerder skryf in sy eie woorde eksplisiet sy ontdekking neer. Infasering van tegniese woorde geskied nou, soos die gelyke hoeke van leer wat ons ooreenkomstige hoeke noem.

**3.6.2.3 Aktiwiteit 3 (Geddes 1992: 51)****Driehoekrooster****Fase 1**

Toon driehoek CAT op die rooster aan deur die sye met donker kleur te omlyn.

**Fase 2**

Kies drie verskillende helder kleure. Met die eerste kleur, kleur hoek C in en ook al die ander hoeke wat naby aan punte C, A en T lê en wat gelyk is aan hoek C. Motiveer (sae of lere). Met jou tweede keuse van kleur, kleur hoek A in en ook al die ander hoeke wat naby aan punte C, A en T lê en wat gelyk is aan hoek A. Motiveer (sae of lere). Met jou derde keuse van kleur, kleur hoek T in en ook al die ander hoeke wat naby aan punte C, A en T lê en wat gelyk is aan hoek T. Motiveer.

Hier moet die leerder reeds weet dat die som van die hoeke op reguitlyn  $180^\circ$  is.

**Fase 3**

Bestudeer nou jou resultaat. Wat merk jy op ten opsigte van die hoeke rondom punt C? Rondom punt A? Rondom punt T? Vind gestrekte hoek in die ingekleurde diagram. Wat is die kleure van die hoeke waaruit hierdie gestrekte hoek bestaan?

Herhaal hierdie proses met ander gestrekte hoeke in die diagram. Watter kleure het jy gevind? Wat is die kleure van die hoeke van die oorspronklike driehoek CAT? Watter afleiding kan jy maak ten opsigte van die som van die hoeke van driehoek CAT? Dink jy hierdie afleiding is waar vir *alle* driehoeke?

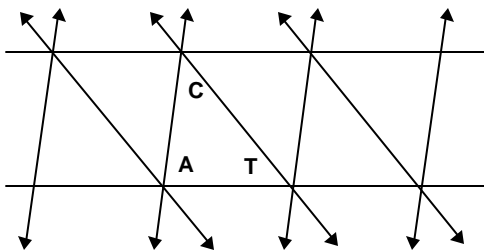
Vrae word gestel totdat leerder eksplisiet kan uitroep dat die som van die hoeke van driehoek  $180^\circ$  is.

**Fase 4**

Leerders moet nou hierdie ontdekking ondersoek op ander driehoekroosters wat bestaan uit kleiner of groter driehoeke.

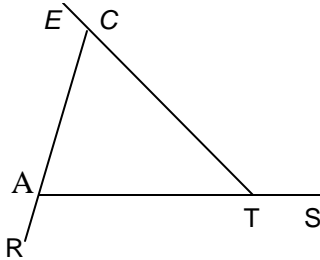
**Fase 5**

Samevatting en opsomming. Bring tegniese woorde in, soos dat verwisselende hoeke gevind word in saag. Laat leerder sy ontdekking in woorde neerskryf.

**3.6.2.4 Aktiwiteit 4 (Geddes 1992: 51)****Driehoekrooster met leerder se ingekleurde diagram****Fase 1**

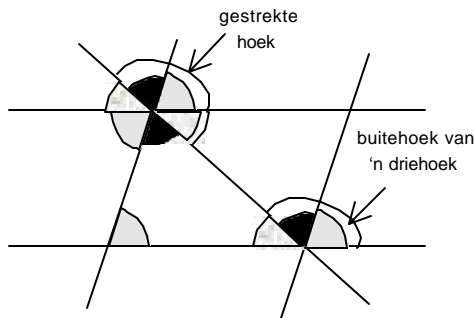
In die volgende figuur noem ons hoek CTS buitehoek van driehoek CAT.

Buitehoek word gevorm deur een sy van driehoek met die verlenging van aangrensende sy. Is hoek ACE ook buitehoek van driehoek CAT? Hoekom? Identifiseer nog ander buitehoek.



### Fase 2

Onderzoek die grootte van buitehoek in jou ingekleurde diagram in relasie tot die binnehoeke van driehoek CAT. Doen dit vir verskillende buitehoeke. Skryf jou waarnemings neem. Ruil gedagtes met jou maat. Deur die inkleur van hoeke word die relasies visueel sigbaar.



### Fase 3

Kon jy enige verband of relasie tot patroonvorming waarneem? Watter afleiding kan jy maak ten opsigte van buitehoek van driehoek CAT en die som van die binnehoeke van driehoek CAT? Motiveer jou afleiding. Dink jy hierdie afleiding is waar vir *alle* driehoeke en buitehoeke?

### Fase 4

Leerders moet nou hierdie ontdekking ondersoek op ander driehoekroosters wat bestaan uit kleiner of groter driehoeke.

### Fase 5

Samevatting en opsomming en veralgemening.

### 3.6.2.5 Aktiwiteit 5 (Geddes 1992: 43-49)

#### Parallelogramrooster en mini-deduksies

Alvorens hierdie aktiwiteit gedoen kan word, moet leerders reeds bekend wees met verwisselende binnehoeke (saag) en ooreenstemmende hoeke (leer). Die doel met hierdie aktiwiteit is om leerders sekere hoeke te laat identifiseer (Vlak 0); om sekere verwantskappe raak te sien (vlak 1) en om sekere informele afleidings te maak (Vlak 2).

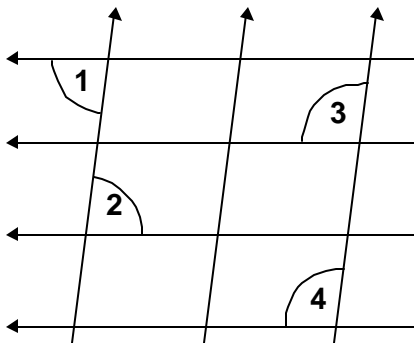
#### Fase 1

Deel een (vlak 0) behels die identifisering van sekere hoeke deur herkenning en gebruik van die beginsels:

As lyne parallel is, dan is verwisselende binnehoeke gelyk

As lyne parallel is, dan is ooreenstemmende hoeke gelyk.

Onderstaande diagram is uit parallelogramrooster gehaal



Gebruik een kleur en kleur paar ooreenkomstige hoeke in. Is die hoeke gelyk?

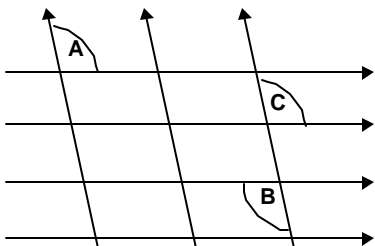
Waarom of waarom nie? Skryf neer watter hoeke jy identifiseer en gee jou redes. Die leerder moet kan neerpen dat hoek 3 = hoek 4 en ook die beginsel in sy eie woorde weergee.

Gebruik tweede kleur en kleur paar verwissende hoeke in. Is die hoeke gelyk?

Waarom of waarom nie? Die leerder moet neerpen dat hoek 1 = hoek 2 asook die beginsel daarvan aandui.

#### Fase 2

Deel twee (vlak 1) behels tweestap argument/afleiding, naamlik die transitiewe eienskap. Die leerder wat op vlak 1 is, weet hy kan soek vir patrone (verwantskappe).



Ondersoek bostaande diagram wat uit parallelogramrooster gehaal is en verduidelik met motivering hoe om die volgende gevolgtrekking vanuit die gegewe inligting te maak.

Hoek A = hoek C

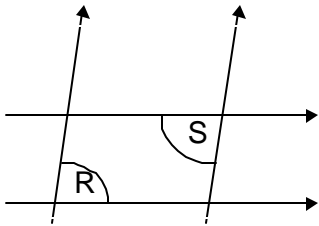
Hoek A = hoek B

Dus is hoek B = hoek C

### Fase 3

Leerders moet nou hierdie gevolgtrekking op ander diagramme wat uit verskillende parallelogramroosters geneem is, ondersoek. Die onderwyser voorsien die verskillende diagramme totdat die leerders die deduksie eksplisiet onder die knie het.

### Fase 4



Deel drie (vlak 2) behels die ‘grand finale’ mini-afleiding deur gebruik te maak van die transitiewe eienskap dat hoek R = hoek S

Dink jy hierdie afleiding is waar vir *alle* parallelogramme?

Die leerders moet die beginsel wat ‘bewys’ of ontdek is, in woorde weergee, naamlik: Die teenoorstaande hoeke van parallelogram is gelyk.

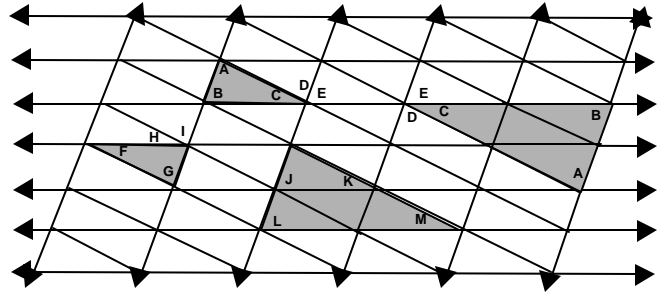
Die leerders moet besef dat sekere afleidings in verband met hoeke byvoorbeeld gedoen kan word, sonder om hulle in werklikheid te meet.

### Fase 5

Samevatting en opsomming en veralgemening. In hierdie aktiwiteit kan die leerder enige bekende tegniek gebruik soos: Verskuiwings, sae en lere, of inkleur van hoeke.

### 3.6.2.6 Aktiwiteit 6 (De Villiers 1997: 44)

#### Driehoekrooster



#### Fase 1

Tesselasies kan ook nuttige konteks bied waarbinne analise van die eienskappe van meetkundige konsepte gedoen kan word (Van Hiele denkvlak 1) asook die logiese verduideliking van die analise (Van Hiele vlak 2). Laat leerders driehoek tesselasiepatroon konstrueer soos in die bostaande figuur aangedui, of voorsien afdrucke van so tesselasiepatroon.

#### Fase 2

Wat merk jy op ten opsigte van hoeke A en B in verhouding tot hoeke D en E? Hoekom? Wat kan jy daaruit aflei? Geld jou waarneming vir die klein sowel as die groot driehoek ABC? Uit die vir hóm bekende prinsipe van sae en lere kan die leerder sien dat hoek  $A = \text{hoek } D$  as gevolg van saag wat gevorm word. En dat hoek  $B = \text{hoek } E$  as gevolg van leer wat gevorm word. Herhaal die oefening met driehoek HGF

#### Fase 3

Deur vrae te stel kan die onderwyser die leerder rig totdat hy uiteindelik op eksplisiete wyse die afleiding kan formuleer dat aangesien die drie hoeke C, D en E op reguit lyn lê, die som van die binnehoeke van driehoek ABC gelyk moet wees aan die grootte van gestrekte hoek. Die leerder kan verder uit die rooster lees dat hierdie ontdekking geld vir enige grootte hoek en vir enige grootte driehoek in watter oriëntasie ookal. Dit baan die weg vir veralgemening.

Sulke informele analyses en deduksies is duidelik net tree weg van die standaard formele Euklidiese bewyse.

#### Fase 4

Leerders moet nou aangemoedig word om hierdie fenomeen in ander tesselasiepatrone te ondersoek. Wye verskeidenheid take kan gedoen word.

#### Fase 5

As geheelbeskouing, moet leerders in hul eie woorde die deduksiestappe met motivering probeer neerpen en ook die finale gevolgtrekking neerskryf.



### 3.6.3 Opsomming

Tot sover is getrag om die spiraalbenadering in die Van Hiele Model aan te toon, deur eerstens die konsep van vierhoeke, en meer spesifiek dié van parallelogram as meetkundefiguur, aan die leerder, oor die verskillende denkvlakke heen, met behulp van die vyf onderrigfases, te onderrig.

Tweedens is die spiraalbenadering in die Van Hiele Model verder belig, deur die konsep van parallelisme verder te ontwikkel deur gebruik te maak van die organiseringsbeginsel van parallelisme oor die denkvlakke heen met klem op die gebruik van transformasiemeetkunde, tydens die onderrigfases.

Die belangrikheid daarvan dat die onderwyser die konsep *nie* in isolasie nie, maar binne kontekstuele verband binne die meetkunde, interrelasionêr moet onderrig, is uitgewys. Die skep van substrukture en strukturering tydens die onderrig van die spiraalbenadering is beklemtoon. As hierdie strukturering oor die denkvlakke heen en oor die grade heen nie plaasvind nie, ondervind die leerder verlies aan konseptuele insig en begrip en word die gevaar van denkvlakreduksie en stagnasie werklikheid (kyk par. 6.6). Die kwelpunt dat leerders in die verlede algoritmes en stellings paraat geleer het, sonder om dit in probleme te kon toepas, *kan* deur die toepassing van die Van Hiele Model suksesvol opgelos word. Die spiraalgebaseerde kurrikulum, die denkvlakke en ook die onderrigfases in die VHM kan ideaal aangewend word om geïntegreerde neerslag van meetkundeonderrig in die praktyk te bewerkstellig. Die Van Hiele kenmerke kan die drie didaktiese komponente, te wete die leerinhoud, die leerder en die onderwyser tydens die meetkundeonderrig- en leergebeure tot ordelike integrasie en harmonieuse samehang bring. As slotgedagte word die denkvlakindeling soos deur Fuys *et al.* (kyk par. 4.4.1) gebruik om die RNCS se assesseringstandaarde oor grade 6 tot 9 spesifiek ten opsigte van parallelisme, daarvolgens aan te dui. Skematiese voorstelling gee laastens samevatting van die spiraalbenadering soos dit in hierdie Hoofstuk bespreek is.

## 3.7 Samevatting

### 3.7.1 Assesseringstandaarde

Die denkvlakindeling, soos gedoen deur Fuys *et al.* (kyk par. 3.4.1) word gebruik om die RNCS se assesseringstandaarde oor grade 6 tot 9 (kyk par. 4.4.3.3) spesifiek ten opsigte van parallelisme, aan te dui.

**Graad 6** (RNCS 2002b: 49-51) se assesseringstandaarde

Onder *vierhoeke* (parallogramme ingesluit) kom onder andere die volgende voor. Ons weet die leerder het LU3 bereik as die leerder:

**Vlak 0:** Reghoeke en parallogramme in meetkunderangskikkings kan *herken*, identifiseer en kan benoem, met die klem op die ooreenkomste en verskille tussen reghoeke en parallogramme.

**Vlak 1:** Beskryf en klassifiseer reghoeke en parallogramme in terme van *eienskappe*, wat insluit: vlakke; hoeke en sye; lengte van sye; grootte van hoeke.

**Graad 7** (RNCS 2002b: 80-83) se assesseringstandaarde.

Onder *vierhoeke* (parallogramme ingesluit) kom onder andere die volgende voor. Ons weet die leerder het LU3 bereik as die leerder:

**Vlak 1:** Verskillende meetkundefigure (o.a. parallogramme, reghoeke en driehoeke) in terme van *eienskappe* kan beskryf. Die eienskappe moet insluit: hoeke, sye en aansigte; sye en hoeke van veelhoeke met die fokus op driehoeke en vierhoeke en parallelle sye.

**Graad 8** (RNCS 2002b: 80-83) se assesseringstandaarde.

Onder *vierhoeke* en *driehoeke* kom onder andere die volgende voor. Ons weet die leerder het LU3 bereik as die leerder:

**Vlak 0:** Verskillende vierhoeke (o.a. parallogramme) en driehoeke in wiskundeopset kan *identifiseer, visualiseer en benoem*.

**Vlak 1:** Meetkundefigure (o.a. parallogramme) in terme van *eienskappe* binne konteks kan beskryf. Die eienskappe moet insluit, hoeke, sye en diagonale en hul *relasionêre* verband.

**Vlak 2:** Gebruik woordeskat om parallelle lyne wat deur snylyn gesny word, loodlyne, snylyne en driehoeke in terme van hoekrelasies te beskryf (bv. vertikale, teenoorstaande en ooreenstemmende hoeke).

**Graad 9** (RNCS 2002b: 80-83) se assesseringstandaarde.

Onder *vierhoeke* en *driehoeke* kom onder andere die volgende voor. Ons weet die leerder het LU3 bereik as die leerder:

**Vlak 0:** Meetkundefigure in wiskundeopset kan *identifiseer, visualiseer* en benoem (parallogramme).

**Vlakke 1 en 2:** Meetkundefigure in terme van *relasionêre verband van eienskappe*, binne konteks kan beskryf en kan regverdig. Die eienskappe moet insluit: kongruensie en reguitlyn-meetkunde (parallege lyne); transformasies.

**Vlak 3:** Gebruik die meetkunde van reguitlyne (parallege lyne) en driehoeke om probleme op te los en om *relasies tussen meetkundefigure te kan regverdig*.

Die volgende skematiese voorstelling bring al die hoofkomponente wat in hierdie Hoofstuk bespreek is, byeen. Alhoewel ons in hierdie navorsing hoofsaaklik op grade R tot 9 konsentreer, voeg ons vir kontinuasie van die spiraalbenadering ook grade 10 tot 12 in hierdie voorstelling by.

### 3.7.2 Tabel 7 Skematiese voorstelling

Graad R – 6 <b>Denkvlak:</b> is op 0, word gerig na 1	Graad 7- 9 <b>Denkvlak:</b> Is op 1, word gerig na 2	Graad10 –12 <b>Denkvlak:</b> is op 2, word gerig na 3
<b>LEERINHOUD:</b> Parallelisme Gelykheid van hoeke.	<b>LEERINHOUD:</b> Parallelisme Gelykheid van hoeke	<b>LEERINHOUD:</b> Parallelisme Gelykheid van hoeke
<b>LEERDER:</b> <b>Weet:</b> Vorm van driehoeke en parallelogramme, sye, vlakke, ewewydige lyne. <b>Weet nie:</b> Eienskap van parallelogram. Gelykheid van hoeke. Som van hoeke van driehoek is 180°.	<b>LEERDER:</b> <b>Weet:</b> Som van hoeke van driehoek is 180° (visueel-ingekeur). Teenoorstaande hoeke van parallelogram is gelyk (visueel- ingekeur). <b>Weet nie:</b> Kan nie uit bekende prinsipe soos sae en lere: a) logiese redenasies formuleer nie en b) informele deduksie doen nie.	<b>LEERDER:</b> <b>Weet:</b> Eienskap van parallelogram. Gelykheid van hoeke. Kan insien dat ordening in relasies kan plaasvind. Kan informeel bewys dat die som van hoeke van driehoek gelyk is aan 180°. <b>Weet nie:</b> Formele deduksie.
<b>ONDERWYSER</b> Gebruik aktiwiteite en lei leerder tot visueel-konseptuele insig en begrip van eienskappe en relasies (ingekeur) Onderrigfase 1 tot 5 in Aktiwiteite	<b>ONDERWYSER</b> Uit bekende prinsipes soos sae en lere onderrig Informele Deduksie  Onderrigfase 1 tot 5 in Aktiwiteite	<b>ONDERWYSER</b> Uit parallelisme as ordening- beginsel onderrig Formele Deduksie  Onderrigfase 1 tot 5 in Aktiwiteite

In hierdie hoofstuk is die spiraalbenadering binne die denkvlakke, en die onderrigfases van die VHM ondersoek. In Hoofstuk 2 is die VHM se onderbou asook die kurrikuleringsimplikasies wat die model inhou bespreek. In die volgende hoofstuk word die RNCS bekend gestel tesame met bespreking van die didaktiese onderbou van die RNCS.

## HOOFSTUK 4

### DIE SKOOLWISKUNDEKURRIKULUM (GRAAD R-9)

#### 4.1 Agtergrond en geskiedenis

Kurrikulumverandering in post-apartheid-Suid-Afrika het onmiddellik na die 1994-verkiesing begin toe die Nasionale Onderwys-en-Opleidingsforum met proses van sillabushersiening en vakrasionalisering begin het. Die dokument *Die Lewenslange Leer deur Nasionale Kurrikulumraamwerk* (1996) was die eerste belangrike kurrikulumverklaring van nuwe Suid-Afrika. Dit is gerugsteun deur beginsels uit die Witskrif oor Onderwys en Opleiding (1995), die Suid-Afrikaanse Kwalifikasie-Owerheidswet (SAKO wet nr.58 van 1995) en die Wet op Nasionale Onderwys-beleid (nr.27 van 1996). In terme van die Witskrif, het dit die behoefte aan verskuiwing van die tradisionele doelwitte-en-oogmerke-benadering na uitkomsgebaseerde onderwys benadruk (DoE 2002a: 4-5). Die Departement van Onderwys (1997a: 6) het die volgende tabel saamgestel en toon van die verskille tussen die tradisionele (ou) kurrikulum en die nuwe (uitkomsgebaseerde) kurrikulum:

**Tabel 8 Tradisionele- versus Uitkomsgebaseerde Kurrikulum**

<b>OLD APPROACH</b>	<b>NEW APPROACH</b>
Passive learners	Active learners
Exam driven	Ongoing assessment of learners
Rote-learning	Critical thinking, reasoning, reflection and action
Syllabus is content-based and broken down into subjects	An integration of knowledge; learning is relevant and connected to real-life situations
Textbook/worksheet bound; educator-centered	Learner-centered; educator is facilitator; educator is constantly using group work and team work to consolidate the approach

Syllabus is rigid and non-negotiable	Learning programmes are guides to allow educators to be innovative and creative in designing programmes
Educators responsible for learning; Motivation depends on the personality of the educator	Learners take responsibility for their learning; motivated by constant feedback and affirmation of their worth
Emphasis on what the educator hopes to achieve	Emphasis on the outcomes (what learners become and understand)
Content placed into rigid time frames	Flexible time frames allow learners to work at their own pace
Curriculum development process is not open to public comment	Comment on input from the wider community is encouraged

Van der Horst en McDonald (1997: 27) is van mening dat sommige vergelykings in bostaande tabel nie ware weergawe is van die ou bedeling nie. Hulle wys daarop dat, alhoewel daar inderdaad onderwysers was wat geen pro-aktiewe werksetiek gehad het nie, daar in die ou bedeling baie uitstekende onderwysers was wat wel vir jare

...employed methods purported to be typical of an outcomes-based approach. These educators have placed a high priority on learner participation, ...have encouraged learners to think and solve problems, and have guided learners to deep understanding.

Nadat die dokument *Lewenslange Leer deur Nasionale Kurrikulumraamwerk* in 1996 verskyn het, is daarna in Oktober 1997, die *Verklaring van die Nasionale Kurrikulum vir Graad R tot 9* in terme van Goewermentskennisgewing 1445 gepubliseer. Hierdie Verklaring sou voortaan bekend staan as *Kurrikulum 2005* (K2005) wat sedert 1998 as onderwyskurrikulum in skole geïmplementeer word (DoE 2002a: 5). In Desember van dieselfde jaar is *Die Assesseringsbeleid in die Algemene-Onderwys-en-Opleidingsband vir Graad R-9* ingestel. Die nuwe nasionale onderwyskurrikulum K2005 is soos volg ontwerp.

## 4.2 Die oorspronklike verklaring: Kurrikulum 2005

Ons vind die volgende definisie vir K2005 in die naslaanlys van die RNCS (2002b: 101).

Curriculum 2005: The first version of the post-apartheid National Curriculum Statement. That 1997 education policy document gives a framework for Early Childhood Development, General Education and Training, Further Education and Training, and Adult Basic Education and Training.

Dreyer (1999: 5) noem dat ten einde geïntegreerde en waarlik nasionale benadering tot onderwys en opleiding te verseker, moes voorafbepaalde en aanvaarde nasionale uitkomst bepaal en gevolg word. Om hierdie doel te bereik, is Nasionale Kwalifikasie Struktuur (NKS) ontwikkel, wat die vlakke, bande (“bands”) en tipe kwalifikasies en sertifikate wat in onderwys en opleiding in die vooruitsig gestel word te spesifiseer. Die Departement van Onderwys (1997a: 30-31) se uiteensetting van dié spesifikasies het Dreyer (1999: 7) soos volg saamgevat. Die NKS bestaan uit agt vlakke met drie geïdentifiseerde bande, te wete:

- NKS Vlak 1: Algemene-Onderwys-en-Opleidingsband. Die tien verpligte skooljare wat uit die Grondslagfase (grade R-3), die Intermediêre fase (grade 4-6) en die Senior fase (grade 7-9) bestaan. Parallel aan hierdie fases is Basiese Onderwys vir Volwassenes vlakke 1 tot 4. Albei kulmineer in Algemene Onderwys- en Opleiding-sertifikaat. Onderwys op hierdie vlak is verpligtend en ‘gratis’.
- NKS Vlakke 2, 3 en 4: Verdere-Onderwys-en Opleidingsband. Dit stem ooreen met die huidige grade 10 tot 12 wat ook opleiding by kolleges en ander opvoedkundige instellings insluit en kulmineer in Sertifikaat in Verdere Onderwys en Opleiding. Onderwys op hierdie vlak sal vrywillig en heel moontlik baie duur wees.
- NKS Vlakke 5,6,7 en 8 Hoër Onderwys en Opleidingsband wat ooreenstem met die tradisionele tersiêre onderwys.

In die nuwe kurrikulum moes onderwysstandaarde nie verlaag word nie, en vir dié doel is die Suid-Afrikaanse Kwalifikasie-Owerheid (SAKO) in werking gestel. Volgens Dreyer (1999: 7-8) bepaal SAKO die standaarde vir die verskillende vlakke en sertifikate vir elk van bogenoemde drie bande.

SAKO het in 1995 'n aantal kruiskurrikulêre uitkomstes (later in die RNCS (2002b: 1)) genoem die *kritieke en ontwikkelingsuitkomstes* geïdentifiseer waarop die ontwikkeling van die kurrikulum gebaseer moet word. Hierdie uitkomstes fundeer leer op *alle* vlakke van die onderwys en is in die grondwet van Suid-Afrika gesetel. Die Nasionale Onderwysdepartement moes dus 'n nuwe kurrikulum (K2005) ontwerp wat voldoen aan die vereistes van die KNS en gebaseer moet wees op bogenoemde uitkomstes van SAKO. Hulle het begin deur wye terreine van verwante kennis te identifiseer wat *Leerareas* genoem word.

Dreyer (1999: 9) noem dat vakke soos ons tradisioneel daaraan gewoond was (Aardrykskunde, Geskiedenis, en Biologie) nie meer in die Algemene Onderwys- en Opleidingsfase onderrig word nie. In plaas daarvan sal alle leer gebaseer wees op agt leerareas (groepe verwante kennis, begrip, vaardighede, waardes en houdings) wat die Raad van Onderwysministers identifiseer het. Hierdie leerareas behels die volgende:

Languages; Mathematics; Natural Sciences; Social Sciences; Arts and Culture; Life Orientation; Economic en Management Sciences and Technology (RNCS 2002b: 2)

Vir elkeen van hierdie leerareas is afsonderlike spesifieke uitkomstes (later gekonsolideer tot *leeruitkomstes*) ontwikkel wat voortvloei uit die kritieke en ontwikkelingsuitkomstes. Die nuwe kurrikulum is verder aan die hand van agt ontwerpkenmerke ontwerp.

#### **4.2.1 Die ontwerpkenmerke van Kurrikulum 2005**

Volgens die Departement van Onderwys (2002a: 4-5) het die Wet op Nasionale Onderwysbeleid (nr. 27 van 1996) voorsiening gemaak vir die ontwikkeling van die volgende kurrikulum-ontwerpelemente om 'n uitkomstgebaseerde benadering te ondersteun:

- Critical Cross-Field Outcomes (later to be known as the critical and development outcomes, and first formulated in the South African Qualifications Authority act of 1995)
- Specific Outcomes
- Range Statements
- Assessment Criteria
- Performance Indicators
- Notional Time and Flexi-Time
- Continuous Assessment, Recording and Reporting (DoE 2002a: 4-5).



Addisionele kurrikulumontwerpselemente is in daaropvolgende jare geformuleer en ingesluit, naamlik:

- Phase Organisers
- Programme Organisers
- Expected Levels of Performance
- Learning Programmes.

Hierdie nuwe kurrikulum is in 1998 in skole geïmplementeer en in die jaar 2000 is dit deur Ministeriële Komitee hersien. Die hersieningsopdrag was om K2005 nie alleenlik te versterk nie, maar ook om dit te vereenvoudig (“to streamline”) (DoE 2002a: 5).

Die Raad van Onderwysministers het in Junie 2000 die kurrikulumaanbevelings van die Hersieningskomitee aanvaar en die Kabinet het in Julie 2000 besluit:

The development of a National Curriculum Statement, which must deal in clear and simple language with what the curriculum requirements are at various levels and phases, must begin immediately. Such a Statement must also address the concerns around curriculum overload and must give a clear description of the kind of learner in terms of knowledge, skills, values and attitudes - that is expected at the end of the General Education and Training band (DoE 2002a: 6).

Die Hersieningskomitee het aanbeveel dat die versterking van die kurrikulum vereis dat die ontwerpkenmerke daarvan gerasionaliseer en die taal vereenvoudig moet word deur die daarstelling van ’n gewysigde Nasionale Kurrikulumverklaring (die RNCS). Die komitee het verder voorgestel dat die RNCS die ontwerpkenmerke van agt na drie verminder, naamlik:

- Critical and developmental outcomes;
- Learning outcomes;
- Assessment standards (RNCS DoE 2002a: 5).

Die Hersieningskomitee het verder ook aanbeveel dat die RNCS kurrikulum en assessering moet koördineer. Daarbenewens het dit voorgestel dat implementering deur die verbetering van onderwyser-oriëntering en onderwysersopleiding, leersteun-materiaal en provinsiale ondersteuning versterk moes word. Die komitee het ook die aanpassing van die tydraamwerk vir implementering aanbeveel. Die hersiening is deur ongeveer 150 kurrikulum-ontwikkelaars uit die hele onderwysgemeenskap begin, met die doel om K2005 te vereenvoudig en te versterk. Die **RNCS** is die resultaat van daardie proses.

### **4.3 Die hersiene verklaring: Revised National Curriculum Statement**

Die RNCS is nie nuwe kurrikulum nie, maar slegs vereenvoudiging wat trou bly aan die beginsels, doelstellings en kern van K2005 en die verbintenis tot uitkomsgebaseerde onderwys bevestig (DoE 2002a: 6). Die filosofie en praktyk van uitkomsgebaseerde onderwys bly steeds die onderliggende onderwysfilosofie van die hersiene kurrikulum. Terwyl die kurrikulumhersieningsproses voortgegaan het, het die praktyk in skole van graad R tot 9 in terme van die vorige beleid voortgegaan. Wanneer die RNCS beleid word, sal dit K2005 vervang. Implementering van die RNCS in die Grondslagfase is vir 2004 beplan (DoE 2002a: 6).

#### **4.3.1 Die ontwerpkenmerke van die Revised National Curriculum Statement**

Die RNCS vir Graad R tot 9 (Skole) bestaan as dokument uit *Oorsig (RNCS 2002a)* en agt Leerareaverklarings wat as bylaes in 2002 gepubliseer is. Die agt Leerareaverklarings is: Tale; Wiskunde; Natuurwetenskappe; Tegnologie; Sosiale Wetenskappe; Kuns en Kultuur; Lewensoriëntering; en Ekonomiese en Bestuurswetenskappe. Die leerareaverklaring wat in hierdie studie gebruik is, is die *Leerareaverklaring vir Wiskunde (RNCS 2002b)*. Leer in elkeen van die Leerareas word deur die kritieke uitkomstes en ontwikkelingsuitkomstes gerugsteun.

##### **4.3.1.1 Die kritieke- en ontwikkelingsuitkomstes**

Die kritieke uitkomstes saam met die ontwikkelingsuitkomstes is gesetel in die grondwet van Suid-Afrika en vorm die basis waarop die ontwikkeling van die nuwe kurrikulum gebaseer is. Die kritieke uitkomstes stel leerders wat tot die volgende in staat sal wees, in die vooruitsig:

The critical outcomes envisage learners who are able to:

1. organise and manage themselves and their activities responsibly and effectively;
2. work effectively with others as members of a team, group; organisation and community;
3. communicate effectively using visual, symbolic and/or language skills in various modes;
4. collect, analyse, organise and critically evaluate information;
5. identify and solve problems and make decisions using critical and creative thinking;
6. demonstrate an understanding of the world as a set of related systems by recognising that problem-solving contexts do not exist in isolation;
7. use science and technology effectively and critically, showing responsibility towards the environment and the health of others (RNCS 2002b: 1).

Die volgende ontwikkelingsuitkomstes is geformuleer wat leerders in die vooruitsig stel wat in staat

is om te:

- reflect on and explore a variety of strategies to learn more effectively;
- participate as responsible citizens in the life of local, national, and global communities
- be culturally and aesthetically sensitive across a range of social contexts;
- explore education and career opportunities; and
- develop entrepreneurial opportunities (RNCS 2002b: 1-2).

Die kritieke uitkomst, saam met die ontwikkelingsuitkomst vorm die *kernuitkomst* en fundeer leer op *alle* vlakke van die onderwys en word in die Suid-Afrikaanse Kwalifikasiewet (1995) vervat. Volgens die Departement van Onderwys (2002a: 11) poog die hersiene kurrikulum om visie van die soort burger wat in demokratiese samelewing uit ons skoolstelsel te voorskyn behoort te kom, te beliggaam en te handhaaf. Bo en behalwe hierdie kernuitkomst, identifiseer die Departement van Onderwys verder deur middel van die individuele Leerareaverklarings (kyk par. 4.4.3.3) die doelwitte, verwagtinge en uitkomst wat deur verwante leeruitkomst en assesseringstandaarde bereik moet word (DoE 2002a: 11-12).

#### **4.3.1.2 Leeruitkomst en assesseringstandaarde**

Elke Individuele Leerareaverklaring identifiseer die hoofleeruitkomst wat teen die einde van graad 9 bereik moet word. Elke leerareaverklaring spesifiseer ook *omvattend* die assesseringstandaarde wat dit moontlik sal maak om die leeruitkomst te bereik. Assesseringstandaarde word vir elke graad omskryf en beskryf die diepte en wydte van wat leerders behoort te weet en waartoe hulle in staat moet wees. Elke leerareaverklaring se assesseringstandaarde toon hoe konseptuele en vaardigheidsontwikkeling oor tyd kan plaasvind. Assesseringstandaarde kan sowel binne grade as oor grade heen geïntegreer word. Die bereiking van optimale verhouding tussen integrasie oor leerareas heen (waar nodig en opvoedkundig korrek) en konseptuele progressie is sentraal tot hierdie kurrikulum. Aldus die RNCS (2002b: 2).

Die Leerareaverklaring wat in hierdie studie bestudeer is, is die *Leerareaverklaring vir Wiskunde (RNCS 2002b: 1-112)*. In hierdie Leerareaverklaring (RNCS 2002b: 6) is die unieke kenmerke en omvang van die Wiskundeleerarea in vyf leeruitkomst (LU) saamgevat. Die leerkategorieë vir hierdie leeruitkomst is:

LU 1: Numbers, Operations and Relationships

LU 2: Patterns, Functions and Algebra

LU 3: Space and Shape (Geometry)

LU 4: Measurement

LU 5: Data Handling

Hierdie studie fokus op LU3, naamlik die meetkundeleeruitkomste (kyk par. 4.4.3.3 ).

Vervolgens word daar gekyk na die didakties-opvoedkundige onderbou van die RNCS soos gesetel in die uitkomsgebaseerde benadering tot onderwys.

#### **4.4 Die didaktiese onderbou van die Revised National Curriculum Statement**

Uitkomsgebaseerde onderwys (UGO) se filosofie en praktyk word beskou as die onderliggende onderwysbenadering vir die nuwe kurrikulum in Suid-Afrika. Voor die handliggend is nou die vraag: Wat word bedoel met uitkomste?

##### **4.4.1 Die konsep “uitkomste”**

Schoeman en Manyane (2002: 179) redeneer dat uitkomste nie iets nuuts in onderwys is nie, maar dat leeruitkomste, “...(formerly expressed as aims, goals, objectives) have always been central to the teaching activity although they were not referred to as learning outcomes.” Ter verduideliking haal hulle McCown, Driscoll en Roop (1996: 361) se definisie van doelwit aan:

Objectives are the specific statements of goals which include the behaviour learners should be able to perform as a result of instruction, the condition of their performances and the criteria used to judge attainment of the goals.

Dit blyk dat Schoeman en Manyane se redenasie meriete het wanneer ons hierdie uitspraak vergelyk met die volgende outeurs se verskillende beskrywings van leeruitkomste.

- Spady(1993:5) definieer die konsep as “...a culminating demonstration of the entire range of learning experiences and capacities that underlie it.”
- Volgens Landsberg en Burden (1999: 30) kan leeruitkomste beskou word as die resultate van leergebeure wat tot uiting kom in die kennis, vaardighede, waardes en houdings wat leerders in spesifieke kontekse moet kan toepas en kan demonstreer.
- Vir die Departement van Onderwys (2001: 8) is leeruitkomste dít wat leerders moet weet (kennis, inligting, vaardighede, houdings en waardes), en dít waartoe leerders in staat moet wees aan die einde van graad, fase of band.

- McCown *et al.* (1996: 369-370) beskou leeruitkomst as die kulminasie van die leergebeure of die indikasie van waartoe leerders in staat is, aan die einde van die leergebeure.
- Cas Olivier (1999: 242) sê kort en saaklik: “Outcomes: Contextually demonstrated end-products of the learning process.”

Schoeman en Manyane (2002: 178) wys vervolgens daarop dat beide doelwitte *en* leeruitkomst die onderrig- en leergebeure *stuur* asook die assesseringsproses *rig*. Hulle noem verder dat die Departement van Onderwys (1997c: 40) self ook ooreenkoms tussen doelwitte en leeruitkomst suggereer, “...given that knowledge, skills, values and attitudes are attainment targets with which objectives are also concerned.” Die groot verskil egter tussen die ou tradisionele kurrikulum wat inhoudgedrewe was, en uitkomsgebaseerde kurrikulum wat uitkomsgedrewe is, lê in die wyse waarop daar gekurrikuleer word. In Spady (1988: 6) se woorde word hierdie verskil mooi saamgevat:

In Outcomes-Based Education ...you develop the curriculum from the outcomes you want students to demonstrate, rather than writing objectives for the curriculum you already have.

Maar waar lê die wortels van uitkomsgebaseerde onderwys as benadering tot die onderrig- en leergebeure?

#### **4.4.2 Die oorsprong van Uitkomsgebaseerde onderwys**

Die teoretiese oorsprong van UGO kan volgens Van der Horst en McDonald (1997: 13) gevind word in integrasie van vier onderwysbenaderings naamlik, “*Educational objectives; Competency-Based Education; Mastery Learning and Criterion-Referenced Assessment.*” Baie van die kenmerke van hierdie vier benaderings word in UGO weerspieël.

##### **Opvoedkundige doelwitte: (Educational objectives)**

Dit was in lande soos die Verenigde State van Amerika en Engeland waar die opvoedkundige doelwitbenadering eerste impak gehad het. Die baanbrekerswerke van Ralph Tyler en Benjamin Bloom het hierin groot rol gespeel. In 1950 het Tyler werk “Basic Principles of Curriculum and Instruction” gepubliseer waarin hy veral klem lê op doelwitformulering. Van der Horst en McDonald (1997: 9) haal twee aspekte wat vir Tyler tydens doelwitformulering van kardinale belang is as volg aan:

- what the learner must be able to do after instruction and
- the content to which the learner's action applies.

Dit weerspieël nogal die definisie van die konsep uitkomst soos Spady (1993: 5) dit hierbo geformuleer het, “...a culminating demonstration of the entire range of learning experiences and capacities that underlie it.”

Die welbekende taksonomie van Bloom waar intellektuele doelwitte binne 'n stelsel geplaas word en daar vanaf die eenvoudige na die komplekse beweeg word, is al meermale in kurrikulumontwikkeling en onderrigmodelle gebruik. Die taksonomie bied 'n raamwerk waarbinne doelwitte (uitkomst) georganiseer en geassesseer kan word. In Bloom se taksonomie word daar beweeg vanaf kennis deur insig; na toepassing; analise; sintese en evaluering. Hierdie taksonomie is by uitstek in die opvoedkundige doelwitbenadering gebruik.

### **Die Bekwaamheidsgebaseerde onderwys: (Competency-Based Education)**

Hierdie benadering is in die sestigerjare in die Verenigde State van Amerika gebruik en ondersteun die idee dat alle leer individueel is en dat die individu (leerder of onderwyser) doelwitgerig is. Verder word die onderrig- en leergebeure gefasiliteer as beide onderwyser en leerder weet wát met die onderrig- en leergebeure beoog word. Hierdie benadering het ongelukkig net op een aspek gekonsentreer, naamlik spesifieke vaardigheid (dikwels in isolasie) wat leerders moet kan bereik. Daarteenoor fokus UGO op drie verskillende aspekte: kennis; vaardighede en houdings (Van der Horst en McDonald 1997: 11).

### **Bemeesteringsleer: (Mastery Learning)**

Volgens Zulu (2003: 22) het Bloom in 1968 voortgebou op die werk van John B. Carroll wat van mening was dat leer nie deur 'n leerder se leervermoë bepaal word nie, maar eerder deur die tempo waarteen daar geleer word. Bloom het hierdie begrip uitgebou en van die standpunt uitgegaan dat 90-95% leerders die meeste doelwitte (uitkomst) kan bemeester. Al wat nodig is, is dat die regte voorwaardes in plek moet wees. Om hierdie voorwaardes in plek te kry, is die taak van die onderwyser, daar hy moet vasstel waarom die leerder nie die betrokke uitkomst kan bemeester nie en dan dienooreenkomstig, onder andere

- meer tyd vir leer toe te staan;

- ander media en verskillende inhoud te voorsien;
  - vas te stel watter vooraf kennis of vaardigheid die leerder kort, om die uitkomst te kan bemeester
- Die kardinale rol van die onderwyser in hierdie benadering kom duidelik in die volgende bespreking van Towers (1992: 293) na vore:

organising instruction, providing learners with regular feedback on their learning progress, giving guidance and direction to help learners to correct their individual learning difficulties and provide extra challenge for learners who have mastered their material.

Van der Horst en McDonald (1997: 12, 32, 123) noem dat Gagné se taksonomie van leeruitkomst (intellektuele vaardighede, kognitiewe strategieë, verbale inligting, houdings, en psigomotoriese vaardighede) met groot sukses toegepas kan word in hierdie benadering asook in UGO.

### **Kriteriumgebaseerde assessering: (Criterion-Referenced Assessment)**

In hierdie benadering word leerderuitkomst aan 'n vaste standaard gemeet en *nie* aan dié van medeleerders nie. Leerder se bemeestering van spesifieke uitkomst kan in hierdie benadering gemeet en geplaas word op 'n skaal van geen bekwaamheid tot uitstekende bedrewendheid. Aan die hand van hierdie skaal word die spesifieke take wat leerder moet doen gemeet. Die kriteriumvlak, asook die minimum vlak vir elke taak kan deur die onderwyser gebruik word om die leerder se vordering te monitor en dienooreenkomstig die onderrig-en leergebeure aan te pas. Assessering speel in UGO 'n kardinale rol en hierdie benadering kan in UGO as 'n uitstekende assesseringswerktuig gebruik word, maar Van der Horst en McDonald (1997: 12-13) maan:

criterion-referenced testing should only form a small part of comprehensive assessment in OBE, ...since in OBE assessment is describe as being ongoing or continuous, meaning that assessment forms an integral part of teaching-learning activities and is not only conducted at the end of a year or semester.

Die oorsprong van UGO lê in 'n snyding van al vier hierdie benaderings en Van der Horst en McDonald (1997: 13-14) som die *Karakteristieke Kenmerke* van UGO wat uit hierdie wortels spruit, soos volg op:

1. Dit wat leerder behoort te leer word duidelik en ondubbelsinnig gestel.
2. Die leerder se vordering word gebaseer op dit wat hy kan demonstreer hy bereik het.
3. Elke leerder se behoeftes word deur 'n verskeidenheid onderrig-strategieë en assesseringsmetodes aangespreek.

4. Elke leerder ontvang die nodige tyd en ondersteuning om sy potensiaal ten volle te ontwikkel.

Die uitkomsgebaseerde benadering tot onderwys word volgens Pretorius (1998: vi) reeds in die kurrikula van lande soos die Verenigde State van Amerika, Kanada, Engeland, Australië, New Zealand en Japan geïmplementeer. Daar is egter verskillende tipes UGO wat geïmplementeer word en die Departement van Onderwys (1997b: 17-20) verwys na die tipes as “ ...traditional, transitional and transformational OBE.” Die verskil in hierdie tipes lê in die verskillende kritieke uitkomst wat elke model spesifiseer asook die verskillende wyses waarop die uitkomst gebruik word om die kurrikulum te struktureer. Lande kan dus grootliks verskil in hul implementering van UGO. Suid-Afrika het besluit om sy uitkomsgebaseerde benadering tot onderwys te skoei op die lees van die transformasie model, maar erken self (1997b: 22) “ ...you will notice that much of our present change may also be described as ‘transitional’, ...after all, we are in a transitional phase.” Die rasionaal vir hierdie keuse van UGO asook die strukturering van die kurrikulum soos dit daaruit voortspruit is reeds in paragrawe 4.2.1 tot 4.2.3 bespreek. Ons kyk ten slotte dan na transformasie UGO soos dit vir die Suid-Afrikaanse konteks geformuleer is.

### **4.4.3 Uitkomsgebaseerde onderwys in Suid-Afrika**

#### **4.4.3.1 Inleiding**

Transformasie UGO is onderwysbenadering wat volgens die Departement van Onderwys (RNCS 2002b: 102) vir die Suid-Afrikaanse konteks as volg gedefinieer word:

a process and achievement-oriented, activity-based and learner-centred education process; in following this approach, Curriculum 2005 and the Revised National Curriculum Statement Grades R-9 (Schools) aim to encourage lifelong learning.

Hierdie UGO-benadering poog volgens Schoeman en Manyane (2002: 176) nie net om die kennis van die leerders te verhoog nie, maar ook om hul kritiese denke, insig, vaardighede, waardes en houdings te ontwikkel. In hierdie benadering word daar meer klem gelê op wat leerders met die kennis wat hul verkry het kan doen, as dat al die feite paraat geken word. “Critical thinking and co-operation is the life-blood of OBE” (DoE 1997b: 20). Inhoud is steeds belangrik, maar dit is alleen van belang as dit die leerder se vaardighede, waardes en houdings kan help ontwikkel. Die UGO-benadering poog om alle leerders met die nodige kennis, vaardighede, waardes en houdings wat hulle benodig vir sukses nadat hulle die skool verlaat het, toe te rus.



Van der Horst en McDonald (1997: 7) beskryf UGO as onderwysbenadering wat onderwysers sowel as leerders noop om die aandag te vestig op:

- The desired end results of each learning process. These desired end results are called the outcomes of learning, ... therefore learners will continuously be assessed to ascertain whether they are making progress.
- The instruction and the learning process that will guide the learners to these results.

Volgens Dreyer (1999: 4) is UGO-beginsel in Suid-Afrika dat die *leergebeure* net so belangrik as die *inhoud* is. Dit beteken dat:

- leerders nie net kennis moet verwerf nie, maar moet verstaan wat hulle leer en in die leergebeure toepaslike vaardighede, houdings en waardes moet ontwikkel;
- leerders aktiewe deelnemers van die leergebeure word en verantwoordelikheid moet aanvaar vir hul eie leer;
- leerders die geleentheid kry om afhangend van hul individuele vermoëns en ontwikkelingsvlakke teen hul eie pas en op verskillende maniere te werk.

UGO word dus gekarakteriseer deur bekwaamheidsgebaseerde, interaktiewe en leerdergesentreerde metodologie.

UGO is daarop gerig om onderwysstelsel só te fokus en só te organiseer rondom dit wat essensieel vir alle leerders is, dat leerders aan die einde van hul leerervaringe sukses behaal. Om dit te bereik word daar volgens Zulu (2003:13) duidelike visie benodig van “...what is important for learners to be able to do; then organising curriculum, teaching and assessment to make sure that learning ultimately happens.” UGO kan dan gesien word as filosofie of benadering wat kurrikulumontwikkeling en kurrikulumimplementering fundeer. Verdere eienskap van transformasie UGO soos gesien in die Suid-Afrikaanse konteks, is die sterk element van konstruktivisme wat prominent is.

#### **4.4.3.2 Uitkomsgebaseerde onderwys en konstruktivisme**

Kgatitsoe (2002: 20) haal (Brooks *et al.* 1993: 34) aan en beskryf konstruktivisme as:

The notion that learners can internalize, reshape and transform knowledge. Learners can create new knowledge. Questioning, investigation, problem generation and solving are integral to constructivism.

Wanneer Kgatitsoe die eienskappe van UGO vir die Suid-Afrikaanse konteks beskryf (2002: 49) noem hy onder andere dat konstruktivistiese onderrigmetodes deur UGO aangemoedig word en omdat UGO in Suid-Afrika leerdergesentreerd is, is dit uit die aard van die saak, ook konstruktivisties. Cliff Malcolm (1999: 103) stel dit soos volg: “Learner-centredness is policy in Curriculum 2005, and gives considerable emphasis to constructivist approaches to learning.” In beide konstruktivisme en UGO kry elke leerder die geleentheid om sy eie kennis te konstrueer en toepassing, kritiese denke en analise deur die leerder is uiters belangrik. Volgens Marlowe (1998: 53-60) voorsien konstruktivisme ideale onderrig-en-leeromgewing (kyk par. 3.2.1) “ ...where learning is promoted ...through questioning, investigation, problem generation and problem solving.” In konstruktivisme speel koöperatiewe leer ook groot rol, maar dit bly steeds die taak van die onderwyser om geskikte leerervaringe te voorsien waardeur leerders deur middel van geïntegreerde take die uitkomst kan bemeester. In die Suid-Afrikaanse konteks verwys ons in UGO na sosiaal- konstruktivisme, aangesien daar ook nog ander beginsels is wat, voortspruitend uit die grondwet, die kurrikulum rugsteun. Dit is onder andere:

- Social Justice
- a Healthy Environment
- Human Rights
- Inclusivity (DoE 2003b: 5).

Dit is dan ook die rede waarom die sosiale element sterk teenwoordig in die UGO-benadering in SA is.

#### **4.4.3.3 Uitkomsgebaseerde onderwys en die Leerareaverklaring vir Wiskunde**

Die *Leerareaverklaring vir Wiskunde (RNCS 2002b: 1-112)* as dokument bestaan uit die verskillende uitkomste (KU, OU en LU) asook uit assesseringstandaarde.

Volgens die Departement van Onderwys (RNCS 2002b: 1) strewende UGO daarna om alle leerders in staat te stel om tot hul maksimum vermoë te presteer. Dit word gedoen deur die leeruitkomste wat aan die einde van die leergebeure bereik moet word, uiteen te sit. Die leeruitkomste en assesseringstandaarde wat in die RNCS vervat word, is vanuit die kritieke en ontwikkelingsuitkomste (kyk par. 4.3.1.1) ontwerp. Die kritieke uitkomste sluit in kernlewensvaardighede vir leerders, soos kommunikasie, kritiese denke, aktiwiteits- en inligtingsbestuur, groep- en gemeenskapswerk, probleemoplossing en evalueringsvaardighede. Die

ontwikkelingsuitkomst is daarop gerig om leerders in staat te stel om doeltreffend te leer en om verantwoordelike, sensitiewe en produktiewe burgers te word (RNCS 2002b: 101).

Die vyf leerkategorieë (kyk par. 4.3.1.2) vir die Wiskundeleerarea wat uit genoemde kernuitkomst voortgespruit het is:

- 1) Getalle, Bewerkings en Verwantskappe.
- 2) Patrone, Funksies en Algebra.
- 3) Ruimte en Vorm.
- 4) Meting en
- 5) Datahantering.

Die leerkategorie van ruimte en vorm is die meetkundekomponent van die Wiskundeleerarea waarop hierdie studie fokus en is in Leeruitkoms 3 (LU3) uiteengesit en lui soos volg:

Learning Outcome 3: Space and Shape (Geometry).

The learner will be able to describe and represent characteristics and relationships between two-dimensional shapes and three-dimensional objects in a variety of orientations and positions (RNCS 2002b: 6).

Wat meetkunde aan betref, meld die Departement van Onderwys (DoE 2003b: 19-20) dat daar in vergelyking met vorige kurrikula, in die Leerarea van Wiskunde, die volgende verskuiwing plaasgevind het:

A shift in the study of space and shape (geometry) from Euclidean geometry to transformational geometry - the geometry of position and movement.

Die Departement van Onderwys (DoE 2003b: 20) lê verder ook klem op die feit dat wat wiskunde (en meetkunde) aan betref, leer in UGO “...developmental, hierarchical and dependent” is. Konsepvorming in wiskunde beweeg vanaf die eenvoudige na die komplekse en daarom is dit noodsaaklik dat leerders die aanvanklike eenvoudige konsepte eers moet internaliseer.

LU3 bly dieselfde vir grade R tot 9 en word in die RNCS vir elke graad, tesame met aantal assesseringstandaarde (AS) vir elke graad aangetoon (kyk par. 3.7.1). AS's dui aan die *kennis, vaardighede en waardes* wat leerders moet toon ten einde die leeruitkomst in elke graad te bereik (RNCS 2002b: 101). Die AS's vir LU3 word vir elke graad omskryf en beskryf ook die minimum vlak, die diepte en wydte van wat leerders behoort te weet en waartoe hulle in staat moet wees. Die

standaarde vir LU3 toon aan hoe konseptuele en vaardigheidsontwikkeling oor tyd heen kan plaasvind, maar die Departement van Onderwys (DoE 2003b: 22) maan “...it is far more important vir learners to develop deep and meaningful understanding than to be rushed ahead.” Die AS’s vir LU3 kan sowel binne grade as oor grade heen geïntegreer word (“clustering”). Die trosse of “clusters” kan gebruik word om die onderrig, leer, en assessering van LU te beplan. Die bereiking van optimale verhouding tussen integrasie oor leerareas heen (waar nodig en opvoedkundig) korrek en konseptuele progressie is sentraal tot die UGO-benadering van hierdie kurrikulum (RNCS 2002b: 2).

Die LU’s en AS’s beklemtoon deelnemende, leerdergerigte en aktiwiteits-gebaseerde onderwys. Dit laat groot ruimte vir kreatiwiteit en vernuwing deur onderwysers in die vertolking van wat en hoe hulle onderrig (RNCS 2002a: 12). Die Departement van Onderwys (DoE 2003b: 23) staan die gebruik van konkrete materiaal tydens die onderrig-en leergebeure voor, maar waarsku ook “...that learners eventually need to develop understanding in the absence of concrete objects and contexts.” Die onderrigstrategieë wat onderwysers in UGO vir Wiskunde behoort te gebruik is volgens die Departement van Onderwys (DoE 2003b: 24) onder andere: “...problem posing and problem solving, investigation, observation, modelling, reading, group work, drill and practice, following worked examples.”

Bo en behalwe die kennis, vaardighede en waardes wat eksplisiet in die LU’s en AS’s uiteengesit word, word *drie pertinente* vaardighede vir Wiskunde genoem, naamlik: “Problem Solving; Reasoning; and Communication” (DoE 2003b: 27). Hierdie drie vaardighede word as lewensvaardighede beskou en moet in die besonder in alle grade ontwikkel word. Na hierdie drie vaardighede word later in Hoofstuk 5 (kyk par. 5.2.5 en par. 5.2.4) in groter besonderhede gekyk. Wat betref beredenering kan uitkomst aan die hand van die volgende bekwaamhede geassesseer word:

“...analysing, selecting, synthesising, generalising, conjecturing” (DoE 2003b: 29).

(Vergelyk die taksonomieë van Bloom en Gagné in par. 4.4.2).

#### **4.4.3.4 Die implementering van die Revised National Curriculum Statement**

Die RNCS sal deur middel van leerprogramme in skole geïmplementeer word. Leerprogramme is gestruktureerde en sistematiese groeperings van leeraktiwiteite, insluitend inhoud en

onderrigmetodes; hierdie programme word deur die RNCS onderlê, maar deur provinsies, skole en onderwysers ontwikkel. Leerprogramme bevat ook werkskedules wat die tempo en orde van hierdie aktiwiteite vir elke jaar verskaf, asook voorbeelde van lesplanne wat in enige gegewe tydperk geïmplementeer kan word (RNCS 2002a: 15). Die Departement van Onderwys het reeds in 2003 begin om riglyne vir die ontwikkeling en implementering van Leerprogramme saam te stel (DoE 2003a en 2003b), maar soos Zulu (2003: 28) tereg opmerk:

The phasing in of the RNCS has many implications for careful consideration. Time should be provided for resource mobilisation, development of trainers, development of learning support materials, and the consolidation of national and provincial curriculum structures to drive its implementation (and) publishers would need time to produce quality textbooks.

#### **4.5 Samevatting**

In hierdie hoofstuk is die agtergrond en geskiedenis wat aanleiding gegee het tot die daarstelling van die hersiene kurrikulum vir skole in Suid-Afrika geskets. Die didaktiese onderbou van die RNCS is ondersoek en dit is duidelik dat die hersiene kurrikulum steeds trou bly aan die kern van K2005 en die verbintenis tot uitkomsgebaseerde onderwys. Die ontwerpkenmerke van die RNCS wat insluit die kritieke- en ontwikkelingsuitkomstestandaarde en die meegaande assesseringstandaarde asook die sterk element van konstruktivisme wat voorkom is verder bespreek. Die vraag wat in hierdie studie aangespreek word is of die VHM (wat onderrig- en leerprogram insluit) gebruik kan word in die onderrig-en-leer van meetkunde, soos gesien teen die onderliggende beginsels van die RNCS en met inagneming van spiraalbenadering tot onderwys. Daarom word vervolgens in Hoofstuk vyf kritiese evaluering van die RNCS aan die hand van die VHM gedoen.

## HOOFSTUK 5

### 'N KRITIESE EVALUERING VAN DIE RNCS AAN DIE HAND VAN DIE VHM

#### 5.1 Inleiding en formulering van kriteria

Hierdie navorsing behels 'n analise van die RNCS se meetkunde in die lig van die VHM. Een van die navorsingsoogmerke van hierdie studie is om die kurrikulum krities aan die hand van die VHM te bespreek. Die beoordeling van die meetkundekurrikulum vir die Algemene-Onderwys-en-Opleidingsband van grade R tot 9, soos gemeet aan die VHM, word aan die hand van nege vrae gedoen. Die oorsprong van hierdie vrae kan teruggevoer word na:

- die didakties-opvoedkundige onderbou van die VHM,
- die unieke kenmerke van die VHM,
- klemverskuiwings in wiskundeonderwys as sodanig, asook na
- die spiraalbenadering tot onderwys.

Omdat die uniekheid van die VHM in sy denkvlakke en onderrigfases (kyk Hoofstukke 2 en 3) geleë is, is dit sinvol om rondom hierdie uniekheid van die model die volgende vrae as kriteria te stel:

Rondom die *denkvlakke* se hoofkenmerke word die volgende vrae gevra:

#### **Vraag 1: Hiërargiese opbou**

Kan die hiërargiese/opeenvolgende (“sequential”) opbou van die denkvlakke dwarsdeur die grade R tot 9 heen, soos die RNCS voorstel dat meetkunde in skole aangebied moet word, wel waargeneem word?

#### **Vraag 2: Diskontinuuï teite**

Word daar diskontinuuïteite (spronge) tussen die denkvlakke weerspieël oor die grade R tot 9 heen, soos die RNCS voorstel dat meetkunde in skole aangebied moet word?

#### **Vraag 3: Taalaspek**

Word die besondere taalaspek van elke denkvlak uitgelig oor die grade R tot 9 heen, soos die RNCS voorstel dat meetkunde in skole aangebied moet word?

#### **Vraag 4: Eksplisiet/implisiet**

Is dit wat eksplisiet op vlak n behandel word, wel implisiet op vlak n-1 behandel oor die grade R tot 9 heen, soos die RNCS voorstel dat meetkunde in skole aangebied moet word?

Willson (1977: 11), wanneer hy trag om beskrywing te gee van wat meetkunde is, bevind dat vir die Bourbaki-skool van denke, “...geometry increasingly becomes, not a subject, but a way of approaching mathematical problems by trying to visualize them.” Let op die twee belangrike aspekte, naamlik *probleme en visualisering* wat in die beskrywing na vore kom.

Rondom die *onderrigfases* is uitstaande didaktiese implikasies onderskei en in vraagvorm soos volg geformuleer.

#### **Vraag 1: Praktiese aanbieding (onderrigfases 1 en 2)**

Word die praktiese aanbieding van meetkunde wat veral tydens onderrigfases 1 en 2 in die VHM benodig word, in die RNCS oor die grade R tot 9 heen weërspeel?

#### **Vraag 2: Ruimtelike vermoë (“Spatial ability”)**

Word die vaardighede wat benodig word om leerder se ruimtelike vermoëns te help ontwikkel, in die RNCS oor die grade R tot 9 heen, uitgespel?

#### **Vraag 3: Kommunikasie en redenering**

Is daar ruim geleentheid om die vaardighede van kommunikasie en redenering in meetkunde wat veral tydens die derde fase van onderrig benodig word, oor die grade R tot 9 heen te beoefen?

#### **Vraag 4: Probleemoplossing en divergente denke**

Word die nodige geleentheid daar gestel om probleemoplossing as vaardigheid tydens onderrigfase 4, oor grade R tot 9 heen te ontwikkel?

#### **Vraag 5: Insig en struktuur**

Word die verband tussen insig en struktuur, soos in die VHM gevisualiseer, ook in die RNCS uitgewys oor die grade R tot 9 heen?

Vervolgens word daar spesifiek na LU3 van die RNCS in die lig van die denkvlakke en onderrigfases van die VHM gekyk.

## 5.2 Onderrigfases

*—inligting —gerigte oriëntasie —eksplisitering —vrye oriëntasie —integrasie*

Die UGO vorm die basis van die kurrikulum in Suid Afrika en stel onder andere leerdergesentreerde asook aktiewe benadering tot die onderrig- en leergebeure van wiskunde voor. In sy inleiding stipuleer die RNCS (2002b: 1) dit soos volg:

The outcomes encourage a learner-centred and activity-based approach to education.

Hierdie aktiewe benadering tot leer is benadering wat wêreldwyd gevolg word en word byvoorbeeld só vir die wiskundekurrikulum van Amerikaanse skole in die “Standards” (NCTM 1989: 214) uiteengesit:

The Curriculum Standards present a dynamic view of the classroom environment. They demand a context in which students are actively engaged in developing mathematical knowledge by exploring, discussing, describing and demonstrating.

In die toepassing van Van Hiele se onderrigfases, is aktiewe benadering tot die onderrig en leer van meetkunde noodsaaklik. So aktiewe benadering benodig dinamiese klaskamermilieu en soos uit Hoofstuk 2 (par. 2.2–2.4) en Hoofstuk 3 (par. 3.3–3.6) se besprekings blyk, kan sekere didaktiese vereistes onderskei word. Vir die onderrig en leer van meetkunde onderskei ons die volgende implikasies:

1. benodiging van praktiese aanbieding;
2. geskiktheid van transformasiemeetkunde vir
3. die ontwikkeling van ruimtelike denke;
4. kommunikasie en redenering;
5. probleemoplossing en divergente denke;
6. verwantskappe en patrone;
7. insig en struktuur.

Hierdie didaktiese implikasies sluit ten nouste aan by die kritieke uitkomst wat die RNCS (2002b:

1) vir leerders beoog, naamlik:

The critical outcomes envisage learners who are able to:



- organise and manage themselves and their activities responsibly and effectively (implikasie no.1)
- work effectively with others as members of a team, group (implikasie no.1)
- communicate effectively using visual, symbolic and/or language skills in various modes (implikasie no.4)
- collect, analyse, organise and critically evaluate information (implikasie no.4)
- identify and solve problems and make decisions using critical and creative thinking (implikasies no. 4 en 5)
- demonstrate an understanding of the world as a set of related systems by recognising that problem-solving contexts do not exist in isolation (implikasies 4; 5 en 7)
- use science and technology effectively and critically (implikasies no.1 en 5).

Die sewe implikasies is as vyf vrae gekonsolideer. Implikasies 2 en 3 is saamgevoeg in vraag 2, want die ontwikkeling van ruimtelike denke is hoeksteen in die VHM, en navorsing (onder andere Van Niekerk vir die SA konteks (kyk par. 2.4) het bevestig dat transformasiemeetkunde uiters geskik is om ruimtelike denke te help ontwikkel. Verder is transformasiemeetkunde in Suid-Afrikaanse skole sedert 1994 infaseer en die RNCS sluit transformasiemeetkunde as tipe meetkunde vanaf graad R tot graad 9 in. Implikasies 6 en 7 is saamgevoeg in vraag 5, want insig in meetkunde en die struktuur van meetkunde hang ten nouste saam met die rol wat patrone en verwantskappe in meetkunde speel. Verder volg die RNCS geïntegreerde benadering ten opsigte van gestelde uitkomst. So word meetkundige patrone en verwantskappe onder leeruitkomst no.2, saam met funksies en algebra bestudeer.

#### Learning Outcome no.2: PATTERNS, FUNCTIONS AND ALGEBRA

The learner will be able to recognise, describe and represent patterns and relationships, as well as to solve problems using algebraic language and skills (RNCS 2002b: 9)

Skematiese uitleg word gegee van die vrae en die onderafdelings daarvan vir die *onderrigfases* soos wat dit gebruik is om die RNCS aan die hand van die VHM in vergelykende studie te beoordeel.

## 5.2.1 Skematiese uitleg van vrae en hul onderafdelings

### ONDERRIGFASES

#### Vraag 1: Praktiese aanbieding

1. Aktiewe deelname.
2. Konkrete materiaal.
3. Verskeidenheid take en verskillende aktiwiteite.

#### Vraag 2: Ruimtelike vermoë (“Spatial ability”)

1. Hoë prioriteit.
2. Aktiwiteite.
3. Visualisering as vaardigheid.
4. Die 3D → 2D tweerigtingtransformasie as vaardigheid.

#### Vraag 3: Kommunikasie en redenering

1. Kommunikasie.
2. Redenering.

#### Vraag 4: Probleemoplossing en divergente denke

1. Probleemoplossing.
2. Strategie.
3. Verskeidenheid van probleme en take.

#### Vraag 5: Insig en struktuur

Bespreking van die vrae word vervolgens gedoen.

### 5.2.2 Vraag 1: Praktiese aanbieding

Word die praktiese aanbieding van meetkunde wat veral tydens onderrigfases 1 en 2 in die VHM benodig word, in die RNCS oor die grade R tot 9 heen weerspieel?

In die VHM verg praktiese aanbieding onder andere die volgende: aktiewe deelname; konkrete materiaal; verskeidenheid take; en verskillende aktiwiteite.

#### 1. Aktiewe deelname

##### *Van Hiele Model*

Die eerste twee fases van die VHM, naamlik inligting en gerigte oriëntasie, vereis op praktiese grondslag, aktiewe deelname deur die onderwyser sowel as die leerders. Die onderwyser moet aktief die leerders op praktiese wyse help met oriëntering deur voorstelle en die beskikbaarstelling van die nodige konkrete materiaal (kyk par. 3.3.2). Die leerders moet aktief betrokke wees as individu, in groepe of in pare. Dina van Hiele-Geldof (1957:184) stel die aktiewe deelname van die leerder as volg:

The pupil makes drawings and models, ...he is actively involved with **hand** and **head**, he identifies and orders, in short, he explores.

##### *Revised National Curriculum Statement*

Die RNCS stel dit onomwonde dat aktiewe deelname as basiselement in die kurrikulum geleë is, vir alle grade R tot 9, wanneer dit ter inleiding die volgende stel:

The outcomes encourage a learner-centred and activity-based approach to education (RNCS 2002b: 1).

In beide die VHM en die RNCS se didaktiese fundering is die rol van konstruktivisme soos reeds in paragrawe 2.4 en 4.4.3.2 bespreek hier van kardinale belang.

#### 2. Konkrete materiaal

##### *Van Hiele Model*

Van Hiele (1957: 238) wys op die belangrikheid van konkrete materiaal waarmee jong leerders die geleentheid moet kry om te eksperimenteer en hy sê “The presentation of concrete study material evokes visual undifferentiated structures” en verder ook “ ...students learn to uncover a structure

while manipulating a material” (1957: 250). Die fisiese bou van *modelle* help die leerder in die proses van struktuurvorming. Dina van Hiele-Geldof het in haar navorsing die kubusblokke as belangrike konkrete materiaal gebruik. Die van Hieles het verder teëls, geborde, geruite papier, en voorwerpe uit die leerder se alledaaglikse lewe tydens hul navorsing gebruik.

### ***Revised National Curriculum Statement***

In die RNCS speel konkrete materiaal ook 'n groot rol en so geld vir grade R tot 9 die volgende:

The learner should gain these skills from experiences with concrete objects...

(RNCS 2002b: 10, 36, 64).

Tydens die Grondslagfase vir grade R tot 3, val die fokus van die onderrig- en leergebeure baie op die praktiese aspek en die hantering van fisiese materiaal.

The study of space and shape in the Foundation Phase is very practical and hands-on.

(RNCS 2002b: 10).

In die assesseringstandaarde stel die RNCS die gebruik van konkrete materiaal voor en word boublokkies vir grade R tot 3 onder andere by die naam genoem.

(RNCS 2002b: 16, 26, 27).

**Tabel 9.1 Konkrete materiaal**

GRADE	
R	Builds 3D objects using concrete material (e.g. building blocks)
1	Observes and builds given 3D objects using concrete materials (e.g. building blocks and construction sets)
2	Observes and creates given 2D-shapes and 3D objects using concrete materials (e.g. building blocks, construction sets and cut-out 2D shapes).
3	Observes and creates given 2D shapes and 3D objects using concrete materials (e.g. building blocks, construction sets and cut-out 2D shapes, clay, drinking straws).

Tydens die Intermediêre fase (grade 4 tot 6) word die belangrikheid van konkrete materiaal en *modellering* beklemtoon, asook die feit dat dit die onderwyser se taak is om die nodige materiaal beskikbaar te stel (RNCS 2002b: 48-49).

**Tabel 9.2 Konkrete materiaal**

GRADE	
4	Making 3D models using cut-out polygons (supplied)
5	Making models of geometric objects using polygons they have cut out; Cutting open models or geometric objects (e.g. boxes) to trace their nets
6	Making 3D models using: drinking straws to make a skeleton, nets provided by the teacher

In die Seniorfase (grade 7 tot 9) gaan dit om die praktiese modellering van driedimensionele voorwerpe (soliede liggame) en situasies uit die omgewing RNCS (2002b: 80-81).

**Tabel 9.3 Konkrete materiaal**

GRADE	
7	Designs and uses nets to make models of geometric solids studied up to and including this grade.
8	Designs and uses nets to make models of geometric solids studied up to and including this grade.
9	Draws and/or constructs geometric figures and makes models of solids in order to investigate and compare their properties and model situations in the environment.

### 3. Verskeidenheid take en verskillende aktiwiteite

#### *Van Hiele Model*

In die VHM moet die leerders verskeidenheid take doen waar fisiese manipulasie van konkrete materiaal groot rol speel. Dit word onder andere gedoen sodat die leerder se ruimtelike vermoëns goed kan ontwikkel met die oog op meer insig in meetkunde in die hoër grade. Veral gedurende die oriënteringsfases 2 en 4 is hierdie aspek van belang. Die take en aktiwiteite moet verband hou met die alledaagse lewe van die leerder. Van Niekerk (1994: 7) beveel aan dat leerders verskillende soorte materiaal en aktiwiteite moet gebruik om hul vaardighede te verbeter en noem die volgende aktiwiteite wat van belang is:

...direct and indirect observation and handling of the material (constructing), taking in a mental viewpoint, the verbal description of an object or situation, the formation of a mental image and the transformation of a mental image.

Moderne tegnologie kan ook gebruik word om die leerder se repertoire van vaardighede uit te brei en Booyen (1994: 279) noem dat in die onderrig van meetkunde dit veral die skilpadmeetkunde van die rekenaartaal Logo is wat goed te pas kom in die Grondslagfase. Sy meld dat Olson, Kieren en Ludwig (1987: 359-370) die verband tussen Logo en die Van Hiele denkvlakke nagevors en bevestig het. Belangrik is ook die navorsing wat Michael de Villiers met Geometer's Sketchpad vir die Suid-Afrikaanse situasie gedoen het. Retha van Niekerk het spesifiek die rol van die rekenaar as medium tydens die ruimtelike ontwikkeling van baie jong leerders nagevors deur ook gebruik te maak van Geometer's Sketchpad (kyk Hoofstuk 6). Hierdie rekenaarprogrammatuur is 'n dinamiese instrument om meetkunde te ontdek waar die leerder eers die probleem *visueel kan analiseer* en gepaste afleidings kan maak alvorens 'n bewys aangepak word. Die sagteware kan gebruik word vir Euklidiese meetkunde; transformasies; analitiese meetkunde asook vir fraktaalmeetkunde.

### ***Revised National Curriculum Statement***

Verskeidenheid van take en verskillende aktiwiteite geniet ook in die RNCS groot aandag. In KU3 stel die RNCS (2002b: 1) vir alle grade

The critical outcomes envisage learners who are able to:

organise and manage themselves and their activities responsibly and effectively;

In die RNCS kom die verskeidenheid take en verskillende aktiwiteite nie so duidelik na vore onder LU3 nie, maar aangesien die RNCS 'n geïntegreerde benadering ten opsigte van gestelde uitkomstevolg, kan in hierdie verband na LU2 gekyk word. LU2 bestudeer patrone en verwantskappe in wiskunde. Meetkundige patrone word onder hierdie afdeling, tesame met funksies en algebra, bestudeer. Wanneer die RNCS onder LU2 na die vaardighede wat leerders behoort te ontwikkel kyk, word die verskillende take en verskeidenheid aktiwiteite wat tydens wiskundeonderrig benodig word, uitgelig. (RNCS 2002b: 9; 35; 63)

Mathematical skills are developed over time. The learner should be given opportunities at every grade level to develop these skills to greater levels of sophistication so that they can be used with greater competence and confidence.

Tydens die Intermediêre fase lê die RNCS baie klem op die verskeidenheid van voorstellings wat gebruik moet word. (RNCS 2002b: 35)

This phase has a particular focus on the use of different, yet equivalent, representations to describe problems or relationships...

Tydens die Seniorfase word die fokus onder andere geplaas op (RNCS 2002b: 63)

The learner continues to analyse situations in a variety of contexts in order to make sense of them, with added ability to represent and describe them. The learner should be exposed to a variety of functions, ...rather than to focus on the behaviour or the features of particular functions...

### 5.2.3 Vraag 2: Ruimtelike vermoë (“Spatial ability”)

Word die vaardighede wat benodig word om leerder se ruimtelike vermoëns te help ontwikkel, in die RNCS oor die grade R tot 9 heen, uitgespel?

#### 1. Hoë prioriteit

##### *Van Hiele Model*

Hoë prioriteit word gegee aan die ontwikkeling van die leerder se ruimtelike vermoë in die VHM. Die basisvlak in die VHM is dan ook die visuele vlak waar figure as visuele geheel waargeneem word. Van Hiele (1957: 240) beskou die taak van die onderwyser onder andere as “...he should help his pupils to transform the structures, produced in their *visual field* of observation, into geometrical structures.” Hierdie ruimtelike ontwikkeling begin nie met die formulering van definisies en stellings nie, maar met die ordening van die daaglikse ruimtelike ondervindinge van die jong leerder. Van Niekerk (1998: 68) lê klem op die feit dat leerders die ruimte moet ontdek deur middel van aktiwiteite wat geleë is in hulle konkrete wêreld. In die ontwikkeling van sy ruimtelike denke behoort die leerder vanaf aanvanklike fisiese oriëntasiesituasie te vorder na meer abstrakte verstandelike situasie.

##### *Revised National Curriculum Statement*

Hoë prioriteit word ook in die RNCS gegee aan die ontwikkeling van die leerder se ruimtelike vermoë. In die assesseringstandaarde vir grade R tot 9 gebruik die RNCS telkens as vertrekpunt die volgende:

We know this when the learner ...visualises and names 2D shapes and 3D objects (RNCS 2002b: 10, 36, 64)

Tydens die Grondslagfase is die fokus soos volg:

“The learner begins by recognising and describing objects...” (RNCS 2002b: 10).

Tydens die Intermediêre fase is die fokus soos volg:

“The learner’s experience ...moves from recognition and simple description...” (RNCS 2002b: 36).

## 2. Aktiwiteite

### *Van Hiele Model*

Hoë prioriteit word ook in die VHM gegee aan verskeidenheid visuele aktiwiteite. Land (1990) meld dat navorsing getoon het hoe visuele aktiwiteite en ondervindinge die regter- sowel as die linkerbrein stimuleer. Klaskameraktiwiteite vir die ontwikkeling van leerder se ruimtelike vermoë sluit onder andere in: papiervou (wat die basis van simmetrie is) en knip, natrek van figure op geo-papier (kolletjiespapier), voltooiing van figure, die uitkenning van figure ingebed in figure (soos byvoorbeeld in rooster), en eenvoudige sketse. Tydens die Grondslagfase kan die tipe aktiwiteite heel eenvoudige aktiwiteite wees om die jong leerder se oriëntasie in die ruimte om hom te bevorder, soos opdragte wat die bewuswording van links-regs, bo-onder, voor-agter, binne-buite, oop-toe, groot-klein, lank-kort, ensovoorts, insluit (Booyesen 1994: 121).

### *Revised National Curriculum Statement*

Tydens die Grondslagfase skets die RNCS (2002b: 16, 26-27) die volgende aktiwiteite

**Tabel 10.1 Aktiwiteite**

GRADE	
R	<ul style="list-style-type: none"> <li>› Recognises symmetry in self and own environment (with focus on front and back)</li> <li>› Describes one 3D object in relation to another (e.g. ‘in front of’ or ‘behind’)</li> <li>› Follows directions to move or place self within the classroom (e.g. ‘at the front’ or ‘at the back’)</li> </ul>
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>› Recognises symmetry in self and own environment (with focus on ‘left’, ‘right’, ‘front’ and ‘back’).</li> <li>› Describes one 3D object in relation to another (e.g. ‘in front of’ or ‘behind’)</li> <li>› Follows directions to move or place self within the classroom or 3D objects in relation to each other.</li> </ul>



2	<ul style="list-style-type: none"> <li>› Recognises symmetry in 2D shapes and 3D objects</li> <li>› Recognise 3D objects from different positions</li> <li>› Position self within the classroom or 3D objects in relation to each other.</li> <li>› Describes positional relationships between 3D objects or self and peer.</li> </ul>
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>› Determines lines of symmetry in 2D shapes using paper folding and reflection</li> <li>› Recognises and describes 3D objects from different positions</li> <li>› Reads, interprets and draws informal maps...</li> <li>› Describes positional relationships between 3D objects or self and peer.</li> </ul>

Tydens die Intermediêre fase word kolletjiespapier en roosters baie effektief gebruik en skets die RNCS (2002b: 48-51) die volgende aktiwiteite:

**Tabel 10.2 Aktiwiteite**

GRADE	
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>› Drawing shapes on grid paper</li> <li>› Describes changes in the view of an object held in different positions</li> <li>› Locates position on a coded (labelled) grid.</li> </ul>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>› Drawing shapes on grid paper</li> <li>› Describes and sketches views of a simple 3D object in different positions</li> <li>› Locates position on a coded (labelled) grid, ...and traces a path between positions</li> </ul>
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>› Draws enlargements and reductions of 2D shapes on grid paper</li> <li>› Draws and interpret sketches of simple 3D objects in different positions: perspective</li> <li>› Locates positions on a coded (labelled) grid, describes how to move between positions on the grid.</li> </ul>

In die Seniorfase (grade 7 tot 9) word die vorige aktiwiteite uitgebrei na koördinaatstelsels en die kartesiese platvlak (RNCS 2002b: 82-83).

### **3. Visualisering as vaardigheid**

#### ***Van Hiele Model***

Nixon (2002: 67) noem dat Hoffer (1981) vyf vaardighede met elke Van Hiele denkvlak assosieer. Dit sluit visuele-, verbale-, teken-, logiese-, en toepassingsvaardighede in.

Om visuele vaardigheid te ontwikkel, stel die Van Hieles voor dat leerder van aktiwiteite

voorsien moet word wat nuwe konsepte aan hom voorstel, maar op so informele wyse dat hy van insigte en/of vaardighede gebruik maak, waaroor hy alreeds beskik. Dit is egter belangrik om take en ondervindinge waarmee die leerder alreeds vertrouwd is, te gebruik. Murray, Olivier en Human (1998: 177) haal Treffers as volg aan:

The aim is to acquire a rich collection of intuitive notions in which the essential aspects of concepts and structures are pre-formed. This, then, is laying the basis for concept formation.

Hierna kan leerders geleidelik aan terminologie en hoër redenering blootgestel word, soos hul daarvoor gereed raak (Nixon 2002: 67).

### ***Revised National Curriculum Statement***

In die RNCS word visualisering in die leeruitkomste-fokus pertinent as vaardigheid gestel wat ontwikkel behoort te word. Hierdie gestelde fokus geld vir grade R tot 9 en word soos volg verwoord:

Learning Outcome Focus: The study of space and shape enables the learner to:  
develop the ability to visualise... (RNCS 2002b: 10; 36; 64).

Volgens Davey en Holliday (1992: 27) kan visuele vaardigheid uitgebrei word tot

...the ability to interpret figural information, ...to read, understand and interpret the special symbols and conventions, ...and to manipulate objects within one's mind. (Nixon 2002: 66-68)

Vaardighede wat in die RNCS (2002b: 10, 36, 64) oor grade R tot 9 heen genoem word is onder andere: “ ...develop the ability to visualise, ...interpret, ...understand, ...and to give abstract justification of spatial relationships.”

Die gepaardgaande aktiwiteite sluit in sketsing, konstruering, beredenering, en die hantering en manipulering van konkrete materiaal, waaronder 3D objekte en 2D vorme.

## **4. Die 3D 2D tweerigtingtransformasie as vaardigheid**

### ***Van Hiele Model***

Die tweerigtingtransformasie tussen 3D objekte en 2D vorme geniet hoë prioriteit in die VHM. Booyen (1994: 304) asook Van Niekerk (kyk par. 2.4) wys daarop dat die 3D 2D transformasies belangrike vaardigheid is vir die leer en toepassing van meetkunde. Aktiwiteite wat gemik is op hierdie tweerigtingtransformasie, help met die ontwikkeling van die leerder se ruimtelike vermoëns en denke. Om hierdie vaardigheid te ontwikkel, moet die nodige aktiwiteite gebruik word. Vir die

3D 2D transformasies skets Booysen (1994: 121-133) sewe tipes aktiwiteite wat onder andere die volgende vermoëns in leerder kan bevorder:

- hand-oog-koördinasie;
- voorggrond-agtergrond-persepsie;
- perseptuele konstantheid;
- persepsie van posisie-in-die ruimte;
- persepsie van ruimtelike relasies;
- visuele diskriminasie en
- visuele geheue.

Booyesen (1994: 121-133) skets hierdie aktiwiteite in detail en onderwysers behoort daarvan gebruik te maak.

### ***Revised National Curriculum Statement***

Die prominensie wat die RNCS aan die 3D 2D transformasie as vaardigheid gee is duidelik, wanneer:

(1) Meetkunde se hoofleeruitkomst (LU3) vir grade R tot 9 soos volg gestel word:

Learning Outcome 3: Space and Shape (Geometry)

The learner will be able to describe and represent characteristics and relationships between 2D shapes and 3D objects in a variety of orientations and positions (RNCS 2002b: 6).

(2) Die RNCS hierdie aspek as fokus stel vir grade R tot 9

Learning Outcome Focus:

The study of space and shape improves understanding. It focuses on the properties, relationships, orientations, positions and transformations of 2D shapes and 3D objects (RNCS 2002b: 10; 36; 64).

(3) Die RNCS dit verder vir grade R tot 9 uitspel:

...enables the learner to interpret, understand, classify, appreciate and describe the world through 2D shapes and 3D objects, their location, movement and relationships (RNCS 2002b: 10, 36, 64).

(4) En verder

It is important that the study of 2D shapes and 3D objects be contextualised (RNCS 2002b: 10, 36, 46).

Retha van Niekerk het die impak van ruimtelike ontwikkeling baie goed nagevors vir die Suid-Afrikaanse konteks (Van Niekerk, 1995, 1996a, 1996b, 1997). In artikel wat verskyn het in Pythagoras 46/47 (1998: 63-70) beweer sy onder andere dat die ruimtelike ontwikkeling van die

leerder nie net afhang van die begryp van vorme nie, maar ook van die posisionering in die ruimte asook die leerder se visie of te wel sy vermoë om na voorwerpe in die ruimte te kyk en raak te sien. Sy identifiseer drie aspekte wat van belang is, naamlik: vorm, posisie en visie.

**Vorm:** Om vorm in die ruimte te verstaan, moet die drie verskillende transformasies wat vorm in die ruimte of op papier kan ondergaan, begryp word. Die drie transformasies is: rotasie (draai), refleksie (weerspieëling) en verskuiwing (verplasing). Leerders moet begryp dat hierdie veranderinge slegs die posisie of oriëntasie van die voorwerp in die ruimte beïnvloed, en nie die werklike grootte van die voorwerp nie. Die grootte en vorm van voorwerp bly onveranderd, wanneer transformasies daarop uitgevoer word. So moet leerders byvoorbeeld begryp dat die oriëntasie ten opsigte van links/regs; voor/agter en bo/onder dieselfde bly. Hierdie aspek soos opgeteken in tabelle 10.1 en 10.2 word in die RNCS aangespreek.

**Posisie (plekaanduidend):** Die vermoë om die posisie van enigiets in die ruimte aan te dui, is alledaagse handeling. Leerders behoort alle tipes grafiese-inligting of prentjie-inligting soos kaarte, foto's, sketse en diagramme te kan gebruik om die posisie in die ruimte te kan aandui en te verstaan. Hierdie aspek soos opgeteken in tabelle 10.1 en 10.2 word in die RNCS aangespreek.

**Visie:** Die verband tussen reële 3D objek soos sneesdoekiedoos en die voorstelling daarvan in foto of tekening. Jong leerders ondervind probleme om die diepte-dimensie in hul sketse weer te gee. Leerders behoort ook die verskillende ruimtelike fenomene te ontdek, soos die feit dat hoe verder weg voorwerp is, hoe kleiner vertoon dit, alhoewel die voorwerp nie in werklikheid kleiner word nie. Hierdie aspek soos opgeteken in tabelle 10.1 en 10.2 word in die RNCS aangespreek.

### 5.2.4 Vraag 3: Kommunikasie en redenering

Is daar ruim geleentheid om die vaardighede van wiskundekommunikasie en wiskunderedenering (kyk par. 4.4.3.3) wat veral tydens die derde fase van onderrig benodig word, oor die grade R tot 9 heen te beoefen?

In die Verenigde State van Amerika wat toonaangewende wêreldmoondheid is, het in 1989 en 1991 onderskeidelik die *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* en die *Professional standards for teaching mathematics* verskyn. In hierdie riglyne wat deur die National Council for the Teachers of Mathematics (die NCTM) opgestel is, word van die belangrikste

aspekte van vernuwing in die onderrig van skoolwiskunde soos volg saamgevat:

- mathematical power for all in a technological society;
- mathematics as something one does - solve problems, communicate, reason;
- a curriculum for all that includes a broad range of content, variety of contexts, and deliberate connections;
- the learning of mathematics as an active, constructive process;
- instruction based on real problems;
- evaluation as a means of improving instruction, learning, and programs.

Dit is opmerklik hoe hierdie riglyne aansluiting vind by die kriteria wat vir die VHM in hierdie studie gestel word. So byvoorbeeld, plaas die derde onderrigfase van die VHM, naamlik eksplisitering, volgens Booyesen (1994: 284) die klem op kommunikasie en redenering in die wiskunde klaskamer.

## **1. Kommunikasie**

### ***Van Hiele Model***

Vir van Hiele is dit belangrik om in wiskunde (en in meetkunde) te kan kommunikeer.

In die derde fase van eksplisitering kry die leerder geleentheid om in sy eie woorde te beskryf wat hy gedoen het, te luister na wat sy maats gedoen het, en neer te skryf wat hy gesê het. In die VHM moet klaskamerkultuur van kommunikasie en redenering oor wiskunde geskep word, wat dieper insig in wiskunde (en meetkunde) te weeg sal bring. In die VHM is dit egter baie belangrik dat die onderwyser moet besef dat hy in die taal van die leerder se denkvlak moet onderrig. Kommunikasie tussen onderwyser en leerders, asook tussen leerders en die leerinhoud is van belang, sodat die leerders die wiskundetaal kan aanleer.

### ***Revised National Curriculum Statement***

(1) Kommunikasie is gestelde kritieke uitkomst in die RNCS (2002b: 1)

The critical outcomes envisage learners who are able to:

communicate effectively using visual, symbolic and/or language skills in various modes

(2) In die Wiskunde Leerarea RNCS (2002b: 4) word kommunikasie as wiskundevaardigheid ingesluit. Vir grade R tot 9 gebruik die RNCS deurlopend die volgende begrippe:

The learners should: describe; name; compare; give directions; interpret; calculate; reason; justify;

draw; construct; study; demonstrate; read.

Al hierdie begrippe vereis kommunikasie.

(3) Vir grade R tot 9 werk die leerder, “...alone and/or as a member of a group or team.”

Dit op sigself vereis kommunikasie.

(4) Verder: “The learner should ...describe them with appropriate and expanding vocabulary” (RNCS 2002b: 10).

(5) Asook “...uses various representational systems to describe...” (RNCS 2002b: 83).

(6) En “...locates position, ...following verbal and written instructions” (RNCS 2002b: 51).

## **2. Redenering**

### ***Van Hiele Model***

Redenering begin alreeds op denkvlak 1 en vir Van Hiele is hierdie die werklike doel van die wiskundeonderrig. Wanneer die leerder hierdie denkvlak bereik het, is hy gereed om informeel inductief en deduktief te redeneer oor aspekte soos ruimte, verhoudings en verwantskappe. In die VHM kan redenering as eksplisiete funksie gebruik word om die implisiete kennis wat die leerder reeds opgedoen het, te eksploiteer. Tydens redenering kan die onderwyser die leerder lei om gevolgtrekkings te maak op grond van verskillende aspekte wat die leerder reeds op die vorige denkvlakke raakgesien het.

### ***Revised National Curriculum Statement***

Redenering is gestelde kritieke uitkomst in die RNCS (2002b: 1).

The critical outcomes envisage learners who are able to:  
collect, analyse, organise and critically evaluate information.

Die RNCS (2002b: 4) sluit redenering as wiskundevaardighede onder die Wiskunde Leerarea in.

Die Leer Uitkomst Fokus vir grade R tot 9 word onder andere in die RNCS as volg gestel:

The study of space and shape enables the learner to:  
develop the ability to ...reason and justify (RNCS 2002b: 10; 36; 64).

Vir die Seniorfase (grade 7 tot 9):

The learner should develop the ability to reason effectively and justify appropriately when required (RNCS 2002b: 64).

Vir grade R tot 9 gebruik die RNCS deurlopend die volgende begrippe:

The learners should: describe; compare; interpret; calculate; reason; justify; determine; draw; construct; study; demonstrate; read; investigate; classify.

Hierdie begrippe vereis almal redenering. Redenering in grade 4 tot 9 kan plaasvind binne ruimtelike konteks, binne verwantskappe of vanaf grafiese voorstellings. Gee die RNCS oor die grade heen plek vir hierdie verskillende soorte redenerings? Die antwoord is positief en slegs een aspek per graad word hier weergegee:

Binne ruimtelike konteks (RNCS 2002b: 16-27; 48-51; 80-83)

**Tabel 11.1 Verskillende soorte redenerings**

GRADE	
4 to 6	Describes, sorts and compares 2D shapes and 3D objects ...according to geometrical properties
7 to 9	Uses transformations (rotations, reflections and translations) and symmetry to investigate properties of geometric figures.

Binne verwantskappe (RNCS 2002b: 16-27; 48-51; 80-83)

**Tabel 11.2 Verskillende soorte redenerings**

GRADE	
4 to 6	Describes, sorts and compares 2D shapes and 3D objects ...according to geometrical properties
7	Recognises and describes the properties of similar and congruent figures and the difference between them.
8	...describes and classifies geometric figures and solids in terms of properties
9	...describes the interrelationships of the properties of geometric figures and solids with justification...

Vanaf grafiese voorstellings (RNCS 2002b: 16-27; 48-51; 80-83)

**Tabel 11.3 Verskillende soorte redenerings**

GRADE	
4	Locates positions on a coded (labelled) grid
5 and 6	Locates positions on a coded (labelled) grid and maps

7	Locates positions on co-ordinate systems (ordered grids) and maps
8	Locates positions on co-ordinate systems (ordered grids), Cartesian plane (first quadrant) and maps.
9	Use various representational systems, ...including ordered grids; Cartesian plane (4 quadrants); compass directions in degrees and angles of elevation and depression.

### 5.2.5 Vraag 4: Probleemoplossing en divergente denke

Word die nodige geleentheid daar gestel om probleemoplossing as vaardigheid (kyk par. 4.4.3.3) tydens onderrigfase 4, oor grade R tot 9 heen te ontwikkel?

#### 1. Probleemoplossing

##### *Van Hiele Model*

Probleemoplossing vind in die VHM tydens die vierde onderrigfase plaas, naamlik tydens vrye oriëntasie. Op hierdie stadium behoort die leerders reeds genoeg tyd en leiding van die onderwyser te ontvang het en moes hulle reeds deur die eerste drie onderrigfases beweeg het. In die lig van die Van Hiele Model gee Booysen (1994: 276) die volgende samevatting van wat probleemoplossing binne kurrikulumverband behoort te wees:

Leerders moet probleemoplossingsbenadering gebruik in die ondersoek en begryp van wiskunde-inhoud. Probleemoplossing moet nooit as losstaande onderwerp in wiskundekurrikulum beskou word nie, maar moet integrale deel van die hele kurrikulum uitmaak. Verder moet leerders oefening kry in die formulering van probleme uit die alledaagse lewe, sowel as in wiskunde-situasies. In die proses moet hulle strategieë ontwikkel en toepas vir die oplossing van groot verskeidenheid van probleme. Hulle moet ook in staat wees om hulle antwoorde te verifieer en te interpreteer. Leerders wat probleemoplossend dink, het gewoonlik meer selfvertroue in die sinvolle gebruik van wiskunde.

Probleemoplossing moet in die VHM oor al die grade R tot 9 geïmplementeer word.

*Tydens die Grondslagfase (grade R tot 3):*

- (i) In hierdie grade moet reeds basis gelê word vir probleemoplossing.
- (ii) Patroonherkenning is belangrike vaardigheid by probleemoplossing en in die VHM moet leerders aangemoedig word om op die uitkyk te wees vir patrone. Leerders moet patrone beskryf, sodat hulle die verband tussen wiskunde en die wêreld om hulle kan sien.



(iii) Die leeruitkomste in die RNCS is kognitief afhanklik en ondersteunend van mekaar. Patroonherkenning word in LU2 met LU3 gekombineer.

*Tydens die Intermediêre fase (grade 4 tot 6)*

- (i) moet probleme wat werklike insig en denke vereis alreeds aan leerders gestel word.
- (ii) Dit is ook belangrik dat hier genoegsame aandag gegee word aan die formulering van probleem in wiskundige simbole.
- (iii) Probleemsituasies kan verbaal, numeries, grafies, meetkundig of simbolies voorgestel word.

*Tydens die Seniorfase (grade 7 tot 9) geld (i) tot (iii) soos vir die Intermediêre fase hierbo en moet ook (iv) veral gekyk word na die ontwikkeling van strategieë vir probleemoplossing.*

### ***Revised National Curriculum Statement***

In die RNCS geniet probleemoplossing hoë prioriteit.

Twee van die sewe kritieke uitkomstes handel oor probleemoplossing.

The critical outcomes envisage learners who are able to:

no.1 identify and solve problems and make decisions ...and

no.7 demonstrate an understanding of the world as a set of related systems by recognising that problem-solving contexts do not exist in isolation (RNCS 2002b: 1).

Verder beskou die RNCS probleemoplossing as noodsaaklike vaardigheid wat aangeleer behoort te word:

The Mathematics Learning Area includes interrelated knowledge and skills:

**Skills:** Problem posing and problem solving and investigation (RNCS 2002b: 4).

Onder die afdeling “Unique Features and Scope” van die Wiskundeleerarea word probleemoplossing deur die RNCS (2002b: 5) as volg uitgelig:

problem solving: making sense of the problem, analysing and synthesising, and determining and executing solution strategies, as well as validating and interpreting the solutions appropriate to the context.

Wanneer bogenoemde aanhaling bestudeer word, word daar gevind dat vir die RNCS, net soos vir Van Hiele, strategieë tydens probleemoplossing van groot belang is.

## 2. Strategie

### *Van Hiele Model*

Die belangrikste aspek by probleemoplossing is die ontwikkeling van strategieë.

In die VHM bly dit die onderwyser se taak om die leerders te help om die nodige strategieë te ontwikkel. Die leerders moet egter in die VHM ook self strategieë kan ontdek en kan skep. Dit is belangrik om strategieë vir probleemoplossing deurlopend oor die grade R tot 9 te ontwikkel, vanaf heel eenvoudig in die Grondslagfase en Intermediêre fase tot meer gevorderd in die Seniorfase. Om die nodige strategieë te ontwikkel, benodig ons volgens die VHM probleme uit die alledaagse lewe en probleme in wiskunde-konteks.

### *Revised National Curriculum Statement*

Die RNCS bied leerders oefening in die formulering van probleme uit die alledaagse lewe, sowel as in wiskundige situasies.

Grondslagfase:

- study is ...very practical and hands-on...
- learner begins with ...objects and shapes in the environment that resemble mathematical objects and shapes (RNCS 2002b: 10).

Intermediêre fase:

- learner describes, sorts, compares and investigate ...objects and shapes from the environment.
- learner recognises and describes natural and cultural shapes and objects in terms of geometric properties (RNCS 2002b: 48-51).

Seniorfase:

- learner recognises, describes, sorts, compares, visualises and names ...geometric figures and solids in natural and cultural forms and geometric settings.
- In contexts that include those that may be used to build awareness of social, cultural and environmental issues, describes and classifies geometric figures and solids (RNCS 2002b: 80-83).

Dit is duidelik dat die kurrikulum dit verlang dat leerders probleme vanuit die alledaagse lewe moet kan oplos asook probleme in wiskundige konteks. Leerders in die Seniorfase wat reeds op denkvlak 2 operasioneel behoort te wees, moet induktief en deduktief kan redeneer. Wanneer probleemoplossing, soos in die RNCS, as basiese vaardigheid beskou word, is die fokus op die essensiële van probleemoplossing, wat alle leerders moet leer. Probleemoplossing is dan basiese vaardigheid wat die leerder met hom kan saamneem vir die res van sy pad vorentoe. Daar is

vervolgens definitiewe tegniek waarvolgens onderwysers hul leerders tydens probleemoplossing kan help.

Polya (1988) som hierdie tegniek in sy boekie “How to solve it” as volg op:

- i. Verstaan die probleem.
- ii. Maak plan.
- iii. Voer die plan uit.
- iv. Kyk terug - verifieer.

### **3. Verskeidenheid van probleme en take**

#### ***Van Hiele Model***

Hierdie aspek is van besondere belang in die VHM tydens onderrigfase vier.

Die leerders moet genoegsame probleme of take ontvang om die wye terrein van die betrokke studiegebied te verken. Die gemelde aspekte soos onder *strategie* hierbo genoem, moet ook duidelik in die RNCS na vore kom.

#### ***Revised National Curriculum Statement***

Die RNCS stel wye verskeidenheid van probleme en take voor wat die leerders in staat moet stel om probleemoplossing as vaardigheid te kan ontwikkel.

Grondslagfase:

- describes, sorts and compares 3D objects according to size; objects that roll; objects that slide; shapes that have straight or round edges,
- observes and creates 2D shapes and 3D objects, ...with building blocks, construction sets, cut-out-2D shapes, clay, drinking straws,
- reads, interprets and draws informal maps of school environment or of an arrangement of 3D objects and locates objects on maps (RNCS 2002b: 16-27).

Intermediêre fase:

- the learner’s experience moves from recognition and simple description to classification and more detailed description of features and properties,
- investigates and compares ...properties of 2D shapes and 3D objects ...by making models of geometric objects using polygons they have cut out; cutting open models to trace their nets; and drawing shapes on grid paper,
- uses the vocabulary and properties ...to describe the relationships,

- describes and sketches; draws enlargements and reductions; locates position on a labeled grid; traces a path between positions following verbal and written instructions (RNCS 2002b: 36; 48-51).

#### Seniorfase

- the learner draws and constructs a wide range of geometric figures and solids, using appropriate geometric instruments and develops an appreciation for the use of constructions to investigate properties,
- uses transformations (rotations, reflections, translations) and symmetry to investigate properties,
- uses vocabulary to describe parallel lines cut by a transversal; perpendicular lines; intersecting lines and triangles in terms of angle relationships,
- uses various representational systems ...including ordered grids; Cartesian plane (4 quadrants); compass directions in degrees and angles of elevation and depression (RNCS 2002b: 64; 80-83).

#### 5.2.6 Vraag 5: Insig en struktuur

Word die verband tussen insig en struktuur soos in die VHM gevisualiseer ook in die RNCS uitgewys oor die grade R tot 9 heen?

#### *Van Hiele Model*

Die VHM is 'n praktiese model wat wegbeweeg van die memorisering van wiskunde feite en prosedures. In die VHM val die klem op die ontwikkeling van die leerder se konseptuele begrip (insig) op grond van sy vermoë om onderlinge verwantskappe (strukture) in meetkunde waar te neem. Van Hiele sien dan ook die basis van sy teorie as 'n samehang tussen denke, insig en struktuur. Die doel met die onderrig van wiskunde (en meetkunde) word deur Van Hiele gesien as die ontwikkeling van insig. Van Hiele (1986: 4) sê:

Because I had understood that the learning of facts could not be the purpose of teaching mathematics, I was convinced that the *development of insight* ought to be the purpose.

Om hierdie insig te help ontwikkel is presies waarom die onderrigfases van die VHM ontstaan het. Volgens die VHM, kan 'n leerder alleenlik insig verkry wanneer hy 'n struktuur kan waarneem, dit kan uitbrei, in besonderhede kan ondersoek en 'n groter omvattender struktuur kan visualiseer. Van Hiele laat homself soos volg uit:

1986: 5

I learned that insight might be understood as the result of perception of a structure.

1981: 5

Alle rationale denke is gegrondvest op strukturen. Over het algemeen zijn deze strukturen veel ingewikkelder dan de intuïtieve strukturen die men direkt waarneemt.

1986: 130

Teachers must help their pupils if they teach them to work with insight. For this insight the pupils must recognize many structures.

In die VHM rig die onderwyser die leerder met behulp van die onderrigfases om vanaf denkvlak  $n$  na denkvlak  $n + 1$  te vorder. Tydens onderrigfase 5 wanneer samevattende geheelbeeld gekry word, moet die leerder se insig in die meetkundeleerinhoud verbreed het, wanneer hy groter, omvattender struktuur kan waarneem.

### ***Revised National Curriculum Statement***

Die doel met die onderrig van wiskunde (en meetkunde) word ook deur die RNCS gesien as die ontwikkeling van die leerder se konseptuele begrip en insig. Die RNCS (2002b: 5) stel die doel van die Wiskunde onder “*Purpose*”, as volg:

In addition, the teaching and learning of Mathematics can enable the learner to:  
develop deep conceptual understandings in order to make sense of Mathematics.

Die RNCS beskou die ontwikkeling en opbou van matematiese struktuur oor die grade heen ook as kritiese faktor om die leerder se insig te help ontwikkel.

Die RNCS (2002b: 4) gee in sy definisie van Wiskunde onder andere die volgende:

“Mathematical ideas and concepts build on one another to create a coherent structure.” En verder stel die RNCS (2002b: 10; 36; 64) “The study of space and shape enables the learner ...to interpret, understand, ...reason and justify.”

### **5.2.7 Opsomming**

In hierdie hoofstuk is die RNCS aan die hand van die onderrigfases van die VHM geweeg. Dit wil voorkom asof, wat die onderrigfases betref, daar goeie vergelyking tussen die RNCS en die VHM getref kan word. Vervolgens word die RNCS in die lig van die denkvlakke van die VHM beskou. Skematiese uitleg van die vrae en die onderafdelings daarvan vir die *denkvlakke*, soos wat dit gebruik is om die RNCS aan die hand van die VHM te vergelyk, word gegee.

### 5.3 Denkvlakke

—*herkenning* —*analise* —*ordening* —*afleiding* —*rigorisme*

Rondom die denkvlakke in die VHM se hoofkenmerke, is die volgende vrae as kriteria vir vergelykende evaluering van die RNCS geformuleer.

#### 5.3.1 Skematiese uitleg van vrae en hul onderafdelings

##### Vraag 1: Hiërargiese opbou

1. Hiërargiese indeling.
2. Hiërargiese gebruik van meetkundeleerinhoud oor die denkvlakke heen.

##### Vraag 2: Diskontinui teite

1. Die aktiwiteite wat van die leerder verwag word.
2. Die meetkundemateriaal wat bestudeer word.
3. Gevolgtrekkings.

##### Vraag 3: Taalasppek

##### Vraag 4: Eksplisiet/implisiet

1. Ontwikkeling van ruimtelike vermoë.
2. Tesselasies.
3. Transformasies.

Bespreking van die vrae word vervolgens gedoen.

### 5.3.2 Vraag 1: Hiërargiese opbou

Kan die hiërargies/opeenvolgende (“sequential”) opbou van die denkvlakke dwarsdeur die grade R tot 9 heen, soos die RNCS voorstel dat meetkunde in skole aangebied moet word, wel waargeneem word?

#### 1. Hiërargiese indeling

##### *Van Hiele Model*

Een van die uitstaande kenmerke van die VHM is die hiërargiese opbou van die denkvlakke. In hierdie model moet leerder in bepaalde volgorde deur die denkvlakke heen beweeg, want dit is nie moontlik om vlak  $n + 1$  te bereik, alvorens vlak  $n$  nie bereik is nie (Van Hiele 1973: 99). Navorsing (Van Niekerk 1998: 68) het getoon dat dit ongeveer die gehele Grondslagfase (grade R tot 3) en die hele Intermediêre fase (grade 4 tot 6) neem om die Van Hiele denkvlakke 0 en 1 volledig te ontwikkel. Leerder kan alleenlik die Euklidiese meetkunde wat van hom in grade 10 tot 12 verwag word, na behore doen, wanneer die eerste drie denkvlakke reeds deur hom bemeester is. Dit beteken dat die Seniorfase (grade 7 tot 9) se fokus moet wees om denkvlak 2 te ontwikkel (Van Niekerk 1998: 68). Op grond van bogenoemde bevindinge kan die volgende ossilerende (of spirale) hiërargiese indeling gemaak word van die denkvlakke vir grade R tot 9 wat in kurrikulum waargeneem behoort te word.

Grade R tot 3: denkvlak 0: Visueel / Herkenning en

denkvlak 1: Eenvoudig Beskrywend

Grade 4 tot 6: denkvlak 0: Visueel / Herkenning en

denkvlak 1: Gevorderd Beskrywend / Eenvoudig Analities

Grade 7 tot 9: denkvlak 0: Visueel / Herkenning en

denkvlak 1: Beskrywend / Analities en

denkvlak 2: Ordening

##### *Revised National Curriculum Statement*

In die fokus wat die RNCS op meetkunde oor die grade R tot 9 plaas, word die hiërargiese indeling van die denkvlakke soos hierbo genoem, weerspieël.

**Denkvlak 0** Grondslagfase Fokus (Grade R tot 3)

The study of space and shape in the Foundation Phase is very practical and hands-on. The learner

begins by recognising and describing objects and shapes in the environment that resemble mathematical objects and shapes (RNCS 2002b: 10).

**Denkvlakke 0 en 1** Intermediêre fase Fokus (Grade 4 tot 6)

The learner's experience of space and shape in this phase moves from recognition and simple description to classification and more detailed description of features and properties of 2D shapes and 3D objects...(RNCS 2002b: 36).

**Denkvlakke 0, 1 en 2** Seniorfase Fokus (Grade 7 tot 9)

...Classification and description of geometric figures and solids should be extended to include similarity and congruence. The learner should develop the ability to reason effectively and justify appropriately when required... (RNCS 2002b: 64).

**2. Hiërargiese gebruik van meetkundefeerinhoud oor die denkvlakke heen**

*Van Hiele Model*

In die VHM moet spirale opbou van meetkundemateriaal (die leerinhoud) oor die denkvlakke heen plaasvind. Dit beteken dat dieselfde meetkundefeerinhoud, soos byvoorbeeld dieselfde gelyksydige driehoek, oor die opeenvolgende denkvlakke gebruik kan word, maar dat die moeilikheidsgraad telkens verhoog, soos wat dit in meer detail bestudeer word en soos wat struktuur ontwikkel. So byvoorbeeld sal die leerder op denkvlak 0 die gelyksydige driehoek slegs herken as visuele Gestalt, maar op denkvlak 1 sal hy ook eienskappe herken, soos dat die sye ewe lank is.

*Revised National Curriculum Statement*

In onderstaande tabel word die meetkundefeerinhoud as 2D vorme en 3D voorwerpe soos dit in die RNCS oor die grade voorkom, gelys.

**Tabel 12 Meetkundefeerinhoud: 2D vorme en 3D objekte**

Graad	Grondslagfase
R	Prismas (dose) en sferre (balle)
1	Prismas; sferre; driehoeke; reghoeke; sirkels
2	Prismas; sferre; driehoeke; reghoeke; sirkels; silinders; vierkante
3	Prismas; sferre; driehoeke; reghoeke; sirkels; silinders; vierkante; keëls; piramide



	<i>Intermediëre fase</i>
4	Dié voorheen behandel plus reghoekige prisma's en veelhoeke in terme van aantal sye tot en met 8 sye
5	Dié voorheen behandel plus kubusse
6	Dié voorheen behandel plus parallelogramme
	<i>Seniorfase</i>
7	Dié voorheen behandel, plus vaste liggame; trapesiums; vlieërs
8	Dié voorheen behandel, plus Platoniese vaste liggame (reëlmatige veelvlakke) waaronder tetraheder; oktaheder; dodekaheder en ikosaheder
9	Dié voorheen behandel, plus reëlmatige en onreëlmatige veelhoeke en veelvlakke

In die kurrikulum neem die aantal meetkundige 2D vorme en 3D voorwerpe wat behandel word stelselmatig en opeenvolgend met die grade toe. Die materiaal wat in vorige graad behandel is word weereens onder die loep geneem, maar telkens in meer detail en op hoër denkvlak. Die spirale benadering van die kurrikulum kan sy totale effektiwiteit verloor, as die onderwyser nie wakker is en poog om volgens die VHM, die leerder na hoër denkvlak te rig nie. Die gevaar van denkvlakreduksie is wesenlik en die assesseringstandaarde wys dit nie uit nie.

### 5.3.3 VRAAG 2: Diskontinuitate

Word daar diskontinuiteite (spronge) tussen die denkvlakke weerspieël oor die grade R tot 9 heen, soos die RNCS voorstel dat meetkunde in skole aangebied moet word?

#### *Van Hiele Model*

In die VHM is die diskontinuiteite (spronge) tussen die denkvlakke tydens die onderrig en leergebeure, volgens Van Hiele (1986: 49), die belangrikste eienskap van die denkvlakke. Van Niekerk (1997: 34) merk op dat hierdie spronge waargeneem kan word as “...qualitatively different levels of thinking.”

Om te illustreer hoe hierdie kwalitatiewe denke in die leerder ontwikkel, kan ons weer die gelyksydige driehoek beskou. Hierdie meetkundefiguur verander voortdurend vir die leerder soos hy oor die denkvlakke heen beweeg. Die leerder op denkvlak 0 hoef geen eienskappe aan die gelyksydige driehoek toe te ken nie, maar op denkvlak 1 sal hy die eienskap *éie* aan gelyksydige driehoek kan uitwys as synde sye wat ewe lank is. Op denkvlak 2 sal die kwaliteit van die leerder se denke verhoog wees tot waar hy die gevolgtrekking kan maak dat as driehoek se sye ewe lank is, die hoeke ook ewe groot is en omgekeerd. Hierdie sprong in die leergebeure noem die Van Hiele's diskontinuiteite. Verder is die sprong vanaf denkvlak nul na denkvlak een oorgang vanaf vlak *sonder* relasiernetwerk na vlak *met* relasiernetwerk. Hierdie spronge behoort in die RNCS oor die grade R tot 9 heen waarneembaar te wees in onder andere die aktiwiteite wat van die leerder verwag word en of dieselfde leerinhoud in meer detail en diepte behandel word. In die VHM word die volgende aktiwiteite tydens die **visuele vlak** (vlak 0) deur Van Niekerk (1997: 35) waargeneem:

This means that children *identify, name, compare and operate* on geometric figures (triangles, angles, intersecting or parallel lines) according to their appearance...

Op die **analitiese vlak** (vlak 1) onderskei Van Niekerk (1997: 35) die volgende aktiwiteite in die VHM:

Properties of figures are established experimentally by *observing, measuring, drawing and modelling*, ...discover properties/rules of a class of shapes empirically (for example by *folding, measuring, coloring, using a grid* or diagram).

Om te kyk of die diskontinuiteite wel in die RNCS waargeneem kan word, beskou ons vervolgens samevattende tabelle van aktiwiteite en leerinhoud wat die RNCS voorstel vir grade R tot 3 en vir grade 4 tot 6 gebruik moet word.

### ***Revised National Curriculum Statement***

#### **1. Die aktiwiteite en die gepaardgaande leerinhoud**

##### **Grondslagfase (grade R tot 3):**

In die volgende samevattende tabel word slegs sommige van die *aktiwiteite* en gepaardgaande *wiskundemateriaal* wat die RNCS (2002b: 16-27) vir grade R tot 3 uitstip, gelys. Die denkvlakindeling is soos in par. 5.3.2.

**Tabel 13.1 Aktiwiteite en wiskundemateriaal**

Grade	Level 0: Visual / Recognition No network	Level 1: Simple description Network starts to develop
R	recognise, identify, and name: (boxes-prisms) and (balls-spheres) describe, sort and compare, according to: size; objects that roll, objects that slide	Builds 3D objects using concrete materials (e.g. building blocks)
1	recognise, identify, and name: (boxes-prisms) and (balls-spheres) triangles, rectangles and circles describe, sort and compare, according to: size; objects that roll, objects that slide shapes that have straight or round edges	Observe and build given 3D objects using concrete materials (e.g. building blocks and construction sets).
2	recognise, identify, and name: (boxes-prisms) and (balls-spheres) cylinders, triangles, squares, rectangles circles describe, sort and compare, according to: size; objects that roll, objects that slide, shapes that have straight or round edges	Observe and create given 2D shapes and 3D objects using concrete materials (e.g. building blocks, construction sets and cut-out 2D shapes).
3	recognise, identify, and name: (boxes-prisms) and (balls-spheres) cylinders, triangles, squares, rectangles circles, cones, pyramids describe, sort and compare, including: •2D shapes in or on the faces of 3D objects •flat/straight and curved/round surfaces and edges	Observe and create given 2D shapes and 3D objects using concrete materials (e.g. building blocks, construction sets, cut-out 2D shapes, clay, drinking straws).

**Gevolgtrekkings:**

1. Tydens die Grondslagfase (graad R tot 3) is dit vir die onderwyser moontlik om die VHM te gebruik om leerder se denke op die visuele vlak te help ontwikkel. Verder word verskeidenheid

van meetkunde voorwerpe opeenvolgend bestudeer.

2. Die skep van aanvanklike substruktuur, sodat die leerder die sprong na die volgende denkvlak kan maak, kan ook deur die onderwyser bewerkstellig word deurdat implisiete basis vir die ontwikkeling van relasiernetwerk vir die analitiese vlak gelê word.

3. Die fasiliterende taak lê egter swaar op die skouers van die onderwyser om die nodige en korrekte substrukture te skep sodat vordering deur die denkvlakke in die klaskamer sal realiseer, anders kan die leerder vanaf graad R tot in graad 9 steeds op denkvlak 0 bly.

4. Die sprong of te wel diskontinuiteit wat moet realiseer, kan waargeneem word. Die onderwyser moet dit in gedagte hou dat leerder soms tussen twee denkvlakke kan wees.

### **Intermediêre fase (grade 4 tot 6):**

Tydens die Intermediêre fase (grade 4 tot 6) is die fokus meer gemik op die ontwikkeling van die **analitiese vlak** (vlak 1). Ter wille van volledigheid word die aktiwiteite soos deur Van Niekerk (1997: 35) vir hierdie denkvlak waargeneem, weer herhaal:

Properties of figures are established experimentally by observing, measuring, drawing and modelling, ...discover properties/rules of a class of shapes empirically (for example by folding, measuring, using a grid or diagram).

Die volgende samevattende tabel weerspieël die soortgelyke fokus wat die RNCS op die ontwikkeling van die denkvlakke plaas. In hierdie tabel word slegs sommige van die aktiwiteite en gepaardgaande wiskundemateriaal wat die RNCS (2002b: 48-51) vir grade 4 tot 6 uitstip, gelys. Die denkvlakindeling is soos in par. 5.3.2.

**Tabel 13.2 Aktiwiteite en wiskundemateriaal**

Grade	Level 0: Visual / Recognition No network	Level 1: Descriptive / Simple analysis Network starts to develop
4	Recognise, visualise and name Rectangular prisms, spheres; Cylinders, and other objects Prisms and pyramids Circles and rectangles Polygons in terms of the number of	Describe, sort and compare, according to geometrical properties: •shapes of faces •number of sides •flat and curved surfaces; straight and curved sides

	sides up to 8-sided figures.	Investigate and compare 2D shapes and 3D objects according to properties listed above by: <ul style="list-style-type: none"> <li>• making 3D models using cut-out polygons (supplied)</li> <li>• drawing shapes on grid paper.</li> </ul>
5	<p>Recognise, visualise and name, ... with focusing on:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• similarities and differences between cubes and rectangular prisms</li> <li>• similarities and differences between squares and rectangles</li> </ul> <p><u>NOTE:</u> These activities include both levels of thought.</p>	<p>Describe, sort and compare, ...according to properties:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• number and/or shapes of faces</li> <li>• number and/or length of sides</li> </ul> <p>Investigate and compare 2D shapes and 3D objects according to properties listed above by:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• making models of polygons they have cut out</li> <li>• cutting open models of geometric objects (e.g. boxes) to trace their nets</li> <li>• drawing shapes on grid paper.</li> </ul>
6	<p>Recognise, visualise and name, ... with focusing on:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• similarities and differences between tetrahedrons and other pyramids</li> <li>• similarities and differences between rectangles and parallelograms</li> </ul> <p><u>NOTE:</u> These activities include both levels of thought.</p>	<p>Describe and classify 2D shapes and 3D objects in terms of properties including:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• faces, vertices and edges</li> <li>• length of sides</li> <li>• angle size of corners</li> </ul> <p>Investigate and compare 2D shapes and 3D objects according to properties listed above by:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• making 3D models using: drinking straws to make a skeleton; nets provided by the teacher</li> <li>• drawing shapes on grid paper</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• using a pair of compasses to draw circles and patterns.</li> </ul>
--	---

### **Gevolgtrekkings:**

1. Die gevolgtrekkings is soortgelyk aan dié wat vir die Grondslagfase gemaak is.
2. Dit is opmerklik dat in die finale graad van spesifieke fase, dit wil sê in graad 3 en in graad 6 reeds die implisiete struktuur of netwerk voorkom om die sprong na die volgende denkvlak te kan neem.

### **5.3.4 Vraag 3: Taalasppek**

Word die besondere taalasppek van elke denkvlak uitgelig oor die grade R tot 9 heen, soos die RNCS voorstel dat meetkunde in skole aangebied moet word?

### ***Van Hiele Model***

Dit was vir die Van Hiele baie opmerklik dat leerder na sprong (tot volgende denkvlak) ander taal waarvoor hy voorheen nie beskik het nie, aangeleer het. In die VHM het elke denkvlak sy eie taalsimbole met relasienetwerk tussen hierdie simbole. Die struktuur van taal is kritiese faktor in die beweging deur die denkvlakke, en twee persone wat op verskillende denkvlakke operasioneel is, sal mekaar nie begryp nie (Van Niekerk 1997: 34). Vir die VHM skets Booysen (1994: 158-159) die taal op die verskillende denkvlakke as volg:

Die visuele vlak (denkvlak 0) is gebaseer op nie-verbale denke en waarneming.

Dit is denke sonder taal of woorde. Die leerder beskou op hierdie vlak die ruimte soos hy dit beleef en waarneem. Taal gee aan hierdie waarnemings naam. Hierdie naam word oorgedra op soortgelyke waarnemings. So word baie konsepte binne nie-verbale denke ontwikkel. Dit gee aanleiding tot die ontwikkeling van taal op die visuele vlak.

Van Hiele beskou die inhoud van die nie-verbale denke as veel ryker as die inhoud van die verbale denke. Die beskrywende vlak (denkvlak 1) berus op verbale denke en die taal vloei nie outomaties voort uit die taal van die visuele vlak nie. Die netwerk van die beskrywende vlak is heeltemal anders as die netwerk van die visuele vlak. Hierdie netwerk is afhanklik van konstruksie, en minder misverstande kom voor, maar dit het al gebeur dat konsepte op hierdie vlak verander is. Die teoretiese vlak (denkvlakke 2, 3 en 4) beskik weer oor totaal ander taal en netwerk as dié van die

beskrywende vlak. Hierdie vlak is belangrik vir die rigiede strukture van vakke soos rekenkunde, wiskunde en fisika. Die samehangende struktuur van hierdie denkvlak, maak konsepte op hierdie vlak onfeilbaar. Die formulerings in wiskunde taal op hierdie vlak kan maklik verstaan word, mits daar glad nie van die taal op die visuele vlak gebruik gemaak word nie. Booysen (1994: 159) maak ten opsigte van die taalaspek die volgende opmerking:

Daar bestaan 'n kloof van *onverstaanbaarheid* tussen die visuele en beskrywende vlak, sowel as tussen die beskrywende en teoretiese vlak.

### ***Revised National Curriculum Statement***

In die RNCS word die gebruik van die taal (wiskunde se woordeskat en simbole) oor die grade R tot 9 heen soos volg gefokus:

Grondslagfase (grade R tot 3):

The learner begins by recognising and describing objects and shapes in the environment that resemble mathematical objects and shapes. The learner should handle these objects and shapes, cut out and draw sketches, and describes them with appropriate and expanding vocabulary.

The learner should be given opportunities to follow and give directions as well as to describe his or her own position and the positions of objects in space using appropriate vocabulary (RNCS 2002b: 10).

Intermediêre fase (grade 4 tot 6):

The learner's experience of space and shape in this phase moves from recognition and simple description to classification and more detailed description of features and properties of 2D shapes and 3D objects.

Learners should be given opportunities to:

describe location, transformations and symmetry (RNCS 2002b: 36).

Seniorfase (grade 7 tot 9):

In the Senior Phase 2D shapes and 3D objects are referred to as geometric figures and solids. Classification and description of geometric figures and solids should be extended to include similarity and congruence. The learner should develop the ability to reason effectively and justify appropriately when required (RNCS 2002b: 64).

Bogenoemde op die keper beskou, is dit duidelik dat die wiskunde taal wat in grade R tot 3 gebruik gaan word oorwegend die taal van denkvlak 0 sal wees met 'n aanvang van die taal van denkvlak 1.

Vir grade 4 tot 6 sal die wiskunde taal bestaan uit 'n uitfasering van die taal van denkvlak 0 met

groter klem op die gebruik van die taal van denkvlak 1. Daar moet egter onthou word dat ongeag watter graad die leerder hom in bevind, dit wenslik is om die onderrig van enige nuwe wiskunde konsep op die visuele (nie-verbale) vlak te begin. Vir grade 7 tot 9 sal die wiskunde taal meestal op die taal van die teoretiese vlak aangebied word, met inbegrip dat nuwe konsepte in die taal van beide denkvlak 0 en 1 onderrig kan word. Die praktiese aanslag in die onderrig van meetkunde wat die RNCS oor al die grade heen voorstaan, indien korrek geïmplementeer, dra voorwerpe uit die leerder se alledaagse lewe die klaskamer binne. So byvoorbeeld word in grade R tot 3 na balle (sfere) en dose (prismas) verwys. Dit maak dit dan vir die onderwyser *en* die leerder moontlik om van meet af aan op die visuele vlak te kommunikeer. Verder bied die modellering van 3D objekte met materiaal soos drinkstrooitjies en klei, aan beide onderwyser *en* leerder die geleentheid om met woorde en simbole wat reeds aan die leerder bekend is, te kommunikeer.

### **5.3.5 Vraag 4: Eksplisiet/implisiet**

Was dit wat eksplisiet op vlak n behandel word, wel implisiet op vlak n-1 behandel oor die grade R tot 9 heen, soos die RNCS voorstel dat meetkunde in skole aangebied moet word?

In die VHM is die eksplisiete redenasies op vlak n afhanklik van die implisiete struktuur van vlak n-1. Ons kan ook sê dat die inherente objekte van vlak n-1, die studie-objek van vlak n word (Booyen 1994: 154). Ons kan weer die voorbeeld van die gelyksydige driehoek beskou. Die spirale aanslag oor die denkvlakke heen asook oor die grade heen spreek duidelik wanneer die gelyksydige driehoek implisiet op denkvlak 0 in graad 1 behandel word en dieselfde gelyksydige driehoek eksplisiet op denkvlak 1 in graad 6 behandel word. Aan die hand van drie onderwerpe wat oor die grade R tot 9 heen vergelyk kan word, word daar gekyk of die eksplisiete/implisiete kenmerk van die denkvlakke wel in die RNCS waarneembaar is.

## **1. Ontwikkeling van ruimtelike vermoë**

### ***Van Hiele Model***

Vanuit die perspektief van die Van Hiele teorie skets Booyen (1994: 278-294) riglyne vir die kurrikulum soos volg:

*Grondslagfase*: Leerders moet meetkundige figure uitken en benoem *asook* verskeidenheid take en aktiwiteite doen met die doel om ruimtelike vermoëns te ontwikkel.



*Intermediêre fase:* Herkenning, beskrywing en klassifisering van meetkunde figure deur praktiese ervaring. Leerders moet met verskeie 3D vaste-lyggame kan eksperimenteer en verken. In graad 6 moet praktiese ondersoek na rotasiesimmetrie in die vierkant en reghoek, asook tesselasies van die platvlak met vierkante, reghoeke, reghoekige driehoeke en gelyksydige driehoeke gedoen word.

*Seniorfase:* Leerders moet praktiese ervaring met meetkundige figure opdoen, waaronder transformasies asook tesselasies van die platvlak en 3D figure. Tydens hierdie fase word eienskappe van hoeke en driehoeke ondersoek en neem Euklidiese meetkunde aanvang.

### ***Revised National Curriculum Statement***

Die RNCS stel wye verskeidenheid van take en aktiwiteite voor wat die leerders in staat kan stel om strukture implisiet op denkvlak  $n-1$  te ontwikkel wat later op denkvlak  $n$  eksplisiet beredeneer kan word. So word met die handelinge en aksies wat daarop gemik is om ruimtelike denke te ontwikkel, tydens die Grondslagfase implisiete struktuur vir gebruik in die Intermediêre fase gelê. Dieselfde leerinhoud word eers implisiet en dan later eksplisiet onderrig. Dit is egter van kardinale belang dat onderrig deurgaans volgens die VHM moet geskied, anders kan denkvlak-reduksie voorkom.

Grondslagfase:

- describes, sorts and compare 3D objects according to size; objects that roll; objects that slide; shapes that have straight or round edges,
- observes and creates 2D shapes and 3D objects, ...with building blocks, construction sets, cut-out-2D shapes, clay, drinking straws (RNCS 2002b: 16-27).

Intermediêre fase:

- the learner's experience moves from recognition and simple description to classification and more detailed description of features and properties,
- investigates and compares ...properties of 2D shapes and 3D objects ...by making models of geometric objects using polygons they have cut out; cutting open models to trace their nets; and drawing shapes on grid paper,
- uses the vocabulary and properties ...to describe the relationships (RNCS 2002b: 36; 48-51).

Seniorfase:

- the learner draws and constructs a wide range of geometric figures and solids, using appropriate geometric instruments and develops an appreciation for the use of constructions to investigate properties (RNCS 2002b: 64; 80-83).

## 2. Tesselasies

Tesselasies is saam met transformasiemeetkunde sedert 1994 in Suid-Afrikaanse laerskole bekendgestel. Leerders kan transformasies (rotasies, refleksies, verskuiwings) met identiese teëls doen en daardeur bekendgestel word aan die begrippe gelykvormigheid en kongruensie. Ook kan leerders gevra word om in so 'n tesselasiepatroon te soek vir parallelogramme, trapesiums of driehoeke. Leerders kan ook gevra word om in so 'n tesselasiepatroon te soek na byvoorbeeld 'n groter trapesium as die een wat hy so pas geïdentifiseer het, maar wat dieselfde vorm as die oorspronklike een het, om daardeur intuïtief aan die begrip van gelykheid bekend gestel te word.

Tesselasies het baie toepassings in die alledaagse lewe (bv. vloerbedekkings, kunste, verpakkings en dekens). Laat leerders teëlpatrone in die klaskamer of in prente soek, om sodoende 'n intuïtiewe begrip van die woord tesselasie te vorm. Leerders geniet hierdie tipe aktiwiteite, maar die onderwyser moet probeer om aanvanklik net een vorm te gebruik. Susan Stuart (1999:49) skryf oor simmetrie die volgende:

The study of pattern is an important part of mathematics. The fact that patterns occur in every culture, past and present, points to the universal appreciation and enjoyment of order and symmetry. To study patterns is to study symmetry.

### *Van Hiele Model*

Booyesen (1994: 278-294) skets die volgende riglyne vir tesselasies:

*Grondslagfase:* Leerders moet meetkundige figure uitken en benoem asook verskeidenheid take en aktiwiteite doen met die doel om ruimtelike vermoëns te ontwikkel.

*Intermediêre fase:* In graad 6 moet praktiese ondersoek na rotasiesimmetrie in die vierkant en reghoek, asook tesselasie van die platvlak met vierkante, reghoeke, reghoekige driehoeke en gelyksydige driehoeke gedoen word.

*Seniorfase:* Leerders moet praktiese ervaring met meetkundige figure opdoen, waaronder transformasies asook tesselasies van die platvlak en 3D figure. Tydens hierdie fase word eienskappe van hoeke en driehoeke ondersoek en neem Euklidiese meetkunde 'n aanvang.

### ***Revised National Curriculum Statement***

Die RNCS begin met simmetrie-onderrig vanaf graad R. Aanvanklik is die simmetrie fokus baie eenvoudig soos byvoorbeeld fokus op die individuele leerder in sy onmiddellike omgewing. Oor die grade heen word hierdie konsep egter meer kompleks. Wye verskeidenheid van take en aktiwiteite bied weereens die onderwyser die geleentheid om, deur die toepassing van die VHM, die leerder te kan lei om strukture implisiet op denkvlak n-1 te ontwikkel wat later op denkvlak n ekplisiet beredeneer kan word.

#### **Tabel 14.1 Transformasies**

Tydens die Grondslagfase skets die RNCS (2002b:16, 26-27) die volgende aktiwiteite.

GRADE	
R	> Recognises symmetry in self and own environment (with focus on front and back).
1	> Recognises symmetry in self and own environment (with focus on 'left', 'right', 'front' and 'back'.)
2	> Recognises symmetry in 2D shapes and 3D objects.
3	> Determines lines of symmetry in 2D shapes using paper folding and reflection.

Tydens die Intermediêre fase skets die RNCS (2002b: 48-51) die volgende aktiwiteite.

#### **Tabel 14.2 Transformasies**

GRADE	
4	> recognises and describes lines of symmetry in 2D shapes including those in nature and its cultural art forms. > makes 2D shapes, 3D objects and patterns from geometric objects and shapes (e.g. tangrams) with a focus on tiling (tesselation) and line symmetry.
5	> recognises, describes and performs rotations (turns), reflections (flips) and translations (slides) using geometric figures and solids. > makes 2D shapes, 3D objects and patterns from geometric shapes and describes these in term of: • tessellations; • line and rotational symmetry; • movement including rotations, reflections and translations.
6	> uses the vocabulary and properties of rotations, reflections and translations to describe the relationships between distinct 2D shapes and 3D objects within patterns (including transformations and symmetry).

Tydens die Seniorfase skets die RNCS (2002b: 80-83) die volgende aktiwiteite.

**Tabel 14.3 Transformasies**

GRADE	
7	> uses transformations (rotations, reflections and translations) and symmetry to investigate (alone and/or as a member of a group or team) properties of geometric figures.
8	> uses transformations (rotations, reflections and translations) and symmetry to investigate (alone and/or as a member of a group or team) properties of geometric figures.
9	> uses transformations, congruence and similarity to investigate, describe and justify (alone and/or as a member of a group or team) properties of geometric figures and solids, including tests for similarity and congruence of triangles.

### 3. Transformasies

Hierdie aspek val saam met tesselasies soos hierbo bespreek asook die bespreking van die 3D 2D tweerigtingtransformasie as vaardigheid (kyk par. 5.2.3).

#### 5.3.6 Opsomming

In hierdie hoofstuk is kritiese evaluering van die RNCS aan die hand van die VHM gedoen. Die vrae wat geformuleer en as kriteria gebruik is se oorsprong lê onder andere in die onderbou van die VHM, die unieke kenmerke van die VHM, klemverskuiwings in wiskundeonderwys as sodanig, asook die spiraalbenadering tot onderwys. Rondom die onderrigfases is die volgende didaktiese aspekte beskou, naamlik die praktiese aanbieding van meetkunde, die ontwikkeling van leerder se ruimtelike vermoëns, kommunikasie en redenering as vaardighede, probleemoplossing as vaardigheid en die verband tussen insig en struktuur. Rondom die denkvlakke is daar gekyk na die hiërargiese opbou van die denkvlakke, die diskontinuiteite tussen die denkvlakke, die besondere taalaspek van elke denkvlak, en die eksplisiete/implisiete verband tussen die denkvlakke. Dit wil voorkom asof daar baie goeie vergelyking tussen die RNCS en die VHM getref kan word. Hierdie versoenbaarheid dui daarop dat die VHM uiters geskikte model vir die implementering van die RNCS se meetkunde is. Vervolgens word die belangrikste bevindinge en aanbevelings wat uit hierdie navorsing na vore gekom het in Hoofstuk 6 uiteengesit.

## **HOOFSTUK 6**

### **BEVINDINGE EN AANBEVELINGS**

#### **6.1 Inleiding**

Die doel van hierdie navorsing was om deur middel van literatuurondersoek, die huidige Suid-Afrikaanse meetkundekurrikulum vir grade R tot 9 analities, in die lig van die Van Hiele Model te evalueer. In Hoofstuk 2 is die VHM bekend gestel met analise van die onderbou van die model asook die stel van die kurrikuleringsimplikasies wat die model inhou. In Hoofstuk 3 is daar na die spiraalbenadering tot kurrikulumontwerp in meetkundeonderwys binne die denkvlakke en die onderrigfases van die VHM gekyk. Die RNCS is in Hoofstuk 4 bekend gestel met bespreking van die kurrikulum se onderbou. In Hoofstuk 5 is kritiese evaluering van die RNCS aan die hand van die VHM, soos gesien teen die agtergrond van die spiraalbenadering gedoen. Op die vraag (kyk par. 1.2) in watter mate die meetkundekurrikulum aan die kurrikuleringsimplikasies wat die VHM inhou beantwoord, word die volgende belangrikste bevindinge en aanbevelings uiteengesit.

#### **6.2 Hoofbevindinge van die navorsing**

Die volgende bevindinge het uit die literatuurondersoek en navorsing na vore gekom.

Die spiraalbenadering geniet wye erkenning en steun in wiskundeonderwys en word deur beide die VHM en die RNCS in meetkunde geïmplementeer.

Die onderbou van die RNCS is versoenbaar met die onderbou van die VHM.

Al die vrae in die kritiese vergelyk van die RNCS aan die hand van die VHM kon bevestigend beantwoord word.

Hierdie positiewe bevindinge stel die VHM in uiters goeie lig as onderrig- en leermodel vir meetkunde in die implementering van die RNCS in Suid-Afrikaanse skole. Die bevindinge van hierdie navorsing kan as volg saamgevat word.

#### **6.3 Die spiraalbenadering in meetkundeonderwys**

Die doelstelling in Hoofstuk 3 was om vanuit die literatuurondersoek, meetkundeleerinhoud te selekteer en aktiwiteite binne die konteks van die VHM se eerste drie denkvlakke en vyf onderrigfases te ontwikkel. Die volgende bevindinge ten opsigte van die spiraalbenadering kan genoem word:

Die literatuurondersoek dui op oorweldigende steun vir die gebruik van spiraalbenadering in die onderwys van meetkunde (en wiskunde).

Die spiraalbenadering tot meetkunde onderrig figureer in beide die VHM en die RNCS.

In die RNCS moet LU3 tydens elke skoolfase bereik word. Dit skep ruimte vir die implementering van die spiraalbenadering in meetkunde vanaf graad R tot 9.

Die spiraalgebaseerde kurrikulum soos Bruner (kyk par. 2.3.1) dit stel, waar sentrale tema vertikaal oor die grade heen onderrig word, lei onder andere tot die *bemagtiging* van die leerder wat belangrike aspek in die onderbou van die RNCS is.

Die aktiwiteite (in par. 3.6.2) toon dat die spiraalbenadering aan die hand van die VHM vir *transformasiemeetkunde*, in die RNCS toegepas kan word.

Die wisselwerking in die didaktiese driehoek kan sinvol deur die kenmerke (onderrigfases en denkvlakke) van die VHM in spiraalbenadering, binne kurrikulum verband byeengebring word.

Die meetkundekonsep *parallelisme* kom in die RNCS opeenvolgend oor die grade heen voor en kon gebruik word om die spiraalbenadering binne spesifieke graad, asook oor die grade heen ten opsigte van die VHM te ondersoek.

Meetkunde word in die RNCS in spiraalbenadering as geïntegreerde onderafdeling binne die wiskundekurrikulum vanaf graad R tot 12 aangebied. Dit is groot verbetering vanaf die ou bedeling. LU3 is soos elke ander kritiese leeruitkomst van kardinale belang. Dus geniet meetkunde dieselfde segswaarde en prioriteit as die ander afdelings van wiskunde.

Verder toon die literatuurstudie vir die gebruik van spiraalbenadering in meetkundeonderwys, duidelike beklemtoning van die volgende uitkomst. Hierdie uitkomst behoort by beide die kurrikulum en die leerprogram ingesluit te word.

- Die leerder se denkvermoë moet ontwikkel en verhoog word, sy repertoire van vaardighede moet uitgebrei word, sy vrees vir meetkunde moet oorkom word, daar moet strategieë tot sy beskikking gestel word, waarmee hy probleme in die praktyk met vertroue kan oplos, sy ruimtelike vermoëns moet ontwikkel en uitgebou word, beredenering wat met insig en begrip gedoen word moet bereik word, asook sy vermoë om verbaal en skriftelik te kan kommunikeer.
- Die skep van geskikte grondslae en die rol wat strukture speel, word beklemtoon, en volgens Sanders (1991: 13) kan onderwyser binne spiraalkurrikulum wiskunde suksesvol onderrig deur onder andere “ ...providing manipulative experiences, ...promoting creative thinking, and

...planning enrichment activities.”

- Schulman en Eston (1998: 72) wys ook daarop dat binne spiraalkurrikulum, “ ...teachers can note development growth and patterns among learners.”

## **6.4 Die didaktiese fundering**

Die doelstellings met Hoofstukke 2 en 4 was om vanuit die literatuurondersoek die VHM en die RNCS se didakties-opvoedkundige onderbou respektiewelik bloot te lê. Die volgende is bevindinge ten opsigte van die VHM se fundering (kyk par. 2.3) en die versoenbaarheid met die onderbou van die RNCS.

### **6.4.1 Die didaktiese onderbou van die Van Hiele Model**

Die literatuurondersoek toon dat die VHM wel deeglik didakties gegrond is, met die oorsprong sover terug as Plato se denkskool. Aansluiting by ander teorieë van die onderrig- en leergebeure waaronder Gagné, Hegel, Dewey, Piaget, Bruner, Polya, Dienes, asook by konstruktivisme en die realiteitsbenadering, plaas die VHM inderdaad op 'n vaste didaktiese fondament.

Die VHM se onderbou het raakpunte met Bloom se taksonomie van onderrigdoelwitte en bemeesteringleer (kyk par. 4.4.2) wat dit onder andere versoenbaar maak met die didaktiese onderbou van die RNCS.

Freudenthal se didaktiese fenomenologie en die realisitiese benadering (kyk par. 2.3.2) bied ruimte waarbinne die VHM ten opsigte van kontemporêre didaktiese vereistes en vraagstukke vernuwe kan word, wat dit aanpasbaar maak met die RNCS.

Horisontale en vertikale matematisering sluit aan by die probleemoplossingsbenadering, UGO en sosiaal-konstruktivisme, en versoen die VHM verder met die onderbou van die RNCS.

Die sosiale en kulturele klemverskuiwing ten opsigte van die begrip wiskundeleer soos deur Gravemeijer *et al.* (kyk par. 2.3.2) aangespreek, bring die individuele ontwikkeling van die leerder en die sosiale klaskamerpraktyk van die meetkundeonderwys met horisontale en vertikale matematisering in verband. Dit versoen die VHM verder met die onderbou van die RNCS.

Verdere klemverskuiwings in wiskundeonderwys soos dat meetkunde vanaf graad R tot graad 12 onderrig moet word, vind aanklank met die VHM en die Russe het hierdie verband reeds met groot sukses in hul skole toegepas. Dit is ook 'n positiewe verandering in die RNCS.

Die 3D – 2D transformasies kan suksesvol met behulp van die VHM onderrig word, en is versoenbaar met transformasiemeetkunde soos dit deur die RNCS voorgestel word.

Die VHM bied aan die leerder leerervaringe wat hom bemagtig om dit wat geleer word, te verstaan en te gebruik. Dit vind aanklank met die onderbou van die RNCS.

Baie navorsing ten opsigte van die VHM is wêreldwyd gedoen. Die navorsing het bevestig dat die VHM – geskikte didaktiese-en-opvoedkundige model vir meetkundeonderwys is.

#### **6.4.2 Die didaktiese onderbou van die Revised National Curriculum Statement**

Die doelstelling met Hoofstuk 4 was om vanuit die literatuurondersoek die RNCS se didaktiese-opvoedkundige onderbou te analiseer. Die volgende bevindinge ten opsigte van die RNCS se onderbou (kyk par. 4.4) en die versoenbaarheid met die VHM se onderbou, kan genoem word.

Die literatuurondersoek toon dat die RNCS gegrond is op die visie en waardes wat vervat is in die Grondwet van die Republiek van Suid-Afrika, (Wet 108 van 1996).

Die RNCS bou op hierdie visie en waardes en implementeer verder die filosofie en praktyk van UGO.

Die literatuurondersoek toon dat UGO se didaktiese wortels teruggevoer kan word tot onder andere die taksonomieë van Bloom en Gagné, en – snyding van:

- die kriteriumgebaseerde assessering,
- die opvoedkundige doelwitte,
- die bekwaamheidsgebaseerde onderwys, en
- bemeesteringleer.

Hierdie onderbou van die RNCS het raakpunte met die VHM.

In UGO vind – verskuiwing van die tradisionele doelwitte-en-oogmerke na uitkomst plaas.

UGO as benadering is – onderwysproses wat prestasiegeoriënteerd, aktiwiteitsgebaseerd en leerdergerig is. Dit toon raakpunte met die onderbou van die VHM.

In UGO moet die leerders nie net kennis verwerf nie, maar hulle moet verstaan wat hulle leer en leerders moet ook toepaslike vaardighede ontwikkel. Dit sluit aan met die VHM se didaktiese onderbou.

In UGO moet leerders aktiewe deelnemers van die leergebeure word asook medeverantwoordelikheid daarvoor dra. Dit is versoenbaar met die VHM.



Die sterk element van sosiaal-konstruktivisme in UGO (kyk par. 4.4.3.2) sluit aan by die VHM en horisontale en vertikale matematisering van die realistiese benadering.

UGO word ook in die kurrikula van lande soos die Verenigde State van Amerika, Kanada, Engeland, Australië, New Zealand en Japan geïmplementeer. Die verskillende tipes UGO en die verskillende wyses waarop die uitkomst gebruik word om die kurrikulum te struktureer, gee aanleiding tot groot verskille in die implementering van UGO.

Die effektiwiteit van UGO kan bevraagteken word, aangesien minimale navorsing daaromheen gedoen is (McNeir in Kgatitsoe 2002: 96).

## **6.5 Bevindinge van die analitiese vergelyk**

Die doelstelling met Hoofstuk 5 was om vanuit die literatuurondersoek vrae te formuleer wat as kriteria gebruik kon word om die RNCS krities aan die hand van die VHM te evalueer. Al die vrae in die kritiese vergelyk van die RNCS aan die hand van die VHM kon bevestigend beantwoord word.

### **6.5.1 Bevindinge rondom die onderrigfases**

#### **Vraag 1: Praktiese aanbieding**

Uit die literatuurondersoek is bevind dat beide die VHM en die RNCS praktiese aanbieding voorstaan, waartydens die leerders aktief betrokke moet wees in die fisiese manipulasies van konkrete meetkundemateriaal. Deur verskillende aktiwiteite en verskeidenheid take uit te voer, moet die leerder sodanig met sy omgewing betrokke raak dat voorwerpe vanuit sy alledaagse lewe vir hom meetkunde-konsepte ontsluit.

#### **Vraag 2: Ruimtelike vermoë**

Die literatuurondersoek toon aan dat beide die VHM en die RNCS hoë prioriteit aan die ontwikkeling van die leerder se ruimtelike vermoëns gee. Die ontwikkeling van visualisering as vaardigheid en die 3D – 2D transformasie speel in beide die VHM en die RNCS groot rol. In besonder moet miskonsepsies voorkom deur groot verskeidenheid van voorbeelde en teenvoorbeelde; verskillende aktiwiteite en veelvuldige oriëntasies te gebruik. Byvoorbeeld, as in alle voorstellings van vierkante een sy horisontaal voorkom, sal dit die verkeerde konsepsie by die leerder laat ontstaan.

### **Vraag 3: Kommunikasie en redenering**

Beide die VHM en die RNCS gee hoë prioriteit aan kommunikasie en redenering.

Leerders moet meetkunde woordeskat korrek en volgehoue (“consistently”) kan gebruik. In die RNCS word drie pertinente vaardighede vir Wiskunde genoem, naamlik: “Problem Solving; Reasoning; and Communication” (RNCS 2002b: 4). Hierdie drie vaardighede word as lewensvaardighede beskou en moet in die besonder in alle grade ontwikkel word.

### **Vraag 4: Probleemoplossing en divergente denke**

Beide die VHM en die RNCS gee baie aandag aan divergente denke en probleemoplossing vanuit die alledaagse leefwêreld van die leerder. Verskillende take en groot verskeidenheid van probleme asook verskillende strategieë, moet gebruik word. En soos reeds genoem, word in die RNCS drie pertinente vaardighede vir Wiskunde genoem, naamlik: “Problem Solving; Reasoning; and Communication” (RNCS 2002b: 4). Hierdie drie vaardighede word as lewensvaardighede beskou en moet in die besonder in alle grade ontwikkel word.

### **Vraag 5: Insig en Struktuur**

Van Hiele plaas baie klem op die skep van strukture om leerders tot dieper insig in meetkunde te rig. Vir die RNCS (2002b: 5) is hierdie aspek ook baie belangrik, en beskou die doel van wiskundeonderrig onder andere as “...the learner develop deep conceptual understandings in order to make sense of Mathematics.” Alleenlik egter tydens die implementering van die kurrikulum sal insig en struktuur eksplisiet byeen gebring kan word. So was dit byvoorbeeld opmerklik dat onderwysers verskillende interpretasies kon gee aan die meetkundige aspekte soos weergegee in die RNCS. In elke graad sal die leerder dus minimum of maksimum vir spesifieke denkvlak kan bereik. So byvoorbeeld is die herkenning van eienskappe van figuur, vlak 1 aktiwiteit, maar in die oefeninge (of in assessering) kan vir leerder slegs gevra word om die figure te benoem, sonder om na eienskappe te verwys, wat vlak 0 aktiwiteit is. So ook kan die gebruik van formules, wat moontlik gememoriser is, baie laer denkvlak impliseer.

## **6.5.2 Bevindinge rondom die denkvlakke**

### **Vraag 1: Hiërargiese opbou**

Die hiërargiese aard van die denkvlakke in die VHM vind aansluiting by die psigologiese perspektief dat leer hiërargies van aard is. Beide die VHM en die RNCS staan hiërargiese indeling en die hiërargiese gebruik van meetkundefeerinhoud oor die denkvlakke heen voor. Die meetkundige materiaal moet in die VHM opeenvolgend aangebied word, om die opbou van die denkvlakke te laat realiseer, en in die RNCS is die meetkundige materiaal in die algemeen opeenvolgend oor die denkvlakke geplaas. Die spiraalbenadering van die kurrikulum kan sy totale effektiwiteit verloor, as die onderriggebeure die leerder nie na hoër denkvlak rig nie. Die gevaar van denkvlakreduksie is wesenlik en die assesseringstandaarde wys dit nie uit nie (kyk par. 6.6). Oefeninge en toetse kan baie maklik nooit bokant vlak 0 beweeg nie.

### **Vraag 2: Diskontinuuï teite**

Die diskontinuuïteite tussen die denkvlakke in die VHM kan deur die aktiwiteite wat van die leerder verwag word, asook die meetkundefeerinhoud wat bestudeer word, aangedui word. Om te kyk of die diskontinuuïteite wel in die RNCS waargeneem kan word, verwys ons na die samevattende tabelle (kyk par. 5.3.3) waar aktiwiteite en meetkundefeerinhoud vir die Grondslagfase en die Intermediêre fase vervat is. Elke skoolfase is in 3 grade ingedeel en dit is duidelik dat in elke fase daar op die leerder se vorige meetkunde-ervaringe voortgebou word. In die eerste graad van spesifieke fase word die basis vir nuwe meetkunde gelê. In die laaste graad van daardie fase kom reeds die implisiete struktuur of netwerk voor om die sprong na die volgende denkvlak te kan neem. Dit is goeie weerspieëling van die diskontinuuïteite tussen die denkvlakke, asook die spiraalbenadering in die kurrikulum. Tog moet daarop gelet word dat die fasiliterende taak swaar op die skouers van die onderwyser lê om die nodige en korrekte substrukture te skep sodat vordering deur die denkvlakke in die klaskamer sal realiseer, anders kan die leerder vanaf graad R tot in graad 9 steeds op denkvlak 0 bly.

### **Vraag 3: Taalaspek**

Vir beide die VHM en die RNCS is die taalaspek van belang, maar alhoewel dit belangrike aspek is, word baie probleme rondom taal ervaar. Die probleme wat rondom moedertaal-onderrig ondervind word, word deur verskeie outeurs geopper. In Suid-Afrika is daar elf amptelike

landstale, maar onderrig vind meestal in leerder se tweede taal plaas. Kgatitsoe (2002: 95) haal Schwarz (1994: 87) aan en sê dat die taal van UGO nie-verbruikersvriendelik is nie, maar “...limiting, dehumanizing, mechanistic, instrumentalistic, behavioristic, linear, ...and manufactures new terminology in an alarming rate.” Hierdie aspekte verhoog uiteraard die belangrikheid van die taalaspek van elke denkvlak in die VHM (kyk par. 5.3.4).

#### **Vraag 4: Eksplisiet/implisiet**

In die VHM is die eksplisiete redenasies op vlak n afhanklik van die implisiete struktuur van vlak n-1. Om hierdie eksplisiet/implisiet kenmerk van die denkvlakke te ondersoek is daar na drie onderwerpe, naamlik: die ontwikkeling van ruimtelike vermoë, tesselasies en transformasies gekyk. Daar is vir al drie onderwerpe bevind dat die RNCS wel wye verskeidenheid van take en aktiwiteite voorstel wat die onderwyser die geleentheid bied om, deur toepassing van die VHM, die leerder te kan lei om strukture implisiet op denkvlak n-1 te ontwikkel wat later op denkvlak n eksplisiet beredeneer kan word. Die onderwyser kan dus die onderrigmateriaal vir leerder op vlak 0 so kies dat die implisiete ontwikkeling van verwantskappe op later stadium geformaliseer sal kan word. Juis daarin lê uitdaging vir die onderwyser, want keuses van onderrigmateriaal kan lei tot potensieel verskillende implisiete ervarings.

Hierdie navorsing toon aan dat die VHM suksesvol aan die RNCS gekoppel kan word vir meetkundeonderwys in Suid-Afrikaanse skole. Hierdie navorsing bevind dat die VHM as gids gebruik kan word om die *teorie en die praktyk* suksesvol, binne die wisselwerking van die drie didakties komponente, naamlik die leerder, die onderwyser en die leerinhoud, byeen te bring. Die literatuurondersoek toon dat die grootste uitdaging in Suid-Afrikaanse skole tans lê in die *implementering* van UGO. In besonder verwys ons hier na die bevindinge van Kgatitsoe (2002) en Zulu (2003) se navorsing vir die Suid-Afrikaanse konteks. Tereg maak Zulu (2003:28) die opmerking dat die infasering van die RNCS menige implikasies inhou, soos:

development of trainers, development of learning support materials, and the consolidation of national and provincial curriculum structures to drive its implementation (and) publishers would need time to produce quality textbooks.

Dit is ook onder andere duidelik dat kritieke behoefte aan onderrig-en leerprogram beslissende knelpunt in die *implementering* van UGO is. Kgatitsoe (2002: 94) se navorsing het

getoon dat 99% van onderwysers probleme ondervind met die *implementering* van UGO en K2005 en dat hierdie bevinding ooreenstem met die verslag van Chisholm (2000: 5-10). Kgititsoe het bevind die meeste onderwysers vind dit moeilik om die teorie van UGO en die praktyk byeen te bring. In die lig van die positiewe verband wat hierdie studie vir die VHM en die RNCS bevind het, word die volgende aanbevelings gemaak.

## **6.6 Aanbevelings**

Die Departement van Onderwys (kyk par. 4.4.3.4) het besluit dat die RNCS deur middel van leerprogramme in skole geïmplementeer sal word en het reeds in 2003 begin om riglyne vir die ontwikkeling en implementering van Leerprogramme saam te stel (DoE 2003a en 2003b). Dit is positiewe stap vorentoe waarby soos volg aangesluit word.

1. Die Departement van Onderwys (kyk par. 4.3.4) stel voor dat leerprogramme goed gestruktureerde en sistematiese groeperings van leeraktiwiteite, insluitend inhoud en onderrigmetodes sal wees. Hierdie navorsing kon aantoon dat die VHM aan hierdie eis kan beantwoord. In Hoofstuk 3 is goed gestruktureerde en sistematiese leeraktiwiteite as voorbeelde uiteengesit en is parallelisme as leerinhoud deur die onderrigfases van die VHM oor die grade heen onderrig. Daar word dus aanbeveel dat leerprogramme vir meetkunde geskoei word op die VHM.
2. Die Departement van Onderwys (kyk par. 4.4.3.4) meld dat die RNCS hierdie leerprogramme sal fundeer. Hierdie navorsing het bevind dat die onderbou van die VHM wel versoenbaar is met die onderbou van die RNCS (kyk par. 6.4). Daar word dus aanbeveel dat die leerprogramme vir meetkunde geskoei kan word op die onderbou van beide die VHM en die RNCS.
3. Die Departement van Onderwys stipuleer verder dat die Leerprogramme ook werkskedules wat die tempo en orde van die aktiwiteite vir elke jaar verskaf, moet bevat, asook voorbeelde van lesplanne wat in enige gegewe tydperk geïmplementeer kan word (DoE 2002a: 15). Hierdie navorsing (kyk par. 3.6) bevind dat binne die VHM die tempo en orde van aktiwiteite, asook die lesplan aangedui kan word. Aanbeveling: Leerprogramme vir meetkunde kan geskoei word

op die VHM.

4. Die Departement van Onderwys stipuleer laastens dat die leerprogramme deur provinsies, skole en onderwysers ontwikkel sal word. Hierdie navorsing bevind dat dit een van die knelpunte in die *implementering* van UGO is en daarom word aanbeveel dat kundiges en vakspecialiste (waaronder onderwysers mag wees) aan die hand van die Departement van Onderwys se “Teacher’s Guide” (DoE 2003a en 2003b), *asook* aan die hand van die VHM sodanige leerprogram vir meetkunde sal opstel. Dit kan dan in die praktyk deur provinsies, skole en onderwysers uitgetoets en verbeter word. Ter staving van hierdie aanbeveling die volgende uit die literatuurondersoek.

Kgatitsoe (2002: 95-97) meld spesifieke probleme wat onderwysers in Suid-Afrikaanse skole met UGO ondervind as:

...demanding on the part of the educator, ...grading is confusing, ...assessment is a big problem, ... enrichment preparations are a problem, ...keeping track of outcomes could be taxing, ...OBE is expensive to implement, ...educators lack appropriate OBE instructional knowledge, ...lack of support material for learning and teaching.

Zulu (2003: 56-80) se navorsing toon dieselfde probleme wat tydens die implementering van UGO ondervind word en ons haal relevante uittreksels aan uit onderhoude wat hy met leerkragte gevoer het.

...the implementation of OBE had many practical difficulties at school level  
 ...school managers have not been equipped with the skills to manage OBE  
 ...school managers had different views concerning the implementation of OBE  
 ...insufficient learning material; teaching methods; assessment techniques;  
 ...high educator -learner ratio (1: 60) hampers continuous assesment  
 ...OBE terminology is confusing and OBE demands considerable paperwork  
 ...there is no common syllabus to standardise the content of OBE  
 ...a learner is ranked according to what he has done, and not to what he has understood  
 ...the goals of OBE are right but in the content the scope of choice of materials is too wide and selection is unguided  
 ...planning of OBE implementation is not in place in the schools  
 ...no common structured work programme  
 ...many different textbooks on the same learning area give learners disjointed information.

Uit hierdie bevindinge word die gevolgtrekking gemaak dat die infrastruktuur vir provinsies, skole en onderwysers in die turbulensie van die veranderingsproses in Suid-Afrikaanse skole tans nog nie in plek is nie. Aangesien onderwysers alreeds erge probleme met die implementering van UGO soos hierbo gerapporteer ondervind, word die verdere aanbevelings gemaak.

5. Vakspesialiste en kundiges moet onderrigseenhede (“units”) ontwerp. Hierdie eenhede kan groot rugsteun aan onderwysers bied, maar terselfdertyd ruimte laat tot innovasie en selfbemaagtiging. Hierdie eenhede moet leerinhoud (inhoud); leeraktiwiteite; leerervaringe; beoogde vaardighede, en assesseringsmetodes bevat. Wat meetkunde en die VHM aan betref, moet die denkvlakke en onderrigfases (waar moontlik) aangetoon word. Hierdie eenhede kan as handleiding vir die onderwyser dien. Hier word verwys na die werk wat Retha van Niekerk (2000, 2001, 2002a, 2002b), spesifiek ten opsigte van *meetkunde*, met in begrip van die VHM *reeds* vir die Suid-Afrikaanse konteks gedoen het. Ook het daar uit die pen van Michael de Villiers heelwat programme en verskillende werkmetodes vir meetkunde ontstaan wat gebruik kan word. In die literatuurondersoek is baie steun vir die skep van sulke eenhede gevind, en Erich Wittman (1996: 366) beredeneer hierdie saak as volg:

For developing mathematics education as a design science it is crucial to design teaching units. The design of substantial teaching units, and particularly of substantial curricula, is a most difficult task that must be carried out by experts in the field. By no means can it be left to the teacher, though teachers can certainly make important contributions within the framework of design provided by experts. These substantial teaching units can be characterised by the following properties:

They represent central objectives, contents and principles of mathematics teaching.

They provide rich sources of mathematical activities.

They are flexible and can easily be adapted to the conditions of a special classroom.

They involve mathematical, psychological and pedagogical aspects of teaching and learning in a holistic way, and therefore they offer a wide potential for empirical research.

6. Voornemende wiskundeonderwysers moet opleiding ontvang om die VHM te kan gebruik.
7. Minder klem moet in die RNCS gelê word op menseregte, want die gevaar bestaan dat die essensie van die *wiskundeonderwys* daardeur ondermyn kan word, en die woorde van Fritz (1994: 80) is hier ter sprake:

In OBE I smell Sparta, Rousseau and Hegel: The child is the property of the state and must be modeled to serve the interests of the state.

8. Dit sal baie sinvol wees om in latere navorsing die wiskundeleerplan van provinsie of skool met die VHM te vergelyk. Die VHM kan selfs deur een provinsie of skool as navorsingsprojek uitgetoets word.
9. Dit is belangrik om te besef dat, alhoewel hierdie navorsing die VHM en die RNCS positief kon verbind, die VHM in werklikheid implisiet opgesluit lê in die RNCS. Dit kos ingeligte om die VHM eksplisiet uit die RNCS te kan ontsluit. Daarom moet des te meer ag gegee word op aanbevelings 3 en 4. Aanduiding van die denkvlakke in die RNCS sou dit baie meer verbruikersvriendelik vir die gebruik van die VHM maak.
10. Hierdie navorsing toon dat die denkvlakke van die VHM direk aan die assesseringstandaarde en uitkomst van die RNCS gekoppel kan word (kyk par. 3.4). Dit dien as verdere aanbeveling dat denkvlakke in die RNCS aangedui moet word, aangesien assessering groot probleem in die praktyk blyk te wees. Usiskin en Senk (1990: 242-245) meld die populariteit en hoë gebruik van die “Van Hiele Geometry Test” wat items bevat waardeur vasgestel kan word of spesifieke denkvlakke bereik is. Genoemde toets kan weliswaar ten opsigte van betroubaarheid en inhoudgeldigheid verbeter word.
11. Die gevaar van denkvlakreduksie (kyk par. 3.6.3) is wesenlike probleem, en alhoewel die skep van leerervaringe deur praktiese aktiwiteite en modulering vir beide die RNCS en VHM belangrik is, moet die vordering deur die denkvlakke in die RNCS aangedui word, anders sal denkvlakreduksie plaasvind. Die assesseringstandaarde wys dit nie uit nie, en oefeninge en assessering kan baie maklik nooit bokant vlak 0 beweeg nie (kyk par. 6.5.2). Dit beklemtoon die belangrikheid van aanbevelings 3 en 4.
12. Zulu (2003: 56-80) rapporteer dat in die RNCS “...in the content the scope of choice of materials is too wide and selection is unguided, ...and that many different textbooks on the same learning area give learners disjointed information.” Handboeke van hoë kwaliteit moet



geproduseer en gestandaardiseer word, daarom word weereens aanbeveel dat handboeke deur kundiges geskryf moet word. Wat die VHM betref, bied die implisiete/eksplisiete karakter van die denkvlakke uitdaging aan outeurs en onderwysers om inhoudseleksie en onderrigmateriaal sodanig te struktureer en te kies dat die nodige en korrekte substrukture in die klaskamer geskep kan word. Verskillende keuses van inhoud en materiaal kan lei tot potensieel verskillende implisiete ervarings.

13. Outeurs van handboeke moet verder veral bedag wees om miskonsepsies by leerders te laat ontstaan (kyk par. 6.5.1). Daar moet gewaak word teen verwarring by die leerder soos dat 2D voorstelling (diagram) in die handboek dalk a-simmetries mag voorkom, maar in die reële 3D-wêreld simmetries is. Daar moet ook deurgaans gewaak word teen denkvlakverlaging. Verder kan konsepvorming by die leerder baie maklik deur prosesbenadering gevorm word terwyl intuitiewe benadering tot die konsep hoër denkvlak tot gevolg sou hê. Aanbeveling in hierdie verband sou wees dat in verdere navorsing die huidige skoolhandboeke aan die hand van die VHM geanaliseer moet word. Burger en Shaughnessy (2001) wys ook op die noodsaaklikheid dat daar in diepte na kurrikula gekyk word soos Fuys *et al.* gedoen het. Fuys *et al.* het in hulle navorsing analise gedoen op drie kommersiele handboeke wat in die Amerikaanse skole gebruik word en noem dat:

This study was similar to Soviet research on the applications of the Van Hiele model to their curriculum, which included a listing of geometry vocabulary by grade level, leading to a measure of the richness of geometry presented and the consistency of a spiral approach (Fuys *et al.* 1988: 158).

## 6.7 Ten slotte

Die navorsingsprobleem van hierdie studie is beantwoord, naamlik dat die RNCS wel aan die kurrikuleringsimplikasies wat die VHM inhou, beantwoord. Die onderbou van die RNCS is versoenbaar met die VHM, en die gebruik van die spiraalbenadering in beide die VHM en die RNCS verhoog die effektiwiteit van meetkundeonderwys. Die aanbevelings sentreer rondom die implementering van hierdie bevindinge. In John Pegg (1985:6) se woorde:

*“The van Hiele theory provides a framework from which the geometry curriculum can be viewed and from which instruction can be planned.”*

**BIBLIOGRAFIE**

- Alummootill, J M 1990. *The spiral curriculum, integrated teaching and structural learning of mathematics at the secondary level*. Unpublished MEd dissertation. Grahamstown: Rhodes University.
- Booyesen, E 1994. *Die vakdidaktiese implikasies van die van Hiele-vlakke van denke in meetkunde vir skoolwiskunde in Suid-Afrika*. Ongepubliseerde DEd-proefskrif. Pretoria: Universiteit van Suid-Afrika.
- Breetzke, P R 1988. *Sequence in the mathematics syllabus*. Unpublished MEd dissertation. Grahamstown: Rhodes University.
- Bruner, J S 1960. *The process of education*. New York: Wiley.
- Burton, L 1984. Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*. 15 (1): 35-39.
- Burger, W F en Shaughnessy, J M 1985. Spadework prior to deduction in geometry. *Mathematics Teacher*. 78: 419-428.
- Burger, W F en Shaughnessy, J M 1986. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*. 17 (1): 31-48.
- Burger, W F en Shaughnessy, J M 2001. *Assessing children's intellectual growth in geometry. Final report*. Oregon: Oregon State University.
- Cangelosi, J S 1992. *Teaching mathematics in secondary and middle school: An interactive approach*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Carter, D A 1976. Mathematics in middle schools. *Mathematics in School*. 5 (3): 2-9.

- Cawood, J; Strydom, A H en Van Loggerenberg, N T 1981. *Doeltreffende onderwys*. Goodwood: Nasou.
- Chisholm, L 2000. *Report of Review Committee on C2005*. Pretoria: Government Printers.
- Clementz, D H en Battista, M T 1992. Geometry and spatial reasoning. Grouws, D A *Handbook of research on mathematics teaching and learning*: 420-458. New York: MacMillan.
- Cowan, P; Morrison, H en McBride, F 1998. Evidence of a spiral curriculum using a mathematical problem-solving tool. *Interactive Learning Environments*. 6 (3): 205-225.
- Davey, G en Holliday, J 1992. Van Hiele guidelines for geometry. *The Australian Mathematics Teacher*. 48 (2): 26-29.
- Department of Education South Africa 1997(a). *Curriculum 2005: Lifelong learning for the 21<sup>st</sup> century*. Pretoria: CTP Books.
- Department of Education South Africa 1997(b). *Curriculum 2005: Implementing OBE 4 Philosophy*. Pretoria: CTP Books.
- Department of Education South Africa 1997(c). *Report of the National Committee on Further Education*. Pretoria: Government Printers.
- Department of Education South Africa 2001. *Draft Revised National Curriculum Statement*. Pretoria: Government Printers.
- Department of Education South Africa 2002(a). *Revised National Curriculum Statement Grades R-9 (Schools) Policy. Overview*. Pretoria: Government Printers.
- Department of Education South Africa 2002(b). *Revised National Curriculum Statement Grades R-9 (Schools) Policy. Mathematics*. Pretoria: Government Printers.

- Department of Education South Africa 2003(a). *Revised National Curriculum Statement Grades R-9 (Schools). Teacher's Guide for the Development of Learning Programmes. Foundation Phase*. Gazette 23406 (443). Pretoria: Government Printers.
- Department of Education South Africa 2003(b). *Revised National Curriculum Statement Grades R-9 (Schools). Teacher's Guide for the Development of Learning Programmes. Mathematics*. Gazette no. 23406, Vol 443. Pretoria: Government Printers.
- De Villiers, M D 1997. The future of secondary school geometry. *Pythagoras*. 44: 37-44.
- Dienes, Z P 1968. *An experimental study of mathematics learning*. London: Hutchinson en Co.
- Donald, D; Lazarus, S en Lolwana, P 1997. *Educational psychology in social context*. Cape Town: Oxford University Press.
- Dreyer, J 1999. *Curriculum 2005*. Studiebrief EDUFAC-N/301/1999. Pretoria: Universiteit van Suid-Afrika.
- Duminy, P A en Söhnge, W F 1987. *Theory and practice*. Cape Town: Maskew Miller Longman.
- Flores, A 1993. Pythagoras meets van Hiele. *School Science and Mathematics*. 93 (3): 152-157.
- Freudenthal, H 1973. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H 1991. *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fritz, M 1994. Why OBE and the traditionalists are both wrong. *Educational Leadership*. 51 (6): 79-82.

Fuys, D; Geddes, D en Tischler, R 1984. *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. New York: Brooklyn College.

- English summary by Pierre Marie van Hiele of the problem of insight in connection with school children's insight into the subject matter of geometry 1957(a): 236-242.
- Dissertation of Dina van Hiele-Geldof entitled: The didactics of geometry in the lowest class of secondary school 1957(b): 1-206.
- Summary of dissertation in English written by Dina van Hiele-Geldof 1957(c): 207-214.
- Last article written by Dina van Hiele-Geldof entitled: The didactics of geometry as learning process for adults 1958: 217-234.
- A child's thought and geometry 1959: 243-252.

Fuys, D; Geddes, D en Tischler, R 1988. *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Monograph number 3. Reston: NCTM.

Geddes, D 1992. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series, grades 5-8. Geometry in the middle grades*. Reston: NCTM.

Gravemeijer, K; Cobb, P; Boevers, J en Whitenack, J 2000. Symbolizing, modeling and instructional design. Cobb, P; Yackel, E en Maclain, K *Symbolising and Communicating in Mathematics Classrooms: 225-273*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Han, T S 1986. *The effects on achievement and attitude of a standard geometry textbook and a textbook consistent with the van Hiele theory*. Unpublished doctoral thesis. Iowa: University of Iowa.

Hoffer, A 1983. Van Hiele-Based research. Lesh, R en Landau, M *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes: 205-227*. New York: Academic Press.

Hoffer, A R 1988. Geometry and visual thinking. Post, T R *Teaching Mathematics in Grades K-8. Research Based Methods: 232-261*. Massachusetts: Allyn and Bacon, Inc.

- Johnson, B en Christensen, L 2000. *Education research: Qualitative and quantitative approaches*. Needham Heights: Allyn en Bacon, Inc.
- Kgatitsoe, P P 2002. *Environmental education and the cross-curricular nature of outcomes-based education: An investigation of methodological compatibility*. Unpublished MEd dissertation. Pretoria: University of South Africa.
- Koehler, R en Grouws, D A 1992. Mathematics teaching practices and their effects. Grouws, D A *Handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National Council of teachers of Mathematics*: 115-128. New York: MacMillan.
- Land, J E 1990. *Appropriateness of the van Hiele model for describing student's cognitive process on algebra tasks as typified by College students' learning of functions*. Unpublished DEd thesis. Michigan: UMI Dissertation Services.
- Landsberg, E T en Burden, A 1999. *Quality education for all. Overcoming barriers to learning and development*. Pretoria: University of South Africa.
- Malcolm, C 1999. Outcomes-Based Education has different forms. Jansen, J en Christie, P *Changing Curriculum*: 77-113. Cape Town: Juta.
- Marlowe, B A en Page, M L 1998. *Creating and sustaining the constructivist class room*. United States of America: Corwin Press, Inc.
- Mathematics Association (England) 1981(a). Mathematics for the middle years: A spiral development. *Mathematics in School*. 10 (2): 2-5.
- Mathematics Association (England) 1981(b). Mathematics for the middle years: A spiral development. Part 3. *Mathematics in School*. 10 (4): 6 -13.
- Mayberry, J 1981. *An investigation of the van Hiele levels of geometric thought in undergraduate*

*preservice teachers*. Georgia: University of Georgia.

- Mayberry, J 1983. The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*. 14 (1): 58-69.
- McCown, R; Driscoll, M en Roop, P G 1996. *Educational psychology. A learning-centered approach to classroom practice*. Boston: Allyn en Bacon, Inc.
- Meira, L 1995. The microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and Instruction*. 13: 389-422.
- Milne, E 1971. Spiral approach. *School Science and Mathematics*. 71 (1): 12-16.
- Murray, H; Olivier, A en Human, P G 1993. Learning through problem solving and social interaction. Reddy, V *Proceedings of the first annual meeting of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education*: 246-255. Durban: University of Natal.
- Murray, H; Olivier, A en Human, P G 1998. Learning through problem solving. Olivier, A en Newstead, K *Proceedings of the 22nd international conference for the Psychology of Mathematics Education*: 169-185. Stellenbosch: University of Stellenbosch.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 1989. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 1991. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston: NCTM.
- Nibbelink, W H 1990. Teaching equations. *Arithmetic Teacher*. 38 (3): 48-50.
- Nickson, M 2000. *Teaching and learning mathematics. A teacher's guide to recent research and its*

*application*. New York: Cassell.

Nixon, E G 2002. *An investigation of the influence of visualisation, exploring patterns and generalisation on thinking levels in the formation of the concepts of sequences and series*. Unpublished MA dissertation. Pretoria: Universiteit van Suid-Afrika.

Olivier, C 1999. *Let's educate, train and learn outcomes-based. A 3D experience in creativity*. Pretoria: Benedic.

Olson, A T; Kieren, T E en Ludwig, S 1987. Linking Logo, levels and language in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 18 (4): 359-370.

Oosthuizen, W L 1986. Wiskundeonderrigstrategie. Swart, A *Vakonderrigstrategie*: 195-212. Manualia 37. Pretoria: Universiteit van Suid-Afrika.

Pegg, J 1985. How children learn geometry: The van Hiele theory. *The Australian Mathematics Teacher*. 41 (2): 5-8.

Polya, G 1988. *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Presmeg, N C 1990. Applying van Hiele's theory in senior primary geometry: Use of phases between the levels. *Proceedings of the 10th National Congress on Mathematics Education*. Durban: Macmillan Boleswa Publishers.

Pretorius, F 1998. *Outcomes-Based Education in South Africa*. Randburg: Hodder en Stoughton.

Revised National Curriculum Statement Grades R - 9 (Schools) Policy. Overview 2002(a). (kyk Department of Education South Africa 2002(a))

Revised National Curriculum Statement Grades R - 9 (Schools) Policy. Mathematics 2002(b). (kyk Department of Education South Africa 2002(b)).



- Sanders, P 1991. Helpful hints for teaching mathematics for children. *Rural Educator*. 13 (1): 13-15.
- Schoeman, S en Manyane, R M 2002. Understanding the introduction of outcomes-based History teaching in South Africa. *Educare*. 31 (1-2): 175-201.
- Schulman, L en Eston, R 1998. A problem worth revisiting. *Teaching Children Mathematics*. 5 (2): 72-77.
- Scopes, P G 1973. *Mathematics in secondary schools – A teaching approach*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Smuts, R 1990. Bedoeling en verwesenliking: Die sillabus vir Afrikaans en sy implikasies vir stelonderrig. *Verrigtinge van die Nasionale Vakdidaktieksimposium 26-28 September 1990*: (520-531). Universiteit van Stellenbosch.
- Spady, W G 1988. Organising for results: the basis of authentic restructuring and reform. *Educational Leadership*. 46 (2): 4-7.
- Spady, W G 1993. *Outcomes-Based Education*. Belconnen: Australian Curriculum Studies Association.
- Streefland, L 1993. The legacy of Hans Freudenthal. *Educational Studies in Mathematics*. 25 (1-2): 89 –161.
- Strydom, A H 1981. *Die didaktiek as deeldisipline*. Pretoria: Sacum.
- Stuart, S 1999. Tracing tracks. A Study for ages 9 to 11. *Pythagoras*. 48: 49-51.
- Swart, A 1986. *Vakonderrigstrategie*. Manualia 37. Pretoria: Universiteit van Suid-Afrika.

Thompson, I 1996. Circling the spiral. *Times Educational Supplement*. 4159: vi (editorial).

Towers, J M 1992. Outcomes-Based Education: Another education bandwagon? *The Educational Forum*. 56 (3): 291-305.

Treffers, A 1987. *Three dimensions - A model of goal and theory description in mathematics instruction - The wiskobas project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Usiskin, Z 1982. Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. *CDASSG Report*. Chicago: University of Chicago.

Usiskin, Z en Senk, S 1990. Evaluating a test of van Hiele levels: A response to Crowley and Wilson. *Journal for Research in Mathematics Education*. 21 (3): 242-245.

Van der Horst, H en McDonald, R 1997. *Outcomes-Based Education: A teacher's manual*. Pretoria: Kagiso.

Van Hiele, P M 1981. *Struktuur*. Purmerend: Muusses.

Van Hiele, P M 1986. *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Florida: Academic Press, Inc.

Van Niekerk, H M 1997. *A subject didactical analysis of the development of the spatial knowledge of young children through a problem-centred approach to mathematics education and learning*. Unpublished DEd thesis. Potchefstroom: Potchefstroom University for Christian Higher Education.

Van Niekerk, R 1995. From spatial orientation to spatial insight: A geometry curriculum for the primary school. Paper presented at the First National Congress and Workshop of AMESA, 4-7 July 1994, University of the Witwatersrand. *Pythagoras*. 36: 7-12.

Van Niekerk, R 1996(a). 4-Kubers in Africa. *Pythagoras*. 40: 28-33.

Van Niekerk, R 1996(b). What about the spatial development of the primary school learner?  
*Tydskrif vir Primêre Onderwys*. 12: 14-31.

Van Niekerk, R 1998. What is happening to primary school geometry in South Africa? *Pythagoras*.  
46/47: 63-70.

Van Niekerk, R 2000. *Progress maps*. Pretoria: Gauteng Institute for Curriculum Development.

Van Niekerk, R 2001. *Geometer's sketchpad: Classification of polygons*. Pretoria: Daan Roux  
Printers.

Van Niekerk, R 2002(a). *Van Hiele Puzzle Books I and II*. Pretoria: Daan Roux Printers.

Van Niekerk, R 2002(b). *Packaging*. Pretoria: Daan Roux Printers.

Wessels, D C J 1997. *Mathematics subject didactics*. Only guide for MMAT00-8. Pretoria:  
University of South Africa.

Wessels, D C J 2001. *Module: Subject didactics in mathematics teaching*. Tutorial Letter 101/2001  
for MME502-3. Pretoria: University of South Africa.

Wessels, D C J 2002. *Spatial learning and dynamic mathematics Module 9*. Study Guide for  
MEDMA9-Y. Pretoria: University of South Africa.

Williams, G 1992. Geometry: discovery and proof. Breen, C J *Mathematics Education for In-  
service and Pre-service Teachers* : 336-351. Pietermaritzburg: Shuter and Shooter.

Willson, W W 1977. *The mathematics curriculum: Geometry*. London: Schools Council

Publications, Blackie.

Wineland, J N en Stephens, L 1995. Effects of spiral testing and review on retention and mathematical achievement for below-average eighth graders and ninth graders in the United States. *International Journal of Mathematical Education in Science en Technology*. 26 (2): 227-232.

Wirszup, I 1974. *Some breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry*. Address given at the closing of the general session of the 52 annual meeting of the NCTM. Atlanta City: NCTM.

Wittman, E 1996. Mathematics Education as a design science. *Educational Studies for Mathematics*. 29 (4): 355-374

Yakimanskaya, I S 1991. The development of spatial thinking in schoolchildren. *Soviet Studies in Mathematics Education. Survey of Applied Soviet Research in School Mathematics*. Volume 3. Reston: University of Chicago. NCTM.

Zais, R S 1976. *Curriculum: principles and foundations*. New York: Harper Collins.

Zulu, M P 2003. *The impact of the attitudes of school managers on the implementation of Outcomes-Based Education (OBE) in secondary schools*. Unpublished MEd dissertation. Pretoria: University of South Africa.