ONDERRIG VAN WISKUNDE MET FORMELE BEWYSTEGNIEKE

deur

PIETER SCHALK VAN STADEN

voorgelê luidens die vereistes

vir die graad

DOCTOR PHILOSOPHIA

in die vak

WISKUNDEONDERWYS

aan die

UNIVERSITEIT VAN SUID-AFRIKA

PROMOTOR: PROFESSOR I W ALDERTON

MEDEPROMOTOR: PROFESSOR J J BARNARD

APRIL 1999

To say of what is that it is not, or
of what is not that it is, is false,
while to say of what is that it is, or
of what is not that it is not is true.

Aristotle

510.7 VANS

0001740518

D A N K B E T U I G I N G S

Graag betuig ek my dank teenoor:

- Prof. I.W. Alderton vir sy leiding, deeglikheid en weldeurdagte wenke,
- Prof. J.J. Barnard vir sy leiding, inspirasie en opbouende kritiek,
- Prof J. Heidema vir sy besondere moeite en wenke,
- die SNO vir die subidiëring van hierdie studie met 'n beurstoekenning,
- mev. J.P. Lötter vir die uitleg van hierdie studie,
- my vrou en kinders vir hulle voortdurende aansporing, en
- my Skepper wat my daartoe in staat gestel het om hierdie studie te voltooi.

OPSOMMING

Hierdie studie is daarop gemik om te bepaal tot welke mate wiskundeleerlinge op skool en onderwysstudente in wiskunde, onderrig in logika ontvang as agtergrond vir strenge bewysvoering. Die formele aspek van wiskunde op hoërskool en tersiêre vlak is besonder belangrik. Leerlinge en studente kom onvermydelik met hipotetiese argumente in aanraking. Hulle leer ook om die kontrapositief te gebruik in bewysvoering. Hulle maak onder andere gebruik van bewyse uit die ongerymde. Verder word nodige en voldoende voorwaardes met stellings en hulle omgekeerdes in verband gebring. Dit is dus duidelik dat 'n studie van logika reeds op hoërskool nodig is om aanvaarbare wiskunde te beoefen.

Om seker te maak dat aanvaarbare wiskunde beoefen word, is dit nodig om te let op die gebrek aan beheer in die ontwikkeling van 'n taal, waar woorde meer as een betekenis het. 'n Kunsmatige taal moet gebruik word om interpretasies van uitdrukkings eenduidig te maak. In so 'n kunsmatige taal word die moontlikheid van foutiewe redenering uitgeskakel. Die eersteordepredikaatlogika, is so 'n taal, wat ryk genoeg is om die wiskunde te akkommodeer. Binne die konteks van hierdie kunsmatige taal, kan wiskundige toerieë geformaliseer word.

Verskillende bewystegnieke uit die eersteordepredikaatlogika word geïdentifiseer, gekategoriseer en op 'n redelik eenvoudige wyse verduidelik. Uit 'n ontleding van die wiskundesillabusse van die Departement van Onderwys, en 'n onderwysersopleidingsinstansie, volg dit dat leerlinge en studente hierdie bewystegnieke moet gebruik. Volgens hierdie sillabusse moet die leerlinge en studente vertroud wees met logiese argumente. Uit die gevolgtrekkings waartoe gekom word, blyk dit dat die leerlinge en studente se agtergrond in logika geheel en al gebrekkig en ontoereikend is. Dit het tot gevolg dat hulle nie 'n volledige begrip oor bewysvoering het nie, en 'n gebrekkige insig ontwikkel oor wat wiskunde presies behels.

Die aanbevelings om hierdie ernstige leemtes in die onderrig van wiskunde aan te spreek, asook verdere navorsingsprojekte word in die laaste hoofstuk verwoord.

SUMMARY

The aim of this study is to determine to which extent pupils taking Mathematics at school level and student teachers of Mathematics receive instruction in logic as a grounding for rigorous proof. The formal aspect of Mathematics at secondary school and tertiary levels is extremely important. It is inevitable that pupils and students become involved with hypothetical arguments. They also learn to use the contrapositive in proof. They use, among others, proofs by contradiction. Futhermore, necessary and sufficient conditions are related to theorems and their converses. It is therefore apparent that the study of logic is necessary already at secondary school level in order to practice Mathematics satisfactorily.

To ensure that acceptable Mathematics is practised, it is necessary to take cognizance of the lack of control over language development, where words can have more than one meaning. For this reason an artificial language must be used so that interpretations can have one meaning. Faulty interpretations are ruled out in such an artificial language. A language which is rich enough to accommodate Mathematics is the first-order predicate logic. Mathematical theories can be formalised within the context of this artificial language.

Different techniques of proof from the first-order logic are identified, categorized and explained in fairly simple terms. An analysis of Mathematics syllabuses of the Department of Education and an institution for teacher training has indicated that pupils should use these techniques of proof. According to these syllabuses pupils should be familiar with logical arguments. The conclusion which is reached, gives evidence that pupils' and students' background in logic is completely lacking and inadequate. As a result they cannot cope adequately with argumentation and this causes a poor perception of what Mathematics exactly entails.

Recommendations to bridge these serious problems in the instruction of Mathematics, as well as further research projects are discussed in the final chapter.

Key terms:

Logic and Mathematics; Mathematical activities; Mathematical education; Proof techniques; Problem solving skills; Mathematical curriculum; Mathematical foundation; Mathematical creativity; Mathematical philosophy; Secondary School Mathematics; Teacher training.

INHOUDSOPGAWE BLADSY

HOOFSTUK 1: INLEIDING EN ORIëNTERING 1

1.1 Inleiding 1
1.2 Probleemstelling 4
1.3 Doelstelling 4
1.4 Begripsomskrywing 5

1.4.1 Formeel 5
1.4.2 Bewys 5
1.4.3 Bewystegniek 6
1.4.4 Onderrig 6

1.5 Metodologie en program van studie 7

HOOFSTUK 2: DIE INVLOED VAN DIE VERSKILLENDE DENKSKOLE OP BEWYSTEGNIEKE 9

2.1 Inleiding 9
2.2 Historiese agtergrond 12
2.3 Groeipyne 12
2.4 'n Nuwe benadering tot strengheid 14
2.5 Logika en die grondslae van wiskunde 17
2.6 Die aksiomatiese metode 21
2.7 Die rol van die aksiomatiese stelsel 22
2.8 Die aard van 'n aksiomatiese stelsel 25
2.9 Die keuse van aksiomas 26
2.10 Formele aksiomatiese stelsels 27

2.10.1 Primitiewe simbole 28
2.10.2 Formasiereëls 28
2.10.3 Aksiomas 29
2.10.4 Deduksiereëls 29

2.11 Die onderrig van aksiomatiese stelsels 29
2.12 Konsistensie 31
2.13 Onafhanklikheid 32
2.14 Volledigheid 33
2.15 Logisisme 34

2.15.1 Kritiek op die logisisme 36
2.15.2 Eienskappe van die logisistiese stelsel 37

2.16 Formalisme 37

2.16.1 Die formalisme en konsistensie 39
2.16.2 Die formalisme en volledigheid 41
2.16.3 Kritiek op die formalisme 41

2.17 Intuïsionisme 42

2.17.1 Konstruktivisme 43
2.17.2 Interpretasie van logiese operasies 44
2.17.3 Konstruktivistiese bewyse 48
2.17.4 Kritiek op die intuïsionisme 49

2.18 Ander filosofiese ontwikkelings 50
2.19 Platonisme 51
2.20 Kwasi-empirisme 54
2.21 Samevatting 58

HOOFSTUK 3: BEWYS AS 'N WISKUNDIGE AKTIWITEIT 61

3.1 Inleiding 61
3.2 Wiskundige aktiwiteit 62

3.2.1 Waarheid 63
3.2.2 Bewys 64
3.2.3 Analisering van wiskundige aktiwiteite 66

3.3 Kreatiwiteit in bewysmetodes 66
3.4 Aanvaarbaarheid van bewyse 68
3.5 Die aard van 'n bewys 69
3.6 Kontrolering van 'n bewys 71
3.7 Die vierkleurprobleem 74
3.8 Rekenaarbewyse 76

3.8.1 Empiriese beskouings in wiskundige bewyse 77
3.8.2 Kontrolering van rekenaarondersteunde bewyse 80

3.9 Waarskynlikheidsbewyse 81
3.10 Enkele opmerkings 85
3.11 Samevatting 89

HOOFSTUK 4: PROPOSISIELOGIKA 91

4.1 Inleiding 91
4.2 Bewerings en konnektiewe 91
4.3 Waarheidsfunksies en waar- onwaartabelle 93

4.3.1 Negering 93
4.3.2 Konjunksie 93
4.3.3 Disjunksie 94
4.3.4 Voorwaardelike konnektief 94
4.3.5 Ekwivalensie 95

4.4 Linguistiese betekenisse 95
4.5 Definisie 96
4.6 Voorbeeld 96
4.7 Voorbeeld 97
4.8 Definisie 97
4.9 Voorbeelde 97
4.10 Bekende toutologieë 98
4.11 Argumente en geldigheid 99
4.12 Definisie 100
4.13 Proposisie 101
4.14 Die sintaksis van L 102
4.15 Definisie 103
4.16 Opmerkings 103
4.17 Voorbeeld 104
4.18 Definisie 104
4.19 Voorbeeld 105
4.20 Voorbeeld 105
4.21 Proposisie (die deduksie stelling) 106
4.22 Proposisie 107
4.23 Gevolgtrekking 108
4.24 Proposisie 108
4.25 Die adekwaatheid van L 108
4.26 Definisie 108
4.27 Definisie 108
4.28 Die betroubaarheidstelling 109
4.29 Definisie 110
4.30 Definisie 110
4.31 Proposisie 110
4.32 Proposisie 110
4.33 Proposisie 111
4.34 Definisie 112
4.35 Opmerkings 112
4.36 Proposisie 112
4.37 Proposisie 113
4.38 Proposisie (Die toereikendheidstelling) 113
4.39 Proposisie 113
4.40 Samevatting 114

HOOFSTUK 5: DIE PREDIKAATLOGIKA 115

5.1 Inleiding 115
5.2 Voorbeeld 115
5.3 Alfabet van 'n algemene eersteorde taal L 117
5.4 Motivering van die alfabet 117
5.5 Voorbeeld 118
5.6 Definisie 118
5.7 Definisie 119
5.8 Definisie 119
5.9 Opmerkings 119
5.10 Definisie 120
5.11 Definisie 120
5.12 Voorbeeld 120
5.13 Definisie 120
5.14 Definisie 121
5.15 Definisie 121
5.16 Voorbeeld 122
5.17 Voorbeeld 122
5.18 Definisie 123
5.19 Opmerkings 123
5.20 Definisie 124
5.21 Definisie 124
5.22 Opmerkings 124
5.23 Voorbeeld 125
5.24 Proposisie 126
5.25 Definisie 126
5.26 Notasie 126
5.27 Opmerkings 126
5.28 Proposisie 127
5.29 Proposisie 127
5.30 Gevolgtrekking 127
5.31 Proposisie 128
5.32 Voorbeeld 128
5.33 Definisie 128
5.34 Proposisie 129
5.35 Definisie 129
5.36 Proposisie 129
5.37 Gevolgtrekking 129
5.38 Definisie 130
5.39 Opmerkings 131
5.40 Voorbeeld 131
5.41 Skolemfunksies 131
5.42 Voorbeeld 133
5.43 Proposisie 133
5.44 Definisie 134
5.45 Opmerkings 134
5.46 Definisie 135

5.47	Proposisie	135
5.48	Proposisie	136
5.49	Die betroubaarheidstelling vir K	136
5.50	Gevolgtrekking	137
5.51	Voorbeeld	137
5.52	Die deduksiestelling vir K	137
5.53	Gevolgtrekking	137
5.54	Gevolgtrekking	138
5.55	Proposisie	138
5.56	Ekwivalensie	138
5.57	Proposisie	138
5.58	Definisie	139
5.59	Gevolgtrekking	139
5.60	Proposisie	139
5.61	Proposisie	139
5.62	Definisie	140
5.63	Proposisie	140
5.64	Gevolgtrekking	140
5.65	Gevolgtrekking	140
5.66	Voorgevoegde vorm	140
5.67	Proposisie	141
5.68	Voorbeeld	141
5.69	Definisie	142
5.70	Proposisie	142
5.71	Die adekwaatheid van K	142
5.72	Definisie	142
5.73	Definisie	143
5.74	Definisie	143
5.75	Proposisie	143
5.76	Definisie	144
5.77	Proposisie	144
5.78	Proposisie	144
5.79	Proposisie	144
5.80	Definisie	145
5.81	Proposisie	145
5.82	Proposisie	146
5.83	Proposisie	146
5.84	Proposisie	147
5.85	Proposisie	147
5.86	Gevolgtrekking	148
5.87	Samevatting	148

HOOFSTUK 6: FORMELE BEWYSTEGNIEKE 149

6.1	Inleiding	149
6.2	Die keusemetode	149

6.2.1 Definisie 150

6.3 Bewyse oor gelykheid van versamelings 155
6.4 Bewyse en die leë versameling 157
6.5 Opmerkings 160
6.6 Gevolgtrekkings wat ∀, maar nie ∃ of ⇒ bevat 161

6.6.1 Spesifieke voorbeelde 162
6.6.2 Teenvoorbeeld 169

6.7 Gevolgtrekkings wat ∀ en ⇒, maar nie ∃ bevat 171

6.7.1 Direkte bewyse 173
6.7.2 Weerlegging van gevolgtrekkings van die vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ 176
6.7.3 Bewyse van die bewerings $(\forall x)\ (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$ 177

6.8 Bewys met verbesondering en verdeling in gevalle 179

6.8.1 Verbesondering 180
6.8.2 Verdeling in gevalle 183

6.9 Bewyse deur wiskundige induksie 186

6.9.1 Stelling (Die beginsel van wiskundige induksie) 187
6.9.2 Motivering vir die noodsaaklikheid van induksiestappe 188
6.9.3 Katogorieë van induksiebewyse 189

6.9.3.1 Sommasieformules 189
6.9.3.2 Veralgemening 191
6.9.3.3 Deelbaarheid 192

6.9.4 Induktiewe versamelings 193

6.9.4.1 Definisie 193
6.9.4.2 Stelling 194

6.10 Gevolgtrekkings wat ∀, gevolg deur ∃, bevat 195
6.11 Epsilon-Delta bewyse 200

6.11.1 Definisie 200
6.11.2 Definisie 201
6.11.3 Definisie 201

6.12 Indirekte bewyse 203

6.12.1 Afleiding van 'n gevolgtrekking uit die disjunksie van twee bewerings 205
6.12.2 Bewys deur die kontrapositief 208
6.12.3 Bewys deur teenstrydigheid 213

6.13 Eksistensie en eenduidigheid 219

6.13.1 Eenduidigheid 221
6.13.2 Eksistensie 225

6.14 Samevatting 228

HOOFSTUK 7: 'N ELEMENTêRE BENADERING TOT LOGIKA EN BEWYSSTEGNIEKE 229

7.1 Inleiding 229
7.2 Ontleding van die tussentydse kernsillabus 229

7.2.1 Nodige en voldoende voorwaardes 229
7.2.2 Kwantore 230
7.2.3 Bewyse deur transitiwiteit 230
7.2.4 Teenvoorbeeld 231
7.2.5 Direkte bewyse 231
7.2.6 Verbesondering 231
7.2.7 Veralgemening 232
7.2.8 Indirekte bewyse 232
7.2.9 Eksistensie en eenduidigheid 232

7.3 Ontleding van die wiskundesillabusse van SACTE 233

7.3.1 Nodige en voldoende voorwaardes 233
7.3.2 Kwantore 233
7.3.3 Die keusemetode 233
7.3.4 Bewyse deur transitiwiteit 233
7.3.5 Teenvoorbeeld 234
7.3.6 Direkte bewyse 234
7.3.7 Verbesondering 234
7.3.8 Bewyse deur wiskundige induksie 234
7.3.9 Veralgemening 234
7.3.10 Epsilon-Delta bewyse 234
7.3.11 Indirekte bewyse 234
7.3.12 Eksistensie en eenduidigheid 235

7.4 'n Elementêre benadering tot logiese begrippe en bewystegnieke 235

7.5 Bewerings of proposisies 235
7.6 Saamgestelde bewerings en konnektiewe 236
7.7 Negering, konjunksie en disjunksie 237

7.7.1 Definisie 237
7.7.2 Waar- onwaartabelle 237

7.8 Toutologie, ekwivalensie, die voorwaardelike en bivoorwaardelike 238

7.8.1 Definisie 238
7.8.2 Definisie 239
7.8.3 Die voorwaardelike en bivoorwaardelike 239

7.8.3.1 Definisie 240

7.9 Stellings 241
7.9.1 Definisie 241

7.10 Nodige en voldoende voorwaardes 241
7.11 Opsomming 243
7.12 Kwantore 245
7.13 Samevatting 247
7.14 Die betekenis van 'n bewys 247

7.14.1 Direkte bewyse 247
7.14.2 Die teenvoorbeeld 249
7.14.3 Bewys deur uitputting 249
7.14.4 Bewyse deur transitiwiteit 250
7.14.5 Bewyse deur teenstrydigheid 251

7.15 Samevatting 253

HOOFSTUK 8: SAMEVATTING, GEVOLGTREKKINGS EN AANBEVELINGS 254

8.1 Samevatting 254
8.2 Gevolgtrekkings 258
8.3 Aanbevelings 259
8.4 Verdere navorsing en ontwikkeling 260
8.5 Opmerking 262

Bylaag A 262
Bylaag B 288

Bibliografie 291

HOOFSTUK 1: INLEIDING EN ORIëNTERING

1.1 Inleiding

Volgens Eves (1965 : 274) is 'n wiskundige teorie die resultaat van 'n wisselwerking tussen twee faktore, naamlik 'n versameling postulate en 'n logika. Die versameling postulate vorm die basis van die stelsel, terwyl logika die reëls is wat die basis van postulate uitbrei tot 'n liggaam van stellings. 'n Wiskundige teorie of stelsel is 'n totaliteit van bewerings bestaande uit beide die postulate en stellings.

Dit is bykans onmoontlik om logika aan die hand van 'n gewone spreektaal te bestudeer. 'n Simboliese taal is nodig vir 'n presiese wetenskaplike benadering tot die vak. As gevolg van die teenwoordigheid van simbole, staan die benadering bekend as *simboliese* of *wiskundige logika.*

In simboliese logika word die onderskeie relasies tussen, onder andere, bewerings en klasse, deur formules weergegee waarvan die betekenis ondubbelsinnig is. Dit is moontlik om die vak Wiskunde aan die hand van die simboliese logika te ontwikkel op 'n kompakte en veelomvattende wyse. Leibniz word beskou as die eerste persoon wat die wenslikheid en voordele van 'n simboliese logika ingesien het. In een van sy vroegste werke, *De arte combinatoria,* wat in 1666 gepubliseer is, het hy die moontlikheid van 'n universele wetenskaplike taal bespreek.

Tans word uitgebreide studies in die veld van simboliese logika onderneem ten einde wiskunde op 'n konsistente grondslag te vestig.

Volgens Freudenthal (1973 : 616) het formele logika ontsaglik in die laaste eeu gegroei. Daar bestaan tot 'n sekere mate 'n verwantskap tussen logika en denke. Logisiste beskou logika as die dissipline van formele stelsels. Die eksterne ekspressie van denke is taal. Freudenthal beweer dat daar 'n sterk band tussen denke en linguistiese uitdrukkings bestaan.

Die analisering van konsepte en bewyse, met die wiskundige taal in die agtergrond, lei tot die ontdekking van logiese strukture en onderliggende patrone. Daarenteen is die analisering van linguistiese strukture met linguistiese gevolge iets wat tot die logika hoort. Uit die oogpunt van die didaktiek van Wiskunde, is dit egter handig om tussen beide gedagtes te onderskei. Freudenthal (1973 : 630) beweer dat die leerling moet leer om logiese patrone in stellings en bewyse te ontdek. Bowenal moet die leerling uit hierdie logika leer om in nie-wiskundige linguistiese situasies voordeel te trek.

Tradisioneel was logika die kuns van sillogismes. Sillogismes het egter onoorbrugbare tekortkominge in dié sin dat dit hoogstens voldoende is om onderwerp-predikaatstrukture te formaliseer.

Funksies en predikate van verskeie veranderlikes is nodig om inferensies te formaliseer. Logika en Euklidiese meetkunde was tradisioneel interafhanklik. Die algemene opvatting was dat meetkunde die grondslag van die bestudering van logika is. Freudenthal beklemtoon hierdie feit soos volg:

> "Up to the beginning of the nineteen-sixties textbooks and teaching books on geometry did not express the slightest doubt about whether geometry is the training ground of logic, while algebra books kept silent on logic."

Schutte (1989 : 63) onderskryf hierdie bewering soos volg:

> "Die meetkunde op skool bied meer geleentheid om die leerling logika te leer."

Schutte beweer dat wiskunde die student die geleentheid bied om logiese denke te illustreer. Die formele aspek van wiskunde op hoërskoolvlak is dus besonder belangrik.

In die onderrig van Wiskunde op skool behoort die vak logies opgebou te word deur middel van bewyse.

Leerlinge kom onwillekeurig in aanraking met hipotetiese argumente soos byvoorbeeld:

"*As* twee driehoeke gelykhoekig is, *dan* is die ooreenstemmende sye eweredig."

Hulle maak ook kennis met stellings en hulle omgekeerdes. Een sodanige voorbeeld uit die tussentydse kernsillabus vir wiskunde, Hoër Graad, van die Departement van Onderwys, grade 10-12, is die volgende:

"Die oorstaande hoeke van 'n koordevierhoek is supplementêr en omgekeerd, as 'n paar oorstaande hoeke van 'n vierhoek supplementêr is, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek."

Dit word ook van hulle verwag om nodige en voldoende voorwaardes in verband te bring met stellings en hulle omgekeerdes. Daar word ook van hulle verwag om indirekte bewystegnieke te gebruik. As voorbeeld bewys hulle die volgende stelling.

"As die teenoorstaande hoeke van 'n vierhoek supplementêr is, dan lê die vier hoekpunte op die omtrek van dieselfde sirkel."

In so 'n bewys word die teendeel van die stelling aangeneem en dan word 'n teenstrydigheid of ongerymdheid afgelei.

Die gewone spreektaal het sy eie reëls, en hierdie reëls kan ook geregverdig word, alhoewel nie in 'n streng geformaliseerde stelsel nie. Waarheidswaardes kan nie aan bewerings van die spreektaal toegeken word nie, en relasies tussen bewerings kan nie uit waar-onwaartabelle afgelees word nie. Dit is so dat die betekenis en gebruik van byvoorbeeld die implikasieteken in die spreektaal heelwat verskil van die gebruik in die logika. Gevolglik kom heelwat foutiewe gebruik van die implikasieteken selfs op hoë vlakke van wiskundige aktiwiteite voor. Dit is duidelik dat dit nadelig is om algebra te onderrig as die sintaksis van die algebraïese taal skaars aan die student of leerling bekend is.

Dit is egter nie nodig om met die sintaksis van algebra te begin alvorens met die onderrig van algebra begin word nie. Die onderwyser behoort dit egter bewustelik te bemeester.

1.2 Probleemstelling

Die volgende vraag gee aanleiding tot die hoofprobleem wat in hierdie studie ondersoek word:

Bestaan daar 'n onderrigmodel vir elementêre logika só dat skoliere en studente bewyse in wiskunde met begrip kan uitvoer?

Die hoofprobleem val uiteen in die volgende subprobleme:

- Het die verskillende filosofiese denkskole 'n invloed op die formalisering van bewyse?
- Wat word verstaan onder 'n bewys as 'n wiskundige aktiwiteit?
- Hoe word bewyse geformaliseer uit die eersteordepredikaatlogika?

1.3 Doelstelling

Hierdie studie het ten doel om

- te bepaal wat die invloed van die verskillende filosofiese denkskole se invloed op die formalisering van bewyse is,

- te bepaal wat met bewys as 'n wiskundige aktiwiteit bedoel word,

- te bepaal hoe bewyse uit die elementêre logika geformaliseer word, en

- 'n onderrigmodel vir elementêre logika daar te stel só dat skoliere en studente bewyse in wiskunde bevredigend kan hanteer.

1.4 Begripsomskrywing

1.4.1 Formeel

Hamilton (1990 : 27) verduidelik die term formeel soos volg:

> "It is used when referring to a situation where symbols are being used and where the behaviour and properties of the symbols are determined completely by a given set of rules. In a formal system the symbols have no meanings, and in dealing with them we must be careful to assume nothing about their properties other than what is specified in the system. It is only in this way that we can be sure that all the assumptions that we make when we follow through a deduction are explicit, and it is only by making all our assumptions explicit that we can discover anything fundamental about logic."

Die doel van 'n formele benadering tot logika of wiskunde is om 'n sintaktiese stelsel te konstrueer só dat die begrippe van die stelsel korrespondeer met die semantiese stelsel (nie-formele), dit is, só dat die semantiese stelsel van logika of wiskunde 'n ware interpretasie van die sintaktiese stelsel is. 'n Sintaktiese stelsel wat byvoorbeeld met die proposisielogika korrespondeer, sal 'n stelsel wees waarin die bewerings, afgelei volgens formele reëls, parallel loop met die bewerings van die proposisielogika wat gebaseer is op waar-onwaartabelle.

Die formele benadering van logika of wiskunde soos nagevolg deur Hilbert is een voorbeeld van die tegniek van formalisering.

1.4.2 Bewys

Oor die algemeen stem wiskundiges saam dat daar 'n soort skema van bewys in enige stelsel van wiskunde moet wees, en dat elke bewys, welke spesifieke reëls dit ook mag volg, 'n metode is om bewerings af te lei van ander bewerings onderhewig aan 'n versameling reëls. Tot hierdie mate is deur die jare saamgestem oor die begrip bewys. Aan die ander kant was daar nog nooit konsensus onder wiskundiges oor wat 'n aanvaarbare bewys is nie. Onder die begrip bewys word volgens Hanna (1989 : 20)

hedendaags die volgende verstaan:

"... a proof is an argument needed to validate a statement, an argument that may assume several different forms as long as it is convincing."

Volgens Tarski (1969 : 70) verwys die begrip bewys na die volgende:

"... a procedure of ascertaining the truth of sentences which is employed primarily in deductive science."

Tarski gaan voort en beskryf die begrip bewys as 'n prosedure wat in 'n aksiomatiese stelsel gebruik word om die waarheid van 'n bewering te bevestig.

"Bewys" is 'n noodsaaklike komponent van die aksiomatiese metode, en hierdie metode is algemene aanvaarbare wiskundige praktyk, alhoewel die aksiomatiese benadering nie oorheersend in sekere areas soos grafiekteorie en numeriese analise is nie.

1.4.3 Bewystegniek

Volgens die verklarende Handboek van die Afrikaanse Taal (1994) is tegniek 'n vaardigheid wat vir die verrigting van 'n werk nodig is. Hier sal volstaan word by bewystegniek as 'n metode en vaardigheid wat nodig is vir 'n bewys. Solow (1981 : 10) identifiseer onder andere die volgende as voorbeelde van bewystegnieke:

wiskundige induksie; die metode deur teenstrydigheid; die kontrapositief; die keuse-metode en die konstruksiemetode.

1.4.4 Onderrig

Volgens Van Rensburg en Landman (1984 : 116) is onderrig (of instruksie) enger en meer spesifiek as onderwys.

"Onderrig is 'n onderdeel van onderwys, byvoorbeeld waar gepraat word van vakonderwys (onderwys van die vak) word dikwels eerder verwys na onderrig of

instruksie in 'n bepaalde vak. Ten opsigte van die onderwysende opvoedingsituasie is onderrig konkrete feitemededelinge deur 'n skoolse opvoeder van 'n leerling. By opvoeding en onderwys word die aktiewe saamwerk van die leerling beklemtoon, maar in onderrig bly so 'n beklemtoning effens op die agtergrond. Onderrig is veral die werksaamheid van die onderwyser."

1.5 Metodologie en program van studie

Twee metodes van navorsing, te wete literatuurstudie en deskundige beoordeling word hoofsaaklik in hierdie studie aangewend.

Hoofstuk 2 behels 'n literatuurstudie oor die filosofiese ontwikkeling van wiskunde. Die drie belangrikste hedendaagse denkskole, te wete die logisisme, die formalisme en die intuïsionisme, het elkeen 'n besondere invloed op die formalisering van bewyse uitgeoefen. Daar word ook ander filosofiese ontwikkelings in hierdie hoofstuk bespreek. Sommige van hierdie ontwikkelings is onafhanklike filosofieë, terwyl ander weer 'n mengsel van die drie prinsipiële denkskole is. Die ander filosofieë het egter nie dieselfde invloed op die fundamentele ontwikkeling van die wiskunde gehad as die drie genoemde denkskole nie.

In hoofstuk 3 word bewys as 'n wiskundige aktiwiteit aan die hand van 'n literatuurstudie ondersoek. In besonder word die aard en kontrole (surveyability) van 'n bewys bestudeer. Faktore wat nodig is vir 'n bewys om aanvaarbaar vir die wiskundige gemeenskap te wees, word ook in oënskou geneem.

Hoofstuk 4 handel oor die proposisielogika wat 'n formele logiese stelsel is. Die taal van hierdie stelsel word aan die hand van 'n literatuurstudie bestudeer. Alhoewel die taal eenvoudig en nie baie ekspressief is nie, het dit tog belangrike toepassings. Daar word ook 'n studie van die sintaksis (struktuur en grammatika) sowel as die semantiek (betekenis) van hierdie taal gedoen.

Hoofstuk 5 is 'n uitbreiding van die proposisielogika na die eersteordepredikaatlogika, wat ryk genoeg is om die wiskunde te akkommodeer. Hierdie uitgebreide taal word weer eens aan die hand van 'n literatuurstudie nagevors, en is geskik om teorieë van groepe, ringe, versamelings, kategorieë, ensovoorts, te formaliseer.

Hoofstuk 6 is 'n toepassing van die beginsels van logika wat in hoofstukke 4 en 5 ontwikkel is. Die beskouing is streng formeel en die verskillende bewystegnieke word bestudeer. Hierdie hoofstuk word ook aan die hand van 'n literatuurstudie gedoen.

In hoofstuk 7 word 'n ontleding van die tussentydse kernsillabus vir wiskunde, Hoër Graad, graad 10–12, van die Departement van Onderwys gedoen ten opsigte van die verskillende bewystegnieke wat in Hoofstuk 6 bespreek is. In hierdie hoofstuk word dieselfde ontleding ook gedoen ten opsigte van 'n onderwysersopleidingsinstansie se wiskundesillabus. Die opleidingsinstansie is die South African College for Teacher Education (SACTE), geleë in Pretoria, en wat gemoeid is met onderwysersopleiding deur middel van afstandsonderrig. Die onderskeie sillabusse verskyn in die bylae. Verder word 'n onderrigmodel vir elementêre logika in hierdie hoofstuk beskryf wat leerlinge en studente in staat sal stel om bewyse met begrip uit te voer.

Die gevolgtrekkings en aanbevelings wat in Hoofstuk 8 verskyn word logies afgelei uit

- die vorige hoofstukke,

- die skrywer se jarelange verbintenis in wiskunde met onderrig en kurrikulum-ontwikkeling, en

- sy ervaring as lid van die vakkomitee vir wiskunde wat verantwoordelik was vir die interprestasie van wiskundesillabusse vir die voormalige Transvaalse Hoërskole.

'n Sintese van die studie in sy geheel word in hierdie slothoofstuk verwoord in die vorm van gevolgtrekkings, aanbevelings en moontlike navorsingsvelde.

HOOFSTUK 2: DIE INVLOED VAN DIE VERSKILLENDE DENKSKOLE OP BEWYSTEGNIEKE

2.1 Inleiding

Daar het min of meer drie duidelik onderskeibare *krisisse* in die ondersoek na die grondslae van die wiskunde voorgekom.

Volgens Heidema (1965 : 11–12) het die eerste krisis ongeveer 500 v.C. na vore gekom met die ontdekking van die irrasionaliteit van sekere verhoudings, byvoorbeeld die verhouding van die lengte van 'n diagonaal tot die lengte van 'n sy van 'n vierkant.

Die tweede krisis het gedurende die eerste helfte van die vorige eeu gesentreer om die grondslae van die analise. 'n Hele aantal begrippe uit die analise was vaag of kontradiktories, soos byvoorbeeld die begrippe "veranderlike", "funksie", "limiet", "kontinuïteit", "oneindig klein entiteite", ensovoorts. Hierdie onduidelikhede is bevredigend opgelos deur wiskundiges soos Gauss, Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor en andere. Dit het gelei tot die volkome "aritmetisering" van die analise. Die gevolg was dat die analise gereduseer is tot 'n streng deduktiewe teorie oor die natuurlike getalle, versamelings natuurlike getalle, versamelings van versamelings natuurlike getalle, ensovoorts.

Die derde krisis in die grondslae-ondersoek het ongeveer 1900 (of enkele jare daarvoor) 'n aanvang geneem. Hierdie krisis het sy ontstaan hoofsaaklik te wyte aan die ontdekking van die sogenaamde "paradokse" in die logika en Cantoriaanse versamelingsteorie, en is tans nog nie bevredigend opgelos nie. Oor die vraag na 'n alternatiewe fundering vir die wiskunde, het 'n aantal filosofiese rigtings ontstaan, met die *aksiomatisme, logisisme, formalisme* en *intuïsionisme* as die vier belangrikstes.

Volgens Lolli (1983 : 13) het die wiskunde oor die tydperk 1880–1930 as 'n gespesialiseerde studieveld gekonsolideer. Dit is die tydperk wat strek vanaf Frege tot Gödel, of van Weierstrass tot Hilbert. Gedurende 'n wiskundekonferensie by Königsberg in 1930, is die vorderingsverslae van drie skole, die logisisme, formalisme en intuïsionisme voorgelê.

Lolli (1983 : 14) is van mening dat die drie skole hoofsaaklik ten opsigte van die betekenis, metodes en tegnieke van wiskunde verskil.

Die intuïsioniste onder leiding van Brouwer het aanvanklik die gebruik van simboliese logika verwerp. Daarenteen het die ander twee skole mildelik van hierdie tegnieke gebruik gemaak, formalisme op 'n operatiewe wyse en logisisme met redelik vernuftige pogings. Die intuïsioniste het met 'n drastiese rekonstruksie van wiskunde vorendag gekom, terwyl die oogmerk van die ander twee skole was om die bestaande wiskunde te regverdig.

Intuïsionisme is selfs vir nie-aanhangers maklik verstaanbaar, aangesien dit nie onderskei tussen wiskunde en die grondslae nie (Lolli 1983 : 14). Daarenteen is die geldigheid van logisisme en formalisme gebaseer op 'n twyfelagtige aanname, naamlik wiskunde is goed soos dit is.

Ten spyte van die onderlinge verskille het die verskillende skole tog genoegsame raakpunte om te kan praat van 'n kultuur van wetenskaplike grondslae. Die aanhangers van die onderskeie skole is dit eens dat elkeen van hierdie skole waardevolle bydraes tot die wiskunde as sulks lewer.

Volgens Detlefsen (1992 : 1) is die regverdiging van bewysprosedures 'n gewilde denkprobleem onder filosowe. Hy skryf in hierdie verband soos volg:

> "This being so, arriving at some understanding of the nature and role of proof becomes one of the primary challenges facing the philosophy of mathematics."

Een oorweging wat volgens Detlefsen (1992 : 1–2) sterk in die guns van bewys tel as 'n vorm van regverdiging, was die tradisionele beskouing van strengheid in die wiskunde. Hierdie beskouing, wat met Aristoteles geassosieer word, is gebaseer op die gedagte dat die doel van regverdiging nie slegs die bevestiging van 'n gevolg is nie, maar eerder om metafisiese gronde te identifiseer.

Hierdie strengheid induseer 'n hiërargie van waarhede by 'n basis, genoem die aksiomas. Die epistemologiese ideaal is om vanaf die gevolgtrekking in die ketting terug te werk tot by die aksiomas, om sodoende 'n volledige bewys vir die gevolgtrekking te kry. Strengheid in hierdie stelsel is essensieel, aangesien geen duidelike waarhede daarsonder moontlik is nie.

'n Histories meer invloedryke beskouing wat ook met Aristoteles, sowel as Euklides, geassosieer word, is die begrip van 'n deduktiewe of demonstratiewe wetenskap.

Hierdie beskouing is minder metafisies gegrond, en het 'n meer epistemologiese karakter. Hierdie beskouing het ook ten doel die soeke na fundamentele waarhede, maar nie in die sin van finale metafisiese gronde nie. Daar word eerder gesoek na premisse wat fundamenteel epistemologies waar is.

In hierdie stelsel word die aksiomas nie metafisies nodig geag vir die waarheid van stellings nie.

Hierdie tradisionele beskouings het plek gemaak vir 'n minder fundamenteel georiënteerde beskouing ten opsigte van regverdiging van bewyse. Aksiomas word nie meer beskou as die metafisiese gronde van 'n stelling nie. Hulle word eerder gesien as voldoende om

- onnodig verder na getuienis te soek,
- voldoende genoeg rasionale twyfel uit stellings te verwyder,
- bewyse eenvoudig en ekonomies te maak.

Hierdie skuif weg vanaf die fundamentele begrippe vir regverdiging beteken egter nie dat strengheid ingeboet word nie. Strengheid het volgens Detlefsen (1992 : 2) inderdaad sterk na vore gekom met die kragtige ontwikkeling van formaliseringstegnieke. Die eis vir strengheid het gegroei tot 'n punt waar 'n bewys formeel moet wees om as 'n egte bewys beskou te word. Die klem op formalisering berus op die beskouing dat die enigste toelaatbare inferensies in 'n wiskundige redenering die logiese inferensies is.

In hierdie hoofstuk sal gepoog word om in breë trekke die benaderings tot bewystegnieke van die onderskeie denkskole te bestudeer.

2.2 Historiese agtergrond

'n Bewys is nie altyd gesien as 'n deduksie, hetsy direk of indirek, vanaf eerste beginsels nie. Volgens Kline (1970 : 266) was die eerste deduktiewe struktuur Euklides se Elemente. Kline (1970 : 266) merk verder die volgende op: "Euclidean geometry, however, did not come into being in this form. It took 300 years, the periods from Thales to Euclid, of exploration, fumbling, vague and even incorrect arguments before the *Elements* could be organized." Kline beweer dat selfs hierdie struktuur, wat veronderstel was om streng logies te wees, sterk op intuïtiewe argumente, sinlose en selfs betekenislose definisies staat gemaak het. Dat 'n logiese struktuur ontwikkel is nadat die stelsel geskep is, is nie ter sake nie. Wat relevant is, is dat die deduktiewe stelsel ontwikkel is nadat die begrip daarvoor ontstaan het.

In 'n poging om vaste grondslae vir die meetkunde daar te stel, het die Grieke vorendag gekom met die aksiomatiese metode. In die tydperk vanaf Euklides tot die negentiende eeu het die aksiomatiese metode uit 'n klein aantal aksiomas ontwikkel wat eksplisiet gestel is. Die empiriese aard van die Euklidiese meetkunde was gekarakteriseer in hierdie aksiomas. Hoewel die deduktiewe argumente dikwels op intuïsie teruggeval het, en dus nie volmaak was nie, was die Euklidiese meetkunde duidelik aksiomaties.

2.3 Groeipyne

Hanna (1983 : 30) bespreek verskeie gebeurtenisse gedurende die negentiende eeu wat bygedra het tot die groei en ontwikkeling van die wiskunde. Die industriële revolusie, die ontwikkeling van die fisiese wetenskappe en die uitbreiding van die universiteite en navorsingsinstansies was 'n stukrag wat die navorsing in die wiskunde tot nuwe hoogtes gevoer het. Nuwe navorsingsvelde is geskep soos die teorie van funksies, die teorie van getalle en die logika.

Die belangrikste ontwikkeling in die wiskunde in Europa het in Frankryk en Duitsland plaasgevind, met Karl Friedrich Gauss die prominentste figuur. Alhoewel Engeland in die hart van die industriële ontwikkeling was, het geen noemenswaardige ontwikkeling in die wiskunde hier plaasgevind nie. Volgens Klein (1970 : 270) het die belangrikste werke in die negentiende eeu van Cauchy en Weierstrass gekom uit hulle navorsing oor die grondslae van die calculus.

Die ontwikkeling van die meetkundes in die negentiende eeu het 'n diep grondige invloed op wiskunde as geheel gehad. Die laaste een van Euklides se vyf postulate stel dit dat deur 'n punt buite 'n gegewe lyn een en slegs een lyn ewewydig aan die gegewe lyn getrek kan word. Oor die jare heen het talle wiskundiges vermoed dat hierdie postulaat nie onafhanklik van die ander is nie, en het probeer om dit uit die stelsel te verwyder. Hulle het sonder sukses, probeer om hierdie postulaat uit die ander vier af te lei. In hulle poging om die vyfde postulaat te elimineer, het wiskundiges soos Gauss, Bolyai en Lobachevski navorsing gedoen deur Euklides se parallelpostulaat met ander postulate te vervang. Dit het gelei tot die ontdekking dat dit heel moontlik is om konsistente meetkundige teorieë waarin Euklides se vyfde postulaat nie geld nie, te konstrueer.

Hierdie nuwe meetkundige teorieë het interessante gevolge gehad. Deur die vyfde postulaat te elimineer terwyl Euklides se ander vier postulate behou word ontstaan daar nie teenstrydighede nie. Die konsistensie van die nie-Euklidiese meetkundes het die Kantiaanse filosofie dat Euklides se aksiomas die ingebore intuïsie van die menslike verstand verteenwoordig, onder verdenking gebring.

Die nuwe meetkundes het die denke van wiskundiges op twee wyses beïnvloed. Enersyds was dit duidelik dat meetkundige aksiomas nie meer nodig was om die fisiese wêreld te reflekteer nie. Die idee dat meetkunde as 'n struktuur op 'n vaste basis gebou is, het verbreed om veranderinge in die versameling van aksiomas toe te laat om sodoende 'n nuwe basis te skep. Andersyds het hierdie nuwe denkrigtings in die meetkunde die grondslag gelê vir die ontwikkeling van nuwe aksiomatiese strukture in ander areas van die wiskunde. Hanna (1983 : 31) merk die volgende op:

"Mathematicians were quick to exploit their recognition that an axiomatic system could be based on any axioms of interest – subject only to the requirement of consistency."

Verskeie wiskundiges het 'n betekenisvolle bydrae tot die strukturering van wiskunde gelewer. Terwyl die nuwe meetkundes geskep is, het mense soos Pasch (1882), Peano (1889) en Pieri (1899) met nuwe versamelings aksiomas die Euklidiese meetkunde gereorganiseer. Een van die mees betekenisvolle strukturerings het van Hilbert gekom met sy "Grundlagen der Geometrie" (1889). Volgens Kline (1970 : 271) het Hilbert, die voorloper van die moderne aksiomatiese stelsels, sy meetkunde gegrondves op ses primitiewe terme en een-en-twintig aksiomas. Hy het wiskundiges oortuig dat die strenge konstruksie van Euklidiese meetkunde, die hipotetiese deduktiewe model, uitgebrei kan word na enige deel van die wiskunde.

Kriel (1990 : 17) beweer dat sommige van die mees noemenswaardige bydraes tot die wiskunde in die negentiende eeu voortgespruit het uit probleme in die natuurwetenskappe. Hieronder is Fourier se wiskundige beskrywing van die samestelling van klankgolwe en Maxwell se wiskundige ontdekking en beskrywing van elektromagnetiese velde. Davis en Hersh (1981 : 245) maak die volgende opmerking:

"It is interesting to note that the eighteenth century, the great age of the infinitesimal, was the time when no barriers between mathematics and physics were recognized."

2.4 'n Nuwe benadering tot strengheid

Die ontwikkeling van die nie-Euklidiese meetkundes het saamgeval met sterk ondersteuning vir strengheid in die algemeen. Wiskundiges het vasgestel dat begrippe soos limiete en kontinuïteit nie bevredigend gedefinieer was nie. Volgens Kline (1970 : 269) was verskeie opvolgers van Newton en Leibniz bewus van die gebrek aan strengheid in die calculus.

Euler het in die eerste klassieke werk oor die calculus, "Introductio in Analysin Infinitorum" (1748), en weer in sy "Institutiones Calculi Differentialis" (1755) en "Institutiones Calculi Integralis " (1768–70) vergeefs probeer om die basiese konsepte van die calculus te verklaar. Lagrange het in sy "Théorie des fonctions analytiques" (1797) en d'Alembert in sy artikel "Limite" ook probeer om die basiese begrippe streng te formuleer. Selfs Cauchy, een van die leiers van strengheid in die wiskunde, se pogings in sy "Cours à Analyse Algébrique" (1821) om sekere begrippe te definieer, was twyfelagtig en sterk intuïtief.

Cauchy het nie 'n onderskeid getref tussen die begrippe kontinuïteit en differensieerbaarheid nie. Hy was ook onbewus van die nodigheid van gelykmatige konvergensie vir reekse alvorens term-vir-term integrasie uitgevoer kan word. Van die beste wiskundiges van die negentiende eeu was óf volgelinge van Cauchy, of het "bewys dat kontinuïteit, differensieerbaarheid impliseer". In 1872 het Weierstrass die wiskundige wêreld geskok met 'n funksie wat kontinu is vir alle reële waardes van x, maar wat nie differensieerbaar in enige waarde van x is nie. As gevolg hiervan het wiskundiges begin om die grondslae van die calculus te konsolideer. Die geldigheid van elke stap deur motivering van strenge definisies en bewyse het baie aandag gekry.

Wiskundiges was deeglik bewus van die feit dat wiskundige foute van die verlede voor die deur van intuïsie gelê kan word. Volgens Grabiner (1974 : 358) was twee faktore nodig vir die verandering in die benadering en sienswyse van wiskundiges. Eerstens was dit duidelik dat die tegnieke wat vir strenge bewysvoering nodig is, ontwikkel moet word. Tweedens moes daar 'n verandering in die houding van wiskundiges kom.

Grabiner (1974 : 358-362) gaan voort en bespreek vier moontlike faktore wat 'n bydrae tot strenge bewysvoering gelewer het.

'n Eerste moontlike faktor was 'n behoefte om foute te vermy en om foute van die verlede reg te maak. Daar was egter verrassend min foute in die verlede gemaak. Hiervoor was daar twee redes. Sommige resultate kon numeries of eksperimenteel geverifieer word, en belangriker, wiskundiges het 'n baie goeie intuïsie gehad.

Alhoewel hulle nie die riglyne van strenge definisies gehad het nie, het hulle 'n grondige begrip van die eienskappe van die analise gehad. Nietemin beklemtoon Grabiner dat wiskundiges wat meer-veranderlike funksies, komplekse funksies en trigonometriese reekse ondersoek het, gevind het dat hulle nie langer op wiskundige intuïsie kon staatmaak nie.

'n Tweede moontlike faktor was die feit dat die calculus streng in 'n gees van algemeenheid ontwikkel is. In die agtiende eeu het 'n enorme hoeveelheid wiskundige resultate na vore gekom en daar was 'n behoefte om hierdie resultate te verenig en te orden. Dit het noodwendig tot 'n streng aksiomatiese grondslag gelei. Grabiner (1974 : 359) voeg egter die volgende by:

> "But there had been large numbers of results for a hundred years before Cauchy's work. Besides, unifying results does not always make them rigorous, moreover, the function of rigor is not just to unify, but to prove."

'n Derde moontlike faktor was die voorafgaande bestaan van strengheid in Euklidiese meetkunde. Almal het na die Hellenistiese tydperk geweet dat wiskunde veronderstel is om streng te wees. Euklidiese meetkunde het inderdaad 'n model vir strengheid verskaf. Nie-Euklidiese meetkundes wat konsistent is, het die vraag oor konsistensie beantwoord deur konsistensie relatief tot die Euklidiese meetkunde. Die toenemende aandag op strengheid van wiskunde as 'n geheel, tesame met George Berkeley se aanval op die calculus in 1734 het wiskundiges aangespoor om die calculus op dieselfde strenge grondslag as die Euklidiese meetkunde te vestig.

'n Vierde moontlike faktor was dat daar 'n toenemende behoefte was om wiskunde streng te onderrig. Dit het nodig geword om wiskundige resultate te formaliseer.

Elkeen van die bogenoemde faktore verklaar die klemverskuiwing van die resultaatgeoriënteerde benadering van die agtiende eeu na die meer strenge standaarde van die negentiende eeu.

2.5 Logika en die grondslae van wiskunde

Volgens Lolli (1983 : 13) is die grondslae van die wiskunde intensief nagevors oor die tydperk wat strek vanaf die laaste twintig jaar van die vorige eeu en die eerste dertig jaar van die huidige eeu, dit is, die tydperk vanaf Frege tot Gödel, óf vanaf Weierstrass tot Hilbert.

Labuschagne (1977 : 49) beskryf die organisatoriese stand van die wiskunde teen 1880 as baie deurmekaar. Die analise het uitermate gegroei, en daar was hier en daar brokkies wat skynbaar geen verband gehou het met die res van die wiskunde nie. Boole en De Morgan het die logika bestudeer wat gelei het tot 'n bespiegeling oor die verwantskap tussen die logiese rekene en die meer konvensionele dele van wiskunde.

Sedert konsistensie van die reële getallestelsel 'n nodige voorwaarde vir die konsistensie van analise geword het, het wiskundiges begin om 'n diepgaande studie van die reële getalle te maak. Die toenemende gebruik om oneindige versamelings te gebruik om onder andere getalle te definieer het gelei tot grondige navorsing na die eienskappe van sodanige versamelings en die kritiese ondersoek van die begrip oneindigheid. Wiskundiges het hulleself die vraag gevra of dit sin maak om te sê dat een oneindige versameling groter is as 'n ander oneindige versameling. Is die versameling van rasionale getalle net so groot as die versameling van reële getalle?

'n Kern begrip in hierdie ondersoeke was dié van kardinaliteit. Twee versamelings het dieselfde kardinaliteit as daar 'n een-tot-een afparing tussen die elemente van die versamelings bestaan. Die versameling van ewe getalle 2, 4, 6, ... het dieselfde kardinaliteit as die versameling van natuurlike getalle 1, 2, 3, ..., want vir elke natuurlike getal x is daar 'n ooreenstemmende ewe getal 2x, en omgekeerd. Daar is dus net soveel ewe getalle as wat daar natuurlike getalle is, alhoewel die versameling ewe getalle 'n deelversameling van die versameling van natuurlike getalle is. Die kardinaalgetalle van eindige versamelings word met natuurlike getalle aangedui. Die kardinaalgetalle van oneindige versamelings staan bekend as transfiniete getalle. In 1874 het Cantor die begrip kardinaliteit gebruik en aangetoon dat daar meer as een oneindigheid is, wat teenstrydig met die wiskundige opvatting van daardie tyd was.

Hy het in besonder aangetoon dat die versameling van reële getalle 'n groter kardinaliteit het as die versameling van natuurlike getalle. Hy het op 'n vernuftige wyse aangetoon dat dit onmoontlik is om 'n een-tot-een afparing tussen die reële getalle en die natuurlike getalle te konstrueer. Volgens Maor (1987 : 59–65) het Cantor die kardinaliteit van alle versamelings met aftelbaar veel elemente, aangedui met $\aleph_0$. $\aleph$ word uitgespreek as "alef", die eerste letter van die Hebreeuse alfabet. ('n Versameling S is aftelbaar as en slegs as sy elemente s_i as 'n oneindige ry s_1, s_2, s_3, ... geskryf kan word.) Alle versamelings met kardinaliteit $\aleph_0$ het presies soveel elemente as die versameling van telgetalle, en is dus aftelbaar. Cantor het aangetoon dat daar versamelings bestaan waarvan die elemente so dig is, dat hulle nie afgetel kan word nie. Een sodanige versameling is die versameling van punte op die reële getallelyn. Hierdie punte stem ooreen met die versameling van reële getalle $\mathbb{R}$. Die versameling $\mathbb{R}$ vorm 'n *kontinuum*, en bevat "oneindig" meer elemente as 'n aftelbare versameling. Die kardinaliteit van $\mathbb{R}$ is dan ook meer as $\aleph_0$. Cantor het hierdie tipe oneindigheid aangedui met C, en dit die oneindigheid van die kontinuum genoem. Na Cantor se resultate het dit duidelik geword dat daar talle transfiniete kardinaalgetalle is. Cantor het inderdaad aangetoon dat daar geen grootste sodanige getal is nie. Daar is dus oneindig veel oneindighede. As gevolg van die intensiewe navorsing in die analise gedurende die negentiende eeu het Poincaré, (Wilder 1967 : 121), in 1900 beweer dat absolute strengheid bereik is. "We believe that we no longer appeal to intuition in our reasoning. And in analysis, he remarked absolute rigor has been attained." Dit het later geblyk nie die geval te wees nie. Die analise het inderdaad 'n stewiger grondslag gekry, maar die grondslag waarop dit gebou is, te wete die versamelingsteorie, het al meer onder verdenking gekom. Wilder 1967 : 121) beweer dat presiese formulering van die struktuur van die reële getallekontinuum nog nie bereik is nie. Daar moes nog dikwels op intuïsie staatgemaak word.

Hanna, (1983 : 34) bespreek verskeie logiese paradokse wat in die versamelingsteorieë na vore gekom het. Hierdie paradokse het die sogenaamde *krisis in die grondslae* van die wiskunde veroorsaak. Die paradokse het nie ontstaan as gevolg van dubbelsinnighede van definisies of nalatigheid in bewyse nie. Inteendeel, hierdie paradokse is afgelei binne streng aksiomatiese stelsels, en het onversoenbare gebreke ten opsigte van die betroubaarheid van die stelsels asook die aksiomatiese metode uitgewys.

Cantor se paradoks het gesentreer rondom die oneindige versamelings. Cantor het bewys dat daar geen grootste transfiniete getal is nie. Hy het ook bewys dat die versameling van alle deelversamelings van 'n versameling, dit wil sê, die magversameling van 'n versameling, 'n groter kardinaliteit as die versameling self het. 'n Paradoks ontstaan as die versameling S van alle versamelings beskou word. As T die magversameling van S is, dit is die versameling van alle deelversamelings van S, dan moet T 'n hoër transfiniete getal as S self hê. Daar kan inderdaad geen moontlike versameling wees met meer elemente as T nie, aangesien T die magversameling van die versameling S is wat alle moontlike versamelings insluit. T moet derhalwe die grootste transfiniete getal besit. Maar dit is teenstrydig met Cantor se stelling, dat daar geen grootste transfiniete getal bestaan nie.

Volgens Labuschagne (1977 : 50) het Russell se ontdekking van 'n teenstrydigheid in Gottlob Frege se versamelingsleer sy oorsprong in die volgende gehad:

Veronderstel dat deur die woord "versameling" een of ander samevoeging van objekte bedoel word. Hoe kan 'n spesifieke versameling bepaal word? Daar is twee metodes. Die objekte kan gelys word, of daar moet 'n eienskap waarvolgens die betrokke objekte uitgeken kan word, gespesifiseer word. Vir eindige versamelings is albei metodes ekwivalent. Oneindige versamelings kan egter oor die algemeen net met behulp van die tweede metode gespesifiseer word. Frege het 'n aksioma van abstrahering by sy teorie ingesluit wat min of meer sê dat enige eienskap 'n sekere versameling bepaal. Dit het heel aanvaarbaar gelyk. Maar Russell het die volgende teenstrydigheid uitgewys. Gestel elke eienskap bepaal 'n versameling. Dan moet daar 'n versameling y wees wat gedefinieer word deur die eienskap $x \notin x$, dit wil sê $y = \{x \mid x$ is 'n versameling en $x \notin x\}$. Die vraag is nou of $y \in y$. Indien $y \in y$, dit wil sê, $y \in \{x \mid x \notin x\}$, dan volg dit dat $y \notin y$. Omgekeerd, as $y \notin y$, dan volg dit dat $y \in y$, wat 'n onversoenbare teenstrydigheid is.

Selfs die klassieke paradoks van Epimenides het 'n bydrae gelewer om die fondamente van die wiskunde te skud. Beskou die bewering: "Hierdie bewering is onwaar". Is hierdie bewering waar? Hierdie paradoks was deur Gödel gebruik om aan te toon dat selfs in 'n formele stelsel daar ware bewerings is wat nie bewys kan word nie.

Deur die jare was daar talle paradokse in die analise wat te wyte was aan foutiewe redenering. Maar die paradokse van Cantor, Russell en soortgelykes het onderhewig aan alle reëls op 'n natuurlike wyse na vore gekom. Dit was hierdie paradokse wat die gebruik van die term "krisis" geregverdig het.

Volgens Labuschagne (1977 : 1) het daar 'n belangrike verandering in die benadering van wiskundiges tot hul vak plaasgevind en hy merk die volgende op: "Dit het duidelik geword dat die onderskeid tussen sinvolle wiskunde en onsin nie altyd voor-die-hand-liggend is nie."

Die meeste wiskundiges was oortuig dat die grondslae van die wiskunde gebrekkig en foutief gelê is. Die gevolg was dat hulle opnuut hulle aandag bepaal het by intensiewe navorsing om die gebreke uit die weg te ruim. Dit was nie duidelik wat die foute in die grondslae was nie, maar wiskundiges het erken dat die begrip van 'n versameling van versamelings en die gebruik van versamelings wat te groot is, dit wil sê, versamelings waarvan die graad van oneindigheid te groot is, probleme veroorsaak. Volgens Labuschagne (1977 : 51) kan die probleem op verskillende wyses benader word.

Een teorie is die Zermelo-Fraenkel-Skolem versamelingsteorie (ZFS), waarvan die basiese doel die beperking is van daardie eienskappe wat tot die bestaan van te groot versamelings lei. 'n Versameling moet bevat wees in iets wat alreeds bekend is as 'n versameling. Ongelukkig het die ZFS-versamelingsteorie sekere gebreke. Dit is naamlik so dat sommige van die versamelings waarin belang gestel word, besonder groot is. Hier kan gedink word aan die versameling van alle groepe. Binne die ZFS-versamelingsteorie kan nie oor só 'n versameling gepraat word nie.

'n Alternatiewe benadering is om in plaas van die woord "versameling" vir 'n same-groepering van elemente te gebruik, die woord "klas" gebruik word. Elke eienskap word toegelaat om 'n klas te bepaal. Slegs sekere klasse kan beskou word as lede van ander klasse, en sulke klasse word "versamelings" genoem. Klasse wat nie lede van enige ander klasse is nie, word "egte klasse" genoem. Hierdie benadering lewer die versamelingsteorie wat bekend staan as die Mostowski-Kelly-Morse versamelingsteorie (MKM).

Effens ouer is die verwante von Neumann-Bernays-Gödel versamelingsteorie (NBG), wat byna ooreenstem met MKM. Dit volg nou dat vir beide die NBG- en MKM-versamelingsteorie, Russell se teenstrydigheid vermy word. Omdat alleenlik versamelings elemente van klasse kan wees, word die volgende verkry: as y die klas is van alle versamelings x sodat $x \notin x$, en as 'n beperking oor y se lidmaatskap aan homself tot 'n skynbare teenstrydigheid lei, dan moet eenvoudig afgelei word dat y 'n egte klas is, en dus van geen klas 'n lid kan wees nie, al besit y ook watter eienskappe. Wat interessant is, is dat Kronecker in 1880 hierdie probleme voorsien het. Hy het die bestaan van 'n oneindige versameling verwerp en was ten gunste van opbouende definisies en bewyse.

In die hernieude ondersoek na die grondslae van die wiskunde het daar drie denkskole van belang ontstaan naamlik die *logisisme* in Engeland, met Russell en Whitehead as leiers, die *formalisme* in Duitsland met Hilbert as die voorloper en die *intuïsionisme* in Nederland onder leiding van Brouwer en Heyting. Elkeen van hierdie skole het sy eie siening oor die grondslae van die wiskunde. Hulle verskil uiteenlopend ten opsigte van die benadering tot die definiëring van getalle, die begrip oneindigheid en die rol van die logika.

Van besondere belang vir die analise is die benadering en sienswyse van hierdie drie skole ten opsigte van die rol, sowel as die aard van bewyse. Hierdie verskillende benaderings, asook die siening van die meer resente teoretikus, Imre Lakatos, sal verder bespreek word. Wat essensieel vir hierdie bespreking is, is die nadere ondersoek van die aksiomatiese metode, wat 'n gemene faktor tot die drie skole is.

2.6 Die aksiomatiese metode

Hanna (1983 : 36) beskryf 'n aksiomatiese of wiskundige stelsel soos volg:

> "Any system of expression in which certain of the expressions are set off as assumed and is in some way logically prior to the others, which are derived from them, is commonly called an axiomatic system."

Kline (1970 : 264–265) onderskraag hierdie siening as hy die volgende opmerk:

> "There is no question that mathematics is distinguished from all other bodies of human knowledge in that it insists on deductive proof from explicitly stated axioms as the indispensable condition for the acceptance of its conclusions. This requirement has indeed conferred power on mathematics, for deductive proof has strengthened the structure. Moreover, the organization of mathematics into deductive systems has given coherence to its vast contents, and the axiomatization inherent in this type of organization has made clear precisely what is presupposed and hence where such systems are applicable."

2.7 Die rol van die aksiomatiese stelsel

Volgens Wilder (1967 : 115) het die rol van die aksiomatiese stelsel momentum gekry met die resente ontwikkeling op die gebied van die wiskundige logika. Die aksiomatiese stelsel het sy ontstaan hoofsaaklik te danke aan "erflike" faktore. "In other words, the factors which forced its creation were based on internal rather than external needs." (Wilder 1967 : 115). Met die ontstaan van die metode het dit stilswyend 'n sekere logiese redenering aanvaar. Logiese deduksie was vir die eerste keer toegepas op die wiskunde.

Volgens Wilder (1967 : 115) lyk dit aanvaarbaar om aan te neem dat dit 'n belangrike bydrae gelewer het om die Griekse wiskunde op 'n "konsistente" grondslag te plaas. Twee aspekte van belang in hierdie bydrae, is die volgende:

- die wyse waarop logika geïmplementeer is om eerstens 'n konsistente stelsel daar te stel en tweedens wiskunde ondergeskik aan die logika te maak, en

- daar was waarskynlik slegs een interpretasie van die meetkunde, in moderne terme, slegs een model, soos beskrywe in die "Elemente".

Wilder gaan voort en beskryf die nuwe rol van die aksiomatiese stelsel gedurende die laaste dertig jaar van die negentiende eeu en die eerste dertig jaar van die twintigste eeu. Dit was deels verantwoordelik vir die toenemende abstrahering van die wiskunde.

Weer eens was die rol van die aksiomatiese metode om die wiskunde op 'n stewige grondslag te bou. Russell het sy aksiomas "universeel geldig" genoem en later uitgebrei met "keuseaksiomas" en "aksiomas van oneindigheid" wat 'n streng aksiomatiese karakter gehad het. Russell het, soos Euklides en Zermelo, slegs een model in gedagte gehad, en streng voorwaardes aan sy stelsel toegevoeg. Russell en Whitehead was vasberade om die krisis in die wiskunde, wat veroorsaak is deur die versameling-teoretiese teenstrydighede, op te los. Dit was in teenstelling met logisiste soos Peano en Frege wat probeer het om 'n basis daar te stel waarop die wiskunde gevestig kon word.

Die kontras tussen die aksiomatiese stelsels van Zermelo en van Russell en Whitehead met betrekking tot die taal, was duidelik. Zermelo het primitiewe terme soos "versameling" en die relasie "is 'n element van", saam met die gewone taal gebruik. Russell en Whitehead het die grondslag gevestig op, wat hulle genoem het, primitiewe logiese waarhede. Beide stelsels het egter tekortkominge gehad. In Zermelo se geval, het die begrip "eienskap", wat byna sinoniem met "versameling" was onder die dekmantel van die gewone taal ingekruip. Dit het tot verwarring gelei, wat dit nodig gemaak het vir 'n meer presiese begrip, 'n taak wat Fraenkel en Skolem op hulle geneem het. In die geval van Russell en Whitehead het die vraag na vore gekom tot watter mate "primitiewe logiese waarheid" aanvaar kan word. Hier was die sintaktiese reëls gebrekkig. Hierdie gebrek is reggestel deur wiskundiges wat die formalistiese filosofie aangeneem het, nadat Hilbert 'n duidelike onderskeid getref het tussen die primitiewe terme en aksiomas aan die een kant en die wiskundige reëls vir afleiding van formules uit aksiomas aan die anderkant.

As retrospeksie vandag gedoen word, kan volgens Wilder (1967 : 118–119) gesien word dat die twee strome, die een wat deur Zermelo in die tradisie van Euklides voortgesit is, en die ander wat deur Russell begin is in die tradisie van die simboliese logika van Boole en Frege, uiteindelik saamgevloei het.

Skolem het uitgewys dat die onbepaalde begrip "eienskap", soos deur Zermelo gebruik, vervang kan word deur eindige uitdrukkings gevorm deur die relasies "$\in$" en "=". Belangriker is die feit dat hy, na aanleiding van 'n stelling van Löwenheim, aangetoon het dat as die Zermelo-stelsel konsistent is, dan het sy formules aftelbaar veel modelle.

Skolem, soos aangehaal deur Wilder (1967 : 118), het tereg die volgende opgemerk:

> "The axiomatic foundation of the theory of sets leads to a relativity of the set notion, and this is inseparably connected with every axiomatization."

Hy het dit duidelik gestel dat hy nie glo dat die aksiomatiese metode die grondslag van die versamelingsteorie is nie. Von Neumann het hom hierin ondersteun en merk onder andere op dat daar geen aksiomatiese stelsel vir wiskunde onafhanklik van die versamelingsteorie is nie.

Volgens Wilder (1967 : 119) het Paul Bernays in 1937 'n effektiewe en bruikbare vereenvoudiging van die von Neumann stelsel voorgestel. Alhoewel dit in die gewone taal gebed was, was die stelsel duidelik geformaliseer. Parallel met die rol wat die aksiomatiese metode gespeel het in die abstrahering van die wiskunde het navorsers soos Dedekind, Weierstrass, Cantor en andere, versamelingteoretiese idees aan die wiskundige gemeenskap bekend gestel. Cantor was vernuftig om die sogenaamde "kontinuum-hipotese" te ontdek. In die bewys dat elke oneindige versameling 'n deelversameling van kardinaliteit alef-nul bevat, was hy egter onbewus van die feit dat hy van die keuseaksioma gebruik gemaak het. Peano het dit wel opgemerk, maar die bewys van die welordeningstelling deur Zermelo in 1904 het die krag van die keuseaksioma uitgewys.

Nadat die krag van die keuseaksioma duidelik geword het, het Zermelo dit in sy versameling van aksiomas ingesluit. Daarenteen het hy nie die kontinuumhipotese as 'n aksioma ingesluit nie, en was gekonfronteer met die vraag of hierdie hipotese uit die ander aksiomas van versamelingsteorie afgelei kan word.

Die belangrikheid van Gödel se resultaat, naamlik die konsistensie van die keuseaksioma en die kontinuumhipotese, het ook die krag van die aksiomatiese metode beklemtoon as 'n metode om veqwantskappe tussen onderskeie aspekte van die teorie te bevestig. Wilder (1967 : 120) beweer die volgende:

"One can still maintain that axiomatization is not the proper way to *formulate*, i.e. *found* set theory, while admitting that, as a tool for investigating the relationships between the various aspects of that theory, and perhaps discovering new aspects, it has a legitimate role."

2.8 Die aard van 'n aksiomatiese stelsel

Die klassieke Euklidiese meetkunde het deur die eeue gedien as 'n voorbeeld van 'n aksiomatiese stelsel. Tog word die Euklidiese stelsel vandag gesien as alles behalwe 'n volmaakte stelsel. Hanna (1983 : 32) beweer daar is geen eksplisiete lys van ongedefinieerde terme nie. Die definisies is slegs beskrywings wat meer op intuïsie staatmaak as op die presiese taal. Verder het dit geen spesifieke reëls waarvolgens geldige uitdrukkings gekonstrueer word nie. Die Euklidiese stelsel het 'n eksplisiete versameling van meetkundige aksiomas (genoem postulate) wat duidelik onderskeibaar van die "gewone begrippe" is, ofte wel logiese bewerings.

Maar hierdie logiese bewerings is nie verdeel in logiese postulate en deduksiereëls nie. Die "gewone begrippe" is 'n onsamehangende klas van bewerings wat onvoldoende vir strenge afleidings is.

Hanna (1983 : 36) onderskei vier kenmerke in 'n aksiomatiese stelsel, naamlik 'n versameling van ongedefinieerde of primitiewe terme, 'n versameling aksiomas, formasiereëls en 'n versameling van deduksiereëls. Dit is ondenkbaar om 'n aksiomatiese stelsel te bespreek sonder verwysing na 'n eksplisiete versameling van aksiomas, aangesien die aksiomas die basis en karakter van so 'n stelsel vorm. Wilder (1967 : 122) het 'n handige klassifikasie van aksiomatiese stelsels gegee. Hy onderskei tussen drie tipes stelsels.

Die eerste is die "Euklidiese tipe". Die primitiewe terme word nie beskou as ongedefinieerd nie, en slegs een model word beskryf. Die model word beïnvloed deur die persepsies van die fisiese wêreld waar dit blykbaar 'n handige funksie het. Hierdie aksiomatiese stelsel het 'n belangrike rol in die verlede gespeel, maar is nie meer relevant ten opsigte van die wiskunde nie.

Die tweede tipe aksiomatiese stelsel lê aan die ander kant van die spektrum. Hierdie stelsel is streng geformaliseer en is tot 'n groot mate verantwoordelik vir die toenemende abstrahering van die moderne wiskunde.

Die derde tipe aksiomatiese stelsel lê tussen eersgenoemde twee ekstreme. Hierdie stelsel word die meeste deur, soos Wilder (1967 : 124) dit stel, die "working mathematicians" gebruik. Hy beskryf die stelsel soos volg:

> "We are careful to list our primitive terms, but we list neither the logical nor the set-theoretic rules by which we shall abide."

Hierdie metode speel ook 'n toenemende belangrike rol in die didaktiese sy van die wiskunde. Die deduksiereëls dikteer die skema van 'n bewys in 'n aksiomatiese stelsel en die skema maak dit moontlik om sekere formules uit te sonder as stellings. 'n Formule X in 'n aksiomatiese stelsel is 'n stelling as en slegs as daar 'n bewys in die stelsel is, met X die laaste formule van die bewys. 'n Bewys is 'n eindige nie-leë string van formules, waarvan elke formule óf 'n aksioma van die stelsel is, óf 'n onmiddellike gevolg van twee voorafgaande sinne na aanleiding van 'n deduksiereël.

2.9 Die keuse van aksiomas

Hanna (1983 : 37) beskryf drie algemene kriteria vir die keuse van aksiomas vir 'n wiskundige stelsel, naamlik konsistensie, onafhanklikheid en volledigheid. 'n Versameling van aksiomas is inkonsistent as 'n goedgevormde sin en sy ontkenning beide vanaf die aksiomas afgelei kan word. As 'n versameling aksiomas nie inkonsistent is nie, dan is hulle konsistent. 'n Versameling aksiomas is onafhanklik indien geen aksioma van die res van die aksiomas afgelei kan word nie. Verder word 'n versameling aksiomas volledig genoem as elke goedgevormde formule of sin, dit is 'n formule of sin wat afgelei is in ooreenstemming met die formasiereëls van die stelsel, bewys kan word as waar of onwaar in die stelsel, met ander woorde, óf die sin, óf sy ontkenning kan uit die aksiomas met behulp van die deduksiereëls afgelei word.

Van hierdie drie kriteria is konsistensie verreweg die belangrikste. Die ander twee kriteria is meer van teoretiese belang. Hulle kom sterk na vore in formele stelsels en

moet as sulks op 'n formele wyse benader word. Hierdie drie algemene kriteria sal later in hierdie hoofstuk meer volledig bespreek word.

Benewens hierdie algemene kriteria vir die keuse van aksiomas, wat toepaslik op enige aksiomatiese stelsel is, is daar ander kriteria wat meer gerig is op die doel van die besondere stelsel. In meetkunde word aksiomas byvoorbeeld gekies vir hulle gerief. Dit is waar vir beide suiwer aksiomatiese meetkunde en fisiese meetkunde. Alhoewel alle meetkundige idees ongetwyfeld hulle oorsprong in die ervaring het, is dit nie vir 'n aksiomatiese meetkunde nodig om ooreen te stem met die ervaring van die fisiese ruimte nie, ook nie met die gedagte van suiwer intuïsie nie. In aksiomatiese meetkunde is daar met die uitsondering van die drie algemene kriteria geen beperking op die keuse van aksiomas nie.

Die n-dimensionele vektorruimtes oor $\mathbb{R}$ stem byvoorbeeld met die intuïsie van ruimte ooreen slegs vir waardes van n gelyk aan 1, 2 en 3. Daarenteen is fisiese meetkunde 'n voorbeeld van 'n empiriese teorie wat in aksiomatiese vorm gegiet is. Sy aksiomas moet sodanig gekies word dat die aksiomatiese stelsel, in samewerking met die fisiese wette, 'n teorie sal verskaf wat waarneembare gebeurtenisse sal beskryf. Die keuse van die aksiomas is derhalwe gedeeltelik empiries bepaal.

2.10 Formele aksiomatiese stelsels

Volgens Hanna (1983 : 37–40) het 'n formele aksiomatiese stelsel vier onderskeidende kenmerke, naamlik primitiewe terme, formasiereëls, aksiomas en deduksiereëls. Hanna definieer 'n formele aksiomatiese stelsel soos volg:

> "A formal axiomatic system is an axiomatic system in which no meaning is assigned to the signs and expressions occuring in it."

Banks et al. (1972 : 48) praat van 'n wiskundige stelsel en onderskei vier basiese eienskappe.

> "There are *undefined terms, definitions, assumptions* (postulates) and *theorems*."

Formasie- en deduksiereëls in 'n formele wiskundige stelsel moet streng formeel toegepas word, sonder om moontlike betekenis in ag te neem. Afleidings kan ook gemaak word aan die hand van duidelike deduksiereëls. Absolute strengheid in bewys is essensieel in 'n formele stelsel.

Tarski (1969 : 75) merk die volgende op:

> "An axiomatic theory whose language has been formalized and for which the notion of a formal proof has been supplied is called a formalized theory."

'n Stelsel met sodanige formele reëls word 'n wiskundige stelsel genoem. Dit staan ook bekend as 'n sintaktiese stelsel, omdat dit onafhanklik is van benoeming in teenstelling met 'n semantiese stelsel, waarin betekenis 'n rol speel. Die taal waarin so 'n wiskundige stelsel beskryf word, word 'n metataal genoem, terwyl na die wiskundige stelsel slegs verwys word as die objektaal. Alhoewel die metataal gesimboliseer mag word of nie, moet dit name bevat vir die simbole en uitdrukkings van die objektaal.

2.10.1 Primitiewe simbole

Die primitiewe simbole van 'n formele wiskundige stelsel kan op verskillende maniere voorgestel word. As hulle 'n eindige aantal is, kan hulle eenvoudig gelys word. Indien daar oneindig veel simbole is, kan simbole van die metataal gebruik word om simbole of uitdrukkings van die wiskundige stelsel te benoem. Dit is nie nodig dat enige spesifieke simbole vermeld moet word nie. Klasse van simbole moet egter geskep word, omdat die reëls van die wiskundige stelsel, dit is, die aksiomas en die reëls vir 'n bewys, op klasse van simbole berus.

2.10.2 Formasiereëls

Enige eindige ry van simbole in 'n gegewe wiskundige stelsel word 'n uitdrukking genoem. Formasiereëls bepaal sintakties welke uitdrukkings wat uit die primitiewe simbole geskep word, goedgevormde uitdrukkings, formules of sinne van die stelsel is. In 'n nie-formele stelsel, sal goedgevormde formules en sinne herken kan word aan hulle betekenis, wat nie altyd 'n betroubare faktor vir goedgevormdheid is nie.

Hierdie reëls is natuurlik in die metataal uitgedruk. 'n Atomiese formule is 'n formule wat nie formules as egte deel van homself bevat nie. Molekulêre formules is formules wat in terme van die atomiese formules en primitiewe simbole gedefinieer is.

2.10.3 Aksiomas

Morash (1987 : 149) beskryf 'n aksioma as 'n bewering wat as waar aanvaar word. Hamilton (1990 : 29) merk die volgende op:

> "The axioms "..." are the least obvious part of the system", "... if they are regarded as statement form, they are all tautologies. The axioms must be there to give a basis that we can deduce from."

2.10.4 Deduksiereëls

Volgens Labuschagne (1977 : 24) bepaal deduksiereëls hoe van bekende feite na nuwe feite geredeneer word. In hoofstukke 4 en 5 sal daar meer gesê word oor hierdie reëls.

2.11 Die onderrig van aksiomatiese stelsels

Berard (1992 : 265-277) het sedert 1972 navorsing by King's College in die V.S.A. gedoen oor die onderrig van klein aksiomatiese stelsels. Logika is op 'n informele wyse op klein aksiomatiese stelsels toegepas. Berard het 'n kursus, "Foundations of Mathematics", aan studente in hulle eerste jaar van onderrig aangebied. Die kursus is in drie dele verdeel, naamlik

- logika
- versamelingsteorie, en
- aksiomatiese stelsels.

Hierdie kursus het oor die jare heen ontwikkel tot 'n verpligte eerste semesterkursus vir wiskunde- en rekenaarwetenskapstudente. Die doel was om studente se vermoë om 'n abstrakte stelsel te analiseer, te ontwikkel, en om studente te onderrig om formele argumente en bewyse uit te skryf. Nadat die nodige logika afgehandel en toegepas is

op die versamelingsteorie, word die studente in groepe verdeel, en onderwerp aan aksiomatiese stelsels.

Die terminologie van aksiomatiese stelsels, naamlik definisies, primitiewe simbole, postulate, aksiomas, stellings, lemmas en gevolgtrekkings was oor die algemeen bekend aan studente. Die volgende vier stappe is daarna vir die ontwikkeling van 'n aksiomatiese stelsel beklemtoon:

- Primitiewe terme of ongedefinieerde terme soos byvoorbeeld element, versameling, punt, lyn, ensovoorts, is in die stelsel opgeneem.

- Alle ander terme word in terme van die primitiewe terme gedefinieer. Hierdie terme word definisies genoem.

- Die stelsel moet 'n versameling proposisies oor die primitiewe terme bevat wat nie bewys kan word nie, maar as waar aanvaar word. Dit staan as die aksiomas, postulate of die veronderstellings van die stelsel bekend.

- Alle ander proposisies oor die primitiewe terme word op 'n logiese wyse uit die aksiomas afgelei. Dit staan as die stellings, lemmas of gevolgtrekkings van die stelsel bekend.

Berard beskryf drie klein aksiomatiese stelsels wat deur die studente ontwikkel is. Aan die einde van die kursus was die response van die studente op die volgende drie vrae kenmerkend.

Was die gebruik van klein aksiomatiese stelsels om stellings te bewys beter as 'n lesing of 'n ander formaat?

* As ek op my eie sou gewerk het, sou dit my langer geneem het.
* Dit het goed gewerk.
* Ja, in klein groepies was ek nie huiwerig om vrae te vra nie.
* Ja, want verskillende persone het verskillende denkpatrone wat die probleem van alle kante benader.

Het die gebruik van aksiomatiese stelsels enigsins bygedra tot die benadering en aanleer van bewyse?

* Die gebruik van die aksiomatiese stelsels het my beslis gehelp om my denke te orden. Bewyse is nou makliker.
* Die aksiomatiese stelsels dwing jou om oor probleme te dink. Dit dwing 'n persoon om logies te dink en tyd te neem om die probleme op te los.
* Die aksiomatiese stelsel gee 'n persoon 'n idee hoe 'n bewys behoort te lyk. Die modelle was maklik om te verstaan, en het my gehelp om 'n probleem aan te pak.
* Dit is maklik om met aksiomatiese stelsels te werk. Dit is uitdagend. Dit is lonend om logiese bewyse te skep en te sien hoe die stelsel as 'n geheel funksioneer.
* Aksiomatiese stelsels leer my om logies te dink en sinne weldeurdag te lees.

Dink jy dat die ontwikkeling van jou eie aksiomatiese stelsel 'n handige projek is?

* Ja, dit laat my dink oor die betekenis van woorde en die verwantskappe wat daar bestaan.
* Ja, dit help my om ander aksiomatiese stelsels beter te verstaan. Ek voel ook dat ek presteer het deur my eie stelsel te skep.
* Dit was moeilik, maar ek voel dat ek iets bereik het.
* Ja, ek het inderdaad iets geleer.
* Ja, die projek was nuttig aangesien dit my geleer het om iets uit niks te skep.

2.12 Konsistensie

Die probleme wat die meeste aandag in die konstruksie van 'n wiskundige stelsel gekry het, was dié wat gehandel het oor konsistensie, onafhanklikheid en volledigheid. Dit is die algemene kriteria wat toepaslik is op alle aksiomatiese stelsels. Die probleem was om effektiewe metodes te vind om aan te toon dat 'n wiskundige stelsel al drie hierdie kriteria bevredig.

Labuschagne (1977 : 33) definieer 'n stelsel inkonsistent as en slegs as daar 'n formule X bestaan sodat beide X en ~X stellings in die stelsel is. 'n Stelsel is konsistent as dit nie inkonsistent is nie. In hierdie verband word ook na afdeling 2.9 verwys. Deur 'n

teenstrydigheid af te lei, bewys dit dat 'n stelsel inkonsistent is, maar as daar nie 'n teenstrydigheid afgelei is nie, beteken dit nie dat die stelsel konsistent is nie. Nietemin word 'n sintaktiese stelsel dikwels konsistent bewys deur aan te toon dat dit ekwivalent is aan 'n semantiese stelsel (model) indien dit bekend is dat laasgenoemde stelsel konsistent is.

Indien die konsistensie van 'n wiskundige stelsel afhanklik is van die konsistensie van 'n ander stelsel, is eersgenoemde stelsel volgens Labuschagne (1877 : 47) relatief konsistent. Die konsistensie van die Riemann-meetkunde is byvoorbeeld afhanklik van die konsistensie van die Euklidiese meetkunde.

Volgens Kriel (1990 : 89) kan kombinatoriese metodes in sekere gevalle gebruik word om aan te toon dat 'n gegewe stelsel konsistent is. In ander gevalle word van die direkte metode gebruik gemaak deur 'n perseptuele model van die teorie op te stel. Dit behels die volgende:

(i) die objekte van die teorie word met konkrete objekte geïdentifiseer,

(ii) die postulate word met eksakte beskrywings van die onderlinge verwantskap van die objekte geïdentifiseer, en

(iii) daar word vervolgens aangetoon dat daar geen teenstrydige afleidings is nie.

Die probleem is egter dat wiskunde wemel van konsepte soos aktuele oneindighede wat nie met perseptuele objekte geïdentifiseer kan word nie. Gevolglik is die gebruik van hierdie metode beperk.

2.13 Onafhanklikheid

Volgens Labuschagne, (1977 : 42) is 'n versameling van aksiomas onafhanklik as geen een van die aksiomas uit die oorblywende aksiomas afgelei kan word nie. Dit is handig en wiskundig esteties om die minimum getal aksiomas wat nodig vir die konstruksie van 'n wiskundige stelsel is, te spesifiseer.

Om te bepaal of 'n aksioma in 'n versameling van aksiomas, afhanklik van die ander aksiomas in daardie versameling is, word 'n afleiding (bewys) van daardie aksioma uit die ander gekonstrueer. Die feit dat 'n aksioma nog nie uit die oorblywende aksiomas afgelei is nie, beteken egter nie dat dit onafhanklik is nie.

Om die onafhanklikheid van 'n aksioma te bewys, vereis soortgelyke metodes as die bewys vir konsistensie. Onafhanklikheid kan bevestig word met behulp van toepaslike modelle. Veronderstel T = {P, Q, R} is 'n versameling van drie aksiomas P, Q en R. Die aksioma P is onafhanklik van Q en R as twee modelle gevind kan word waar in die een model P, Q en R almal waar is, terwyl in die ander model, Q en R waar en P onwaar is. Dus, P is onafhanklik van Q en R as beide die twee versamelings {P, Q, R} en {~P, Q, R} konsistent is. Dit is die metode waarop die onafhanklikheid van Euklides se vyf postulate aanvanklik bewys is. Soos reeds opgemerk is, is die nie-Euklidiese meetkundes ontwikkel nadat die vyfde postulaat as onwaar beskou is. Deur 'n ander postulaat oor parallelle lyne te aanvaar, terwyl die ander vier behou is, is verskeie nie-Euklidiese meetkundes geskep.

Hierdie nuwe meetkundes is konsistent, of ten minste so konsistent soos dié van Euklides. Dus is twee modelle om die onafhanklikheid van die vyfde postulaat te bewys, beskikbaar, naamlik die Euklidiese meetkunde, en enige van die ander nie-Euklidiese meetkundes.

2.14 Volledigheid

Labuschagne (1977 : 42) noem 'n wiskundige stelsel volledig as vir enige sin X, óf X óf ~X 'n element van die stelsel is. Dit is vir wiskundiges en logisiste belangrik om te weet of 'n wiskundige stelsel volledig is. Die uitsluitlike doel is om 'n wiskundige of logiese stelsel 'n struktuur te gee waarin al die ware formules (stellings) afleibaar van 'n enkele versameling van aksiomas is.

Ten spyte van die feit dat die verskillende skole van denkrigtings verskil oor die waarde van die aksiomatiese stelsels en die aanvaarbaarheid van spesifieke aksiomas en reëls vir afleiding, is die begrip van eksplisiete aksiomas en deduktiewe afleiding vir elkeen aanvaarbaar.

2.15 Logisisme

Logisisme is die beskouing dat wiskunde 'n deel van logika is. Volgens Hanna (1983 : 43) is die doelwitte van die logisiste om begrippe en stellings te produseer in terme van logiese simbole en aksiomatiese stelsels, gebaseer op begrippe en aksiomas van logika.

Goodman (1979 : 546) merk die volgende op:

> "Hence the logicist thesis that mathematics is merely logic."

Die antwoord op die vraag wat die logisistiese stelsel behels, word deur Kriel (1990 : 99) soos volg saamgevat:

> "Wiskunde kan afgelei word van, en is 'n uitbreiding van logika."

Russell en Whitehead is die bekendste eksponente van die logisistiese benadering. In hulle klassieke werk, *Principia Mathematica* wat in 1910–1913 gepubliseer is, het hulle die logisistiese stelsel bekend gestel. Hulle het egter bekende voorlopers gehad in die persone van Dedekind, Frege en Peano. Frege het die eerste volume van sy *Grund-gesetze der Arithmetic* gepubliseer waarin hy dit stel dat rekenkunde 'n deel van logika is.

Goodman (1979 : 546) maak die volgende bewering:

> "What the logicist denies is that there is any subject matter for mathematical truths to be about."

Grondliggend in die logisisme is om altyd te ontken dat wiskundige bewerings feitelike inhoud bevat, dit is, om te ontken dat waarheid op iets buite die struktuur berus. Die logisistiese stelsel impliseer dat wiskunde, soos die logika waarvan dit deel is, uit toutologieë bestaan, dit is, proposisies wat waar is, afgesien daarvan of die individuele komponente daarvan waar of onwaar is. Dus maak wiskunde geen bewerings oor die fisiese wêreld nie.

Volgens die logisiste kan slegs die suiwer logiese aard van wiskunde aangetoon word. Selfs hierdie taak is nie eenvoudig nie. Dit sal onder andere nie verbaas as talle van die bestaande wiskundige begrippe onduidelik uit die oogpunt van die logika is nie, aangesien hulle nie aanvanklik as logiese entiteite opgeneem is nie. Om die logiese stelsel te bewys, sal hierdie begrippe duidelik omskryf of gedefinieer moet word.

'n Bykomende probleem is dat gevind kan word dat bestaande wiskundige begrippe, of stellings, nie gedefinieer, of bewys is binne 'n bestaande logiese stelsel nie. In hierdie geval sal logisiste óf begrippe moet skep, en stellings moet bewys wat parallel aan die tradisioneles is, of die aksiomatiese stelsel moet opgradeer deur die byvoeging van nuwe primitiewe terme of formules.

Hanna (1983 : 44) maak die volgende opmerking in hierdie verband:

> "For this reason, it is less potentially misleading to say that this particular mathematics is part of this particular logic than to say simply that mathematics is part of logic. Certainly in the logicist thesis 'mathematics' refers to what is usually regarded as mathematics and 'logic' to a logic which embodies the traditional logical principles."

Daar kan derhalwe losweg gesê word dat tradisionele wiskunde 'n deel van tradisionele logika is.

Volgens Goodman (1979 : 547) het die begeerte om wiskunde as "logika" te beskou, 'n stukrag gegee om basiese wiskundige begrippe te vereenvoudig en te verenig, en om die fundamentele beginsels te grondves. Logisisme maak huidig nog steeds sodanige bydraes. Goodman (1979 : 547) merk op:

> "Much of mathematics really is just logic. We reason from clearly formulated premises, trying to find an argument that settles some previously formulated question."

Goodman (1979 : 547) bespreek die status van die aksiomas uit die oogpunt van die logisiste. 'n Beginsel wat nie 'n logiese waarheid is nie en ook nie afgelei is van

voorafgaande aanvaarde beginsels nie, word nie slegs deur redenering aanvaar nie. Logisiste ontken derhalwe dikwels die bestaan van sodanige beginsels. Hulle is dus geneig om meetkunde as 'n hipotetiese dissipline te beskou. As die fisiese ruimte die aksiomas bevredig, dan bevredig dit die stellings.

2.15.1 Kritiek op die logisisme

Kriel (1990 : 109) merk op dat talle wiskundiges twyfel of Frege, Russell en Whitehead se pogings 'n uitbreiding van logika is. Hulle doelwit was om wiskunde te reduseer tot uitsprake waarvan die waarheid afhanklik is van logiese wette. Die begrippe toutologie en universeel geldige formule was egter nie altyd duidelik afgebaken soos tans die geval is nie. Derhalwe het hulle nie daarin geslaag om die wiskunde te reduseer tot toutologië en universeel geldige formules in die hedendaagse betekenis van die terme nie. Hulle was onder andere verplig om 'n aksioma in te voer wat die bestaan van 'n versameling met oneindig veel elemente erken. Hierdie aksioma is in sy geformaliseerde vorm, nie 'n toutologie nie.

Goodman (1979 : 548) maak die volgende opsomming:

> "Mathematical intuition is practically real. It is only comprehensible as a non-deductive insight into structures external to the mathematics itself. Hence such external mathematical structures are practically real. But it is essential to logicism that it denies the objective reality of any such structure. Therefore, by the principle of objectivity, logicism cannot be an adequate philosophy of mathematics."

Logisiste definieer begrippe soos limiet, kontinuïteit en konvergensie in suiwer logiese terme. Om die logisistiese stelsel te grondves, was dit ook nodig om aan te toon dat elke wiskundige stelling afgelei kan word vanaf die aksiomas van die logika, deur slegs van die deduksiereëls wat deur die logika voorgeskryf word, gebruik te maak. Dit was egter nie moontlik nie.

Russell en Whitehead het inderdaad gevind dat om al die stellings van die klassieke wiskunde af te lei, dit nodig sou wees om nog twee aksiomas as vertrekpunt te neem.

Hierdie twee aksiomas was nie deel van hulle oorspronklike stelsel nie, en ook nie bevat in die klassieke logika nie. Hierdie twee aksiomas was onderskeidelik die oneindigheidsaksioma en die keuseaksioma.

Volgens die oneindigheidsaksioma is daar vir elke natuurlike getal n, 'n natuurlike getal n + 1. Die keuseaksioma beweer dat vir elke versameling van nie-leë disjunkte versamelings, daar 'n versameling bestaan wat presies een element van elk van hierdie disjunkte versamelings, as elemente het. Die byvoeging van hierdie twee aksiomas, was 'n aanpassing van die oorspronklike logisistiese tesis. Hierdie probleem is gesystap deur die wiskundige stellings wat op hierdie aksiomas berus het, as voorwaardelike formules te aanvaar. 'n Wiskundige stelling X wat die oneindigheidsaksioma nodig gehad het, het die volgende stelling geword: As die oneindigheidsaksioma, dan X.

Op hierdie wyse het hierdie aksiomas slegs hipoteses geword, en is gebruik wanneer dit nodig was.

2.15.2 Eienskappe van die logisistiese stelsel

Vrae oor onafhanklikheid, konsistensie en volledigheid van die logisistiese stelsel kom onvermydelik na vore. Die onafhanklikheid van Russell se oorspronklike aksiomas is bo verdenking. Russell kon egter nie 'n antwoord oor konsistensie en volledigheid van die logisistiese stelsel verskaf nie.

2.16 Formalisme

Formalisme is voorafgegaan deur die logisisme, en laasgenoemde het ook 'n sterk invloed gehad op die formalistiese denkrigting. Formalisme het 'n sterk affiniteit met logisisme. Wat die formalisme van die logisisme onderskei is die feit dat logisiste wiskunde as 'n deel van logika beskou. Die logisiste se primêre doel is om met 'n aksiomatiese stelsel te werk wat op aksiomas van logika gebaseer is.

Volgens Eves (1965 : 304) is formalisme gemoeid met formele simboliese stelsels. Wiskunde word inderdaad beskou as 'n klas van abstrakte ontwikkelings, waar die terme slegs simbole en die bewerings formules is wat hierdie simbole betrek. Die fundamentele

basis van wiskunde is nie logika nie, maar simbole sonder enige betekenis, en 'n versameling operasies. Om dit meer konkreet te stel kan die fundamentele stelling uit die rekenkunde beskou word. Hierdie stelling beweer dat vir enige gegewe positiewe heelgetal a, daar eenduidige nie-negatiewe heelgetalle a_1, a_2, a_3, ..., eindig in aantal, bestaan só dat $a = 2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}$ ..., waar 2, 3, 5, ... opeenvolgende priemgetalle is. (Eves 1976 : 128). Eenvoudiger gestel, kan gesê word dat enige nie-negatiewe heelgetal op 'n eenduidige wyse geskryf kan word as die produk van priemgetalle.

Volgens 'n streng formalis het so 'n stelling geen inhoud nie. Die stelling is slegs 'n string van simbole. Die stelling maak geen bewering oor natuurlike getalle nie, aangesien sulke objekte volgens die formalis glad nie bestaan nie. Lolli (1983 : 16) beskou formaliste as daardie wiskundiges wat op 'n handige, formele wyse 'n gegewe probleem benader, en dan met 'n algoritme oplos.

Formalisme as 'n georganiseerde benadering tot die rekonstruksie van wiskunde, was 'n gevolg van die krisis wat veroorsaak is deur die teenstrydighede wat na vore gekom het in die versamelingsteorie. Hierdie beskouing word gedeel deur Ackermann, Bernays en von Neumann, asook die streng formalis, Haskell Curry.

Hilbert was oortuig dat die teenstrydighede in die versamelingsteorie die gevolg was van 'n gebrek aan presiese definiëring van die basiese begrippe van wiskunde asook 'n gebrek aan strengheid in die deduksie van bewyse. Die doel van Hilbert se program was om aan te toon dat versamelingsteorie, en inderdaad elke tak van die wiskunde, deur die toepassing van voldoende strenge metodes, gekonstrueer kan word as 'n konsistente en volledige aksiomatiese stelsel. In teenstelling met Russell, was dit nie Hilbert se doel om wiskunde vanaf logiese begrippe en aksiomas af te lei nie. Hy het inderdaad die basiese begrippe van wiskunde, soos byvoorbeeld die begrip van getal, intuïtief aanvaar, en geen sin daarin gesien om dit in terme van die aksiomatiese versamelingsteorie te definieer nie. Luchins en Luchins (Hanna 1983 : 48) maak die volgende bewering:

> "Rather than seek to reduce mathematics to logic, formalism treats mathematics and logic concurrently, attempting to axiomatize, symbolize, and formalize each, and to study the property of the total formal system, including the logical axioms and the other axioms."

Om Hilbert se program uit te voer, was dit nodig om nie-formele teorieë van klassieke wiskunde, om te sit na suiwer formele strukture waar die betekenis van simbole geheel en al geëlimineer word. As so 'n taak volvoer is, kan die deduksiereëls in daardie stelsel gebruik word om nuwe stellings te genereer. So 'n stelling is natuurlik niks anders as 'n string simbole nie. Die betekenis van so 'n stelling in die formele stelsel kan altyd weer verkry word deur terug te verwys na die nie-formele wiskundige stelsel wat gebruik is om die formele wiskundige stelsel te konstrueer. Daar is altyd 'n een-tot-een ooreenkoms tussen die simbole en formules van 'n nie-formele wiskundige stelsel en sy formele eweknie.

Hanna (1983 : 49-50) bespreek die eienskappe van 'n aksiomatiese struktuur, soos byvoorbeeld konsistensie en volledigheid. Hierdie eienskappe kan nie in die taal van die aksiomatiese stelsel ondersoek word nie. 'n Metateorie of metawiskunde, wat nie geformaliseer is nie, was hiervoor nodig. Die primêre doel van die metataal in Hilbert se program was om hierdie eienskappe te bevestig.

Aangesien sommige wiskundige stellings oor oneindige versamelings handel, kan so 'n stelling nie noodwendig bewys word nie. 'n Metawiskundige ondersoek na die eienskappe van 'n formele wiskundige stelsel werk met eindige bewyse, wat na die stelling lei. Dus verskuif die formalisering van wiskunde, en die onderskeiding tussen die objektaal en metataal, die ondersoeke ten opsigte van konsistensie en volledigheid, vanaf 'n oneindige gebied na 'n eindige gebied.

2.16.1 Die formalisme en konsistensie

Volgens Eves (1965 : 304–305) het die formalistiese denkskool tot stand gekom na Hilbert se postulatestudie oor meetkunde. Hilbert het die aksiomatiese metodes van Euklides verfyn tot die hedendaagse formele aksiomatiese stelsels. Die formalistiese stelsel is later deur Hilbert ontwikkel om enersyds die "krisis" van die versamelingsteorie die hoof te bied, en andersyds die kritiek teen die klassieke wiskunde deur die intuïsioniste te weerlê.

Alhoewel Hilbert reeds so vroeg as 1904 met formalistiese terme gewerk het, het hy en sy medewerkers, Bernays, Ackermann, von Neumann en andere, eers in 1920 ernstig aan

die formalistiese program begin werk. Die ontwikkeling van 'n direkte bewys vir konsistensie in wiskunde is deur Hilbert "bewysteorie" genoem. Hilbert en Bernays het beplan om 'n volledige uiteensetting van die bewysteorie in hulle *Grundlagen der Mathematik* te gee. Die *Grundlagen der Mathematik* kan beskou word as die "*Principia Mathematica*" van die formalistiese skool, en het ook toepassings tot alle klassieke wiskunde ten doel gehad.

Die werk is in twee volumes gepubliseer, Volume I in 1934 en Volume II in 1939. Onvoorsiene probleme het egter verhoed dat die bewysteorie voltooi kon word. Vir sekere elementêre stelsels is bewyse vir konsistensie tog uitgevoer.

Die sukses al dan nie van Hilbert se program om die klassieke wiskunde te regverdig het van konsistensie afgehang. Vryheid van teenstrydighede word slegs deur konsistensiebewyse gewaarborg, en die ouer konsistensiebewyse wat op interpretasies en modelle gebaseer is, het gewoonlik slegs die vraag oor konsistensie van een domein van die wiskunde na 'n ander verskuif. Dit beteken dat 'n konsistensiebewys met behulp van modelle slegs relatief is. Hilbert het derhalwe 'n nuwe benadering ten opsigte van konsistensie gevolg. Hilbert het gehoop om met behulp van 'n geskikte versameling van reëls van prosedure, aanvaarbare formules uit die basiese simbole te verkry wat vry van teenstrydighede sal wees. Vir wiskunde as geheel, kon die probleem oor konsistensie egter nie bevredigend opgelos word nie.

Die Hilbert-program was inderdaad gedoem tot mislukking. Gödel het in 1931, voor die publikasie van die *Grundlagen*, met onweerlegbare metodes bewys dat dit nie moontlik is om 'n voldoende ryk genoeg geformaliseerde deduktiewe stelsel, soos dié van Hilbert, te ontwikkel om konsistensie van die stelsel, met metodes wat tot die stelsel behoort, te bewys nie.

Gödel se stellings het 'n onvoorsiene beperking in die formalistiese stelsel blootgelê. Hierdie stellings het aangetoon dat die formele stelsels wat as betroubaar vir die afleiding van wiskundige bewerings beskou is, leemtes het in dié sin dat konsistensie van die stelsels nie deur eindige metodes wat binne die stelsel geformaliseer is, bewys kan word nie.

2.16.2 Die formalisme en volledigheid

Hilbert het gehoop om deur die formaliseringsproses, volledigheid van 'n moderne aksiomatiese stelsel aan te toon. Dit vereis 'n prosedure om aan te toon dat alle stellings, onderhewig aan die deduksiereëls, van die aksiomas afleibaar is. So 'n afleiding moet in 'n eindige aantal stappe geskied. Hierdie tipe prosedure betrek die einskappe van die formele stelsel, en is dus nie deel van die stelsel self nie, maar eerder van die metataal.

Gödel het egter aangetoon dat enige aksiomatiese stelsel wat die elementêre getalleteorie omvat nie volledig is nie. Dit beteken dat in so 'n aksiomatiese stelsel, daar altyd stellings sal wees wat nie bewys kan word nie.

2.16.3 Kritiek op die formalisme

Kriel (1990 : 95−96) merk op dat Gödel in 1931 'n artikel gepubliseer het waarin hy twee stellings bewys het. Die eerste stelling lui soos volg:

In enige konsistente formele stelsel L met 'n rekursiewe versameling aksiomas wat die elementêre rekenkunde van natuurlike getalle omvat, is daar proposisies in L wat nie bewys kan word nie, en waarvan die ontkenning, ook nie bewys kan word nie.

Dit beteken dus dat as 'n aksiomatiese stelsel wat die elementêre rekenkunde omvat, konsistent is, dan is daar sinne wat onbeslisbaar is. Gödel het verder aangetoon dat as selfs hierdie onbeslisbare sinne by die versameling van aksiomas gevoeg word, sal die nuwe versameling van aksiomas 'n wiskundige stelsel skep wat steeds sinne sal bevat wat onbeslisbaar is.

Die tweede stelling van Gödel lui soos volg:

In enige konsistente formele stelsel L met 'n rekursiewe versameling van aksiomas, wat die elementêre rekenkunde omvat, kan die konsistensie van L nie in L self bewys word nie.

Dit het Hilbert se ideaal om die wiskunde as 'n konsistente stelsel te bewys, vernietig. Hilbert het gepoog om 'n kunsmatige taal daar te stel waarin geldige bewyse meganies uitgevoer kan word. Gödel bet egter aangetoon dat daar geen volmaakte taal bestaan nie.

2.17 Intuïsionisme

Goodman (1979 : 544) merk op dat as formalisme verwerp word omrede dit die intuïtiewe inhoud van wiskunde misken, dan is dit nodig om die filosofie van wiskunde weer eens in beskouing te neem.

Eves (1965 : 302 - 303) beskryf die intuïsionistiese stelsel deur te sê dat wiskunde deur eindige konstruktiewe metodes op die intuïtief gegewe ry van natuurlike getalle opgebou is. Volgens hierdie siening bestaan daar by die basis van wiskunde 'n diepliggende intuïsie, wat die mens toelaat om 'n enkele objek voor te stel, dan nog een, ensovoorts. Op hierdie wyse word 'n oneindige ry verkry, wat ooreenstem met die ry van natuurlike getalle. Uit hierdie intuïtiewe basis van die ry van natuurlike getalle, word enige ander wiskundige objek op 'n suiwer konstruktiewe wyse, in 'n eindige aantal stappe of operasies opgebou.

Brouwer, (1881 - 1966) en Arend Heyting (1898 - 1980) was die leidende figure van die intuïsionisme. Hulle siening was dat wiskunde en wiskundetaal twee aparte entiteite is. Wiskunde is as 'n taallose aktiwiteit beskryf. Die enigste bron van fundamentele wiskundige kennis, is volgens die intuïsioniste, intuïsie. Dit maak dit moontlik om vanselfsprekende basiese begrippe en proposies te herken, en is voorafgaande tot enige logika.

Wiskundige aktiwiteite bestaan eerder uit introspektiewe konstruksies as aksiomas en stellings. Taal en ander simboliese stelsels word nie gereken as wiskundige gereedskap nie. Die intuïsionis beskou dit eerder as onvoldoende, maar nodige middele om mee te kommunikeer. Intuïsioniste glo dat die metodes en insig van wiskunde, voldoende op sigself is. Dit is nie nodig om jou op formele strengheid of logika te beroep vir regverdiging nie. Formele manipulasie van simbole moet nie die taallose wiskundige aktiwiteit vervang nie.

Geen stelsel kan al die wiskunde bevat nie. Wiskunde is 'n kreatiewe aktiwiteit. Nuwe basiese gedagtes en begrippe kan geskep word wat nie afleibaar van premisse van 'n stelsel is nie. Hierdie siening van Brouwer staan reëlreg teenoor die van Frege, Russell, Whitehead en Hilbert. Brouwer beskou suiwer intuïsie as 'n bron van wiskundige kennis. Die basiese intuïsie is om iets in twee te deel. So kan 'n lyn herhaaldelik in twee gedeel word. Die geheel bestaan uit dele.

Volgens Brouwer is die basiese intuïtiewe medium nie ruimte nie, maar tyd. Kant het suiwer intuïsie van beide tyd en ruimte as die basis van wiskundige kennis beskou. Met die ontdekking van die nie-Euklidiese meetkundes, het Brouwer geglo dat Kant se beskouing dat die intuïsie van ruimte die basis van meetkundige kennis is, 'n fout is. Nogtans stem Brouwer saam dat die intuïsie van tyd die basis van wiskundige kennis in die algemeen en die natuurlike getalle in besonder is.

2.17.1 Konstruktivisme

Die konstruktivistiese beskouing is só 'n belangrike faset van die intuïsionistiese benadering tot wiskunde, dat dikwels na hierdie denkskool verwys word as konstruktivisme.

Troelstra en Van Dalen (1988 : 6) illustreer die verskil tussen 'n konstruktivistiese en nie-konstruktivistiese bewering aan die hand van die volgende elementêre voorbeelde:

(i) Die volgende bewering is aanvaarbaar vir die konstruktiviste:

"Daar bestaan 'n reële getal waarvan die vierkant 2 is."

Die rede is dat $\sqrt{2}$ tot enige graad van akkuraatheid bereken kan word deur 'n geneste ry van intervalle met rasionale endpunte.

(ii) Laat A enige wiskundige bewering wees wat nog nie as waar of onwaar bewys is nie, byvoorbeeld:

A ≡ "Daar is oneindig veel priemtweelinge." ('n Priemtweeling is twee priemgetalle wat met twee verskil, byvoorbeeld 3 en 5, 5 en 7).

Die volgende definisie is vir die meeste wiskundiges toelaatbaar as 'n beskrywing van 'n natuurlike getal p:

$$p = \begin{cases} 1 \text{ as A geld} \\ 2 \text{ andersins.} \end{cases}$$

Dit is egter onaanvaarbaar vir die konstruktiviste. As die waarheid of onwaarheid van A nie bevestig is nie, kan p nie met 1 of 2 geïdentifiseer word nie. Natuurlike getalle word beskou as eenvoudige verstandelike konstruksies. Om Troelstra en Van Dalen (1988 : 6) aan te haal:

> "Start thinking of an abstract unit, think of another unit distinct from the first one and consider the combination ('think them together'). The indefinite repetition of this process generates the collection $\mathbb{N}_0$ of natural numbers."

Uit voorbeeld (ii) is dit nie bekend hoe om p te kry deur met denke "abstrakte eenhede" saam te voeg nie, "... since we do not know whether to stop at one unit or to go on till we have two distinct units." (Troelstra en Van Dalen 1988 : 6).

2.17.2 Interpretasie van logiese operasies

Die perfeksie van wiskundige taal, soos deur die formaliste voorgestaan, is volgens Brouwer, in Heidema (1965 : 14 -15), geen waarborg vir 'n perfekte wiskunde nie. Omdat die interpretasie van 'n wiskundige of logiese taal afhanklik van die metataal met sy dubbelsinnighede is, is dit onmoontlik om denkkonstruksies met 'n essensieel eenduidige wiskundige taal of simboliek weer te gee. Tog kan die taal wel 'n beskeie rol in wiskunde speel, wel nooit as skepper van nuwe wiskundige stelsels nie, maar dan tog as 'n doeltreffende tegniek om wiskundige konstruksies te onthou en aan andere mee te deel. Slegs die werklike *taallose* konstruksie in die gees van die wiskundige is volkome eksak. Daarom is die beoefening van wiskunde in wese 'n individuele saak.

Om wiskundige resultate te onthou en mee te deel, moet van 'n logiese taal gebruik gemaak word. In die logiese taal van die intuïsionisme het die konnektiewe en kwantore egter 'n ander betekenis as in die klassieke logika. Veronderstel U en V is veranderlikes

wat wiskundige proposisies aandui en P 'n veranderlike wat 'n wiskundige predikaat aandui. Rofweg gestel, verwys die predikaat na 'n "eienskap" wat die onderwerp van 'n sin besit. (Kyk afdeling 5.2)

'n Intuïsionistiese negering, ~ U, is waar as en slegs as dit moontlik is om uit die aanname dat daar 'n konstruksie bestaan wat U bewys, 'n teenstrydigheid gekonstrueer kan word. ('n "Teenstrydigheid" is 'n stelling waarvan die onwaarheid intuïtief ingesien kan word, byvoorbeeld die stelling "1 = 2".)

U $\wedge$ V ("U en V") is waar as en slegs as bewyse vir sowel U as V gekonstrueer kan word.

U $\vee$ V ("U of V") is waar as en slegs as daar 'n bewys gekonstrueer kan word vir minstens een van die twee stellings U en V.

U $\Rightarrow$ V ("as U, dan V") is waar as en slegs as daar 'n konstruksie bestaan wat uit elke aangenome bewys van U 'n bewys vir V aflei.

($\exists$x) P(x) ("daar bestaan 'n x só dat P(x) geld.") is waar as en slegs as daar werklik 'n x gekonstrueer kan word waarvoor P(x) geld.

($\forall$x) P(x) ("vir alle x geld P(x)") is waar as en slegs as daar 'n algemene konstruksiemetode bestaan wat deur spesifikasie vir elke spesifieke x_0, 'n bewys vir $P(x_0)$ lewer.

Heidema (1965 : 15-16) wys daarop dat bostaande interpretasie van die logiese konnektiewe en kwantore deur die intuïsioniste, radikaal verskil van die klassieke interpretasie daarvan. In die eerste plek is logika nie meer 'n selfstandige dissipline nie, maar 'n onderdeel van die wiskunde, want elke logiese formule is 'n bewering oor wiskundige entiteite, en wel 'n bewering oor die moontlikheid om 'n sekere wiskundige konstruksie suksesvol uit te voer. Volgens Brouwer is die wiskundige stellings inderdaad presies die sinne van die vorm "'n Konstruksie met eienskappe A, B, C ... is suksesvol in my gees uitgevoer." Elke logiese formule is dus 'n wiskundige stelling. So word byvoorbeeld die toutologie [(U $\Rightarrow$ V) $\wedge$ (V $\Rightarrow$ W)] $\Rightarrow$ (U $\Rightarrow$ W) intuïsionisties geïnterpreteer as die volgende wiskundige stelling:

"As U, V en W wiskundige stellings is, en as daar 'n konstruksie K_1 bestaan wat uit enige bewys van U 'n bewys vir V aflei, en 'n konstruksie K_2 wat uit enige bewys van V 'n bewys vir W aflei, dan kan 'n konstruksie K_3 gevind word wat uit enige bewys vir U 'n bewys vir W aflei." Hierdie stelling kan nie sonder meer aanvaar word nie, en moet bewys word. Die bewys bestaan in die opmerking dat K_3 verkry kan word deur eers K_1 en dan K_2 uit te voer.

In die tweede plek is dit duidelik dat die intuïsionistiese logika 'n deelstelsel van die klassieke logika vorm. Die rede daarvoor is dat die veranderlikes U, V en P, wat in die klassieke logika vir willekeurige proposisies en 'n willekeurige predikaat staan, in die intuïsionistiese logika spesifieke wiskundige proposisies en 'n predikaat verteenwoordig. Verder gee die intuïsioniste ook 'n strenger betekenis aan konnektiewe en kwantore. Elke logiese formule wat intuïsionisties waar is, is klassiek ook waar, maar nie noodwendig omgekeerd nie.

Eves (1965 : 302 – 303) beskryf die siening van die intuïsioniste ten opsigte van sekere logiese begrippe. Om die bestaan van 'n entiteit te bewys, moet aangetoon word dat die entiteit in 'n eindige aantal stappe gekonstrueer kan word. Dit is nie voldoende om aan te toon dat die veronderstelling van die ontkenning van die bestaan van die entiteit tot 'n teenstrydigheid lei nie. Dit beteken dat talle bewyse oor eksistensie, wat in die wiskunde voorkom, nie vir die intuïsioniste aanvaarbaar is nie.

Die aandrang van die intuïsioniste op konstruksieprosedures het verreikende gevolge ten opsigte van die versamelingsteorie. Vir die intuïsionis kan 'n versameling nie beskou word as 'n vooropgestelde kolleksie nie. 'n Versameling moet beskou word as 'n reël waarvolgens die elemente stap vir stap gekonstrueer is. Hierdie begrip van versameling sluit die moontlikheid van "teenstrydige versamelings" uit, soos byvoorbeeld "die versameling van alle versamelings". Nog 'n opvallende gevolg van die intuïsionistiese benadering is die ontkenning van die wet van die uitgeslote derde, $U \vee (\sim U)$

Heidema (1965 : 16) gee 'n voorbeeld van Brouwer om aan te toon dat die wet van die uitgeslote derde, nie 'n wet van die intuïsionistiese wiskunde is nie.

Beskou die desimale ontwikkeling van π, π = 3,1415... Skryf nou die desimale breuk, p = 0,3333... neer, wat afgebreek word sodra daar in π 'n rytjie syfers, 0123456789, voorkom. (Dit is tans onbekend of daar so 'n rytjie in π voorkom, en daar is ook geen metode bekend waarvolgens dit vasgestel kan word nie.) Klassiek is dit nou korrek om te beweer dat $(p = \frac{1}{3}) \vee (p \neq \frac{1}{3})$.

Vir die intuïsionis is dit egter onaanvaarbaar, want dit sou beteken dat een van die twee beweringe " $p = \frac{1}{3}$ " of " $p \neq \frac{1}{3}$ " bewys kan word, dit wil sê, dat beslis kan word of daar in π 'n rytjie 0123456789 voorkom of nie.

Dit is egter duidelik dat as die desimale ontwikkeling van π beperk word tot, sê 'n miljoen plekke na die komma, dan is dit wel moontlik om te beslis of $p = \frac{1}{3}$ of $p \neq \frac{1}{3}$.

Die intuïsionis aanvaar dus die wet van die uitgeslote derde slegs as daar met eindige versamelings gewerk word, en verwerp die wet in die geval van oneindige versamelings. Brouwer het die sosiale ontwikkeling van logika geblameer vir hierdie toestand van sake. Die logiese wette is ontwikkel op 'n tydstip toe die taal eindige versamelings goed kon beskryf. Die mens het hierna gepoog om dieselfde logiese wette op oneindige versamelings van toepassing te maak, wat teenstrydighede laat ontstaan het.

In die *Principia Mathematica* is die wet van die uitgeslote derde en die wet van teenstrydigheid ekwivalent. Vir die intuïsionis is dit nie aanvaarbaar nie. In 1930 het Heyting 'n intuïsionistiese simboliese logika ontwikkel. Die intuïsioniste het dus hulle eie logika ontwikkel, en wiskundige logika word gesien as 'n tak van wiskunde. In die intuïsionistiese program is wiskundige logika byna irrelevant. Dit word slegs as 'n handige kommunikasiemiddel beskou.

Die intuïsioniste het daarin geslaag om, ten spyte van beperkings, 'n groot deel van die hedendaagse wiskunde wat 'n teorie oor die kontinuum en 'n versamelingsteorie insluit, op 'n vaste grondslag op te bou. Tans is die klassieke wiskunde nog merkbaar kragtiger as die intuïsionistiese wiskunde, terwyl laasgenoemde ook veel moeiliker is om te ontwikkel. Die grootste beswaar teen die intuïsionistiese logika is dan ook dat talle gewaardeerde dele van die klassieke wiskunde opgeoffer word. Hierdie situasie mag

egter in die toekoms verander aangesien die moontlikheid van 'n intuïsionistiese rekonstruksie van die klassieke wiskunde bestaan. Ten spyte van al die besware teen die intuïsioniste, word dit egter algemeen aanvaar dat hierdie metodes nie tot teenstrydighede lei nie.

Kriel (1990 : 40) gee 'n paar voorbeelde van stellings en nie-stellings vir die intuïsioniste .

Stellings

(i) $U \Rightarrow \sim\sim U$

(ii) $(U \Rightarrow V) \Rightarrow (\sim V \Rightarrow \sim U)$

(iii) $\sim U \Rightarrow \sim\sim\sim U$ en $\sim\sim\sim U \Rightarrow \sim U$

(iv) $(\forall x)\, P(x) \Rightarrow \sim (\exists x) \sim P(x)$

(v) $(\exists x)\, P(x) \Rightarrow \sim (\forall x) \sim P(x)$

(vi) $(\exists x) \sim P(x) \Rightarrow \sim (\forall x)\, P(x)$

(vii) $(\forall x) \sim\sim P(x) \Rightarrow \sim (\exists x) \sim P(x)$

(viii) $\sim (\exists x) \sim P(x) \Rightarrow (\forall x) \sim\sim P(x)$

Nie-Stellings

(i) $\sim\sim U \Rightarrow U$

(ii) $(\sim V \Rightarrow \sim U) \Rightarrow (U \Rightarrow V)$

(iii) $U \vee \sim U$

(iv) $\sim (U \wedge V) \Rightarrow \sim U \vee \sim V$

(v) $\sim (\exists x) \sim P(x) \Rightarrow (\forall x)\, P(x)$

(vi) $\sim (\forall x) \sim P(x) \Rightarrow (\exists x)\, P(x)$

(vii) $\sim (\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\exists x) \sim P(x)$

2.17.3 Konstruktivistiese bewyse

'n Bewys vir die intuïsionis beteken 'n konstruksie van 'n ry stappe of operasies. Volgens Hanna (1983 : 56-57) is die intuïsionistiese proposisionele teorie gebaseer op elf aksiomas, teenoor vyf van Russell.

Dit is as gevolg van die toenemende getal primitiewe konnektiewe by eersgenoemde. Daarenteen is die deduksiereëls soortgelyk aan die wat in die klassieke proposisionele teorie voorkom, naamlik substitusie en modus ponens.

Die volgende probleem illustreer die verskil tussen 'n konstruktiewe en nie-konstruktiewe bewys.

Bewering: Daar is oneindig veel priemgetalle.

KONSTRUKTIEWE BEWYS	NIE-KONSTRUKTIEWE BEWYS
1 Laat p_1, p_2, ..., p_m enige eindige versameling van priemgetalle wees.	1 Veronderstel die bewering is nie waar nie, met ander woorde, veronderstel daar is slegs eindig veel priemgetalle p_1, p_2, ..., p_m.
2 Beskou die getal $(p_1 \times p_2 \times ... \times p_m)+1$. Hierdie getal is nie deelbaar deur enige van die priemgetalle p_1, p_2, ..., p_m nie. Hierdie getal is dus óf priem, óf deelbaar deur 'n ander priemgetal p.	2 Beskou die getal $(p_1 \times p_2 \times ... \times p_m) + 1$. Hierdie getal is nie deelbaar deur enige van die priemgetalle p_1, p_2, ..., p_m nie. Hierdie getal is dus óf priem óf deelbaar deur 'n ander priemgetal p.
3 In beide gevalle is daar 'n priemgetal wat nie tot die versameling p_1, p_2, ..., p_m hoort nie. Gevolglik is die versameling van priemgetalle oneindig.	3 In beide gevalle is daar 'n priemgetal wat nie tot die versameling p_1, p_2, ..., p_m hoort nie. Dit is teenstrydig met die bewering dat p_1, p_2, ..., p_m die enigste priemgetalle is. Dus volg, met behulp van die wet van die uitgeslote derde, dat die versameling oneindig is.

2.17.4 Kritiek op die intuïsionisme

Volgens Kriel (1990 : 50) is die aantal toegewyde intuïsioniste huidig maar min, en dié wat daar is, verskil nog skerp oor sekere fundamentele sake. Groot dele van die bestaande wiskunde word deur hulle as ongeldig beskou, en dit skrik die meeste wiskundiges af.

Snapper (1979 : 556) beweer dit is filosofies foutief om waarheid en onwaarheid op die intuïsionistiese wyse te definieer. Goodman (1979 : 546) onderskraag hierdie sienswyse:

"That is to say, a rigorous argument is always an argument which suffices to establish the truth of its conclusion. As our insight grows, we see that more is required to establish truth, and therefore arguments that once seemed rigorous are now seen to have gaps."

Hy gaan voort:

"Now I may formulate my argument against intuitionism as follows. Mathematical truth is practically real. Indeed, without the practical reality of mathematical truth, there would be no such thing as mathematical rigor. But it is of the essence of intuitionism that it denies the objective reality of mathematical truth. Therefore, by the principle of objectivity, intuitionism cannot be an adequate philosophy of mathematics."

Die meeste kritiek teen intuïsionisme was gerig op sy filosofie van wiskunde. Popper (1972) in Hanna (1983 : 58) het intuïsie gesien as 'n produk van die kulturele ontwikkeling en verandering in sienswyse van die wêreld. Volgens Popper neem intuïsionisme nie die "gee en ontvang" tussen konstruksie en intuïsie in ag nie.

2.18 Ander filosofiese ontwikkelings

Lolli (1983 : 17-18) beweer dat die drie grondliggende denkskole geleidelik oorgeloop het in rigtings wat nou verwant aan hulle opvattinge is. Logisisme het saamgevloei met 'n stroom wat bekend staan as wiskundige *Platonisme of realisme*, waarvan Gödel 'n prominente volgeling was.

Intuïsionisme het homself in lyn gebring met konseptualisme of die Kantiaanse filosofie. In 1939 het Carnap Hilbert se voorstelling van formalisme gewysig na 'n vorm van formalisme wat niks met Hilbert se program te doen gehad het nie.

Lolli (1983 : 18) gaan voort en skryf:

"However, a curious phenomenon takes place: the three schools of the foundations, or of the philosophy of mathematics as they are again called, throw

onto the scales the weight of a painstakingly acquired prestige and of their roots in the spontaneous meditation of the mathematical community, and actually continue to hold a monopoly over the possible alternatives open to the philosophic choices of the mathematicians. Platonism, intuitionism and formalism exhaust the limited range of possible choices in the philosophy of mathematics. Through private and personal choices the mathematicians distribute themselves into one of the three pigeonholes, or in a fourth one of agnosticism, accepting the limited number of alternatives either because no voice with an original thought is to be heard, or because it does not matter, being once again up to the philosophers to shed some light on the issue."

2.19 Platonisme

Goodman (1979 : 548) verwerp logisisme as 'n onvolledige filosofie van wiskunde omrede dit die objekte met betrekking tot wiskunde ignoreer. Hy beskryf Platonisme as 'n vierde poging tot die filosofie van wiskunde soos volg:

"Mathematics consists of truths about abstact structures existing independently of us, of the logical arguments that establish those truths, of the constructions underlining those arguments, of the formal manipulation of symbols that express those arguments and truths, and of nothing else."

Volgens Goodman (1979 : 548) was Kurt Gödel die bekendste voorstander van Platonisme. Goodman (1979 : 548) skryf dat 'n Platonis die fundamentele stelling van rekenkunde letterlik interpreteer. Vir die Platonis bestaan die natuurlike getalle onafhanklik van die mens, en dit is 'n feit dat almal in priemfaktore ontbind kan word. Volgens Goodman (1979 : 548) ontken formalisme, intuïsionisme en logisisme dat wiskundige teorieë semantiese inhoud bevat. Die sentrale probleem van modelteorie is die vraag welke eienskappe van strukture uitgedruk kan word in spesifieke tale. Hierdie vraag kom slegs na vore as strukture veronderstel is om te bestaan, en eienskappe besit wat onafhanklik van hulle beskrywing is.

Goodman (1979 : 548) gaan voort en beskryf die wiskundige aktiwiteite van Platonisme soos volg:

Die Platonis word aanvanklik, voor die wiskundige aktiwiteite, gekonfronteer met 'n wye verskeidenheid van abstrakte strukture. Hy skep nie hierdie strukture nie, maar ontdek hulle. In sy opleiding, en daarna as sy kundigheid ontwikkel, vervorm en verfyn hy hierdie strukture deur intuïsie. Hy sal noodwendig meer insig in sommige strukture as ander hê. Sy intuïsie word gevorm deur die waarhede ten opsigte van die wiskundige wêreld wat deur sy voorgangers en kollegas ontdek is. Daarna stel sy intuïsie hom in staat om nuwe strukture te vind, en om nuwe bewerings oor die reeds bekende strukture te maak.

In die proses om hierdie bewerings te verifieer, voer hy konstruksies uit, skep argumente, en definieer nuwe begrippe. Hierdie konstruksies word in gewone wiskundige taal ondersteun deur berekeninge, en word streng en formeel gestel. Derhalwe word dit toeganklik vir wiskundiges gemaak, en word deel van die groter sosiale dialek waardeur wiskunde ontwikkel.

Volgens Goodman (1979 : 549) was wiskunde in die agtiende eeu as 'n wetenskap onderskei van die wetenskappe in dié sin dat dit meer fundamenteel en seker was. Die krag van wiskunde was gesetel in die beheer van ruimte en kwantiteit. Gedurende die negentiende eeu was hierdie beskouing oor die aard van wiskunde sterk ondermyn. Eerstens is die nie-Euklidiese meetkundes gebruik om die bestaan van 'n unieke intuïsionistiese ruimtelike struktuur te ontken. Tweedens was die analitiese meetkunde gebruik om die beskouing te verwerf dat daar 'n intuïsie vir ruimte is.

Goodman (1979 : 549) maak die volgende gevolgtrekking:

> "The end product of this development is the contemporary mathematician who tells his undergraduate students that by three-dimensional Euclidean space he *means* the set of all ordered triples of real numbers. Obviously, that is not what Euclid meant. Toward the end of the nineteenth century, even the intuitive conception of quantity or magnitude was replaced, at least officially, by the purely conceptual structures introduced by Weierstrass, Dedekind and Cantor. Again, a contemporary mathematician is likely to tell his students that by a real number he means a Dedekind cut. Obviously, that is not what Euler meant. "

Volgens Goodman (1979 : 549) was een effek van hierdie veranderinge die skep van 'n situasie waarin wiskundiges verkeer het, in dié sin dat hulle nie die aard van die strukture waarmee hulle gewerk het, geken het nie. Aksiomatiese versamelingsteorie is ingebring om 'n leemte te vul. Die versamelingteoretiese beskouing is egter Platonisme in sy engste vorm. Al die objekte van die versamelingteoretiese wêreld is abstrak. Dus het die redusering van wiskunde tot die versamelingsteorie alle konkrete realiteite uitgesluit.

In die jare sewentig van die twintigste eeu is versamelingsteorie rofweg op dieselfde wyse ondermyn as meetkunde vroeër. Die onafhanklikheidsresultate, die toename in kardinale aksiomas, en die konstruksies van ongewone modelle vir versamelingsteorie het wiskundiges laat besef hoe swak hulle versamelingteoretiese intuïsie eintlik is. Die beskouings van versamelingteoretici het begin verskil. Vir sommige is Cantor se kontinuumhipotese steeds aanneemlik, terwyl ander weer volgelinge van Gödel is, wat beweer dat die kontinuumhipotese onwaar is. Beide strome is egter aanpasbaar ten opsigte van Platonisme.

Volgens Goodman (1979 : 550) lyk dit asof wiskunde slegs kan groei as daar ooreenstemming is ten opsigte van die grondslae:

> "Without a foundational concencus, it seems to me, mathematics will tend to break apart into schools. Actually, not only is set theory tending to split into pieces, but mathematical Platonism itself is the result of a split in the larger structure of science."

Volgens Kriel (1990 ; 125) word Platoniese konsepsies van analise en versamelingsteorie ook toegepas in moderne teorieë oor algebra en topologie, waar dit baie vrugbaar blyk te wees. Die geldigheid van 'n groot aantal definisies en bewyse van stellings in wiskunde berus op 'n Platoniese aard. Die toepassing van Platonisme in wiskunde is so algemeen, dat dit nie oordrewe is om te sê dat Platonisme wiskunde tans regeer nie. Om die woorde van Wilder (1972 : 494) aan te haal:

> "So if you are a Platonist, go ahead and enjoy it!"

2.20 Kwasi-empirisme

'n Meer resente denkskool oor die aard van die wiskunde, is die kwasi-empirisme met Imre Lakatos as pionier. Die tesis wat hulle huldig is dat wiskunde feilbaar is, en dat wiskundige metodes soortgelyk is aan die metodes van die egte empiriese wetenskappe. Volgens Hanna (1983 : 59 - 62) het Lakatos daarop gewys dat navorsing vir die soeke na absolute sekerheid in die grondslae van wiskunde gestaak is. Die volledigheidstellings van Gödel het alle hoop in die niet laat verdwyn. Selfs Russell, wat die leiersfiguur van die logisisme was, het bewus geword van die onmoontlikheid van absolute sekerheid. Lakatos voeg by dat die formaliste in besonder, swaar getref is deur die stellings van Gödel, wat aangetoon het dat daar takke van die wiskunde is wat nie vanaf 'n versameling van konsistente aksiomas gekonstrueer kan word nie. Gevolglik kan daar geen eksplisiete definisie van 'n formele bewys wees nie.

Lakatos het daarop gewys dat erkenning van die feilbaarheid van wiskunde, beteken dat die bewering dat wiskunde 'n suiwer deduktiewe stelsel is, weer in oënskou geneem moet word.

Die doelwitte van 'n Euklidiese teorie is streng en absoluut vry van teenstrydighede. Die ideale Euklidiese teorie bestaan uit 'n eindige versameling van aksiomas, wat per definisie waar is, tesame met 'n deduktiewe stelsel wat waarheid beskou deur die kanale van geldige inferensies.

In 'n Euklidiese teorie geskied die vloei vanaf die top (die aksiomas) na die basis (die afleidings en bewerings wat gemaak is op grond van die aksiomas).

Lakatos definieer 'n stelsel as kwasi-empiries as dit nie die voorwaardes van 'n Euklidiese stelsel bevredig nie. Die belangrike verskil tussen 'n kwasi-empiriese stelsel en 'n Euklidiese stelsel is die wyse waarop waarheid oorgedra word. In die Euklidiese stelsel geskied dit van bo na onder, terwyl dit in die kwasi-empiriese stelsel van onder na bo geskied.

Die bewerings of veronderstellings wat aan die einde van 'n kwasi-empiriese stelsel gemaak word, dit is, die stellings of gevolgtrekkings, dien slegs as verduideliking van die voorafgaande bewerings. 'n Kwasi-empiriese stelsel kan dus hoogstens strewe na bevestiging.

'n Kwasi-empiriese teorie kan empiries wees, maar dit is nie noodwendig so nie. 'n Teorie is empiries as die waarheidswaarde van sy bewerings op empiriese getuienis berus. So is fisika 'n empiriese teorie, maar wiskunde nie.

Lakatos se bewering dat wiskunde 'n kwasi-empiriese teorie is, is gebaseer op Popper se siening van die ontwikkeling van wetenskap. Die slagspreuk is groei en permanente revolusie, en nie grondslae en 'n akkumulasie van ewigdurende waarhede nie. As hierdie beskouing van Popper toepaslik op wiskunde gemaak word, dan groei wiskunde deur "veronderstellings" en "weerleggings" waar die "veronderstellings'' en "weerleggings" in die proses veranderinge ondergaan. Grabiner (1974 : 364) ondersteun hierdie beskouing:

> "Mathematics grows in two ways: not only by successive increments, but also by occasional revolutions."

Om dus te sê dat 'n wiskundige teorie kwasi-empiries is, impliseer dit dat so 'n teorie potensiële onwaarhede bevat.

Lakatos verduidelik dat wiskunde inderdaad potensiële onwaarhede bevat, alhoewel geen persoon sal beweer dat wiskunde empiries is nie, in dié sin dat sy potensiële onwaarhede enkele tydruimtelike bewerings is.

Sy potensiële onwaarhede is eerder, in teenstelling met die natuurwetenskappe, potensiële logiese en heuristiese onwaarhede. Die begrip van 'n potensiële logiese onwaarheid is maklik om te begryp. Enige teenstrydigheid is 'n logiese onwaarheid, met ander woorde, enige bewering van die vorm "A en nie-A".

As 'n formele teorie as die formalisering van een of ander informele teorie beskou word, dan kan die formele teorie weerlê word as een van sy stellings die negering is van die ooreenkomstige stelling van die informele teorie. Lakatos noem só 'n informele stelling 'n *heuristiese onwaarheid* van die formele teorie.

Lakatos glo nie dat die werklike funksie van 'n wiskundige bewys is om die finale seël van goedkeuring te plaas op 'n reeds aanvaarbare bewering nie. Hy beskou die funksie van 'n bewys eerder as 'n kritiese wiskundige ontleding. Bewys is vir Lakatos 'n denkeksperiment. Dit is 'n manier om 'n stelling in sy inisiële vorm, wat hy verkieslik 'n bewering noem, te analiseer met die doel om dit te verfyn.

Die doelwit van 'n bewys is dus nie om die geldigheid van 'n bewering te bevestig of te weerlê nie, maar om dit te verbeter. Die wiskundige mag eindig met 'n bewys van 'n bewering wat geheel en al verskil van die oorspronklike bewering.

Hierdie siening van die funksie van 'n bewys is in ooreenstemming met Lakatos se begrip van wiskunde as 'n kwasi-empiriese dissipline, waar die vloei van waarheid en onwaarheid van onder na bo is, ofte wel, van die bewering en sy gevolgtrekkings na die basiese premisse.

Die prosedure van denkeksperiment of bewysanalise verskil merkbaar van dié in formele bewyse. In teenstelling met formele bewyse, geskied bewysanalises op 'n informele basis. Daar is geen rigiede reëls en beperkings op die metodes wat gebruik word nie. Die situasie is een van probleemoplossing. In die soeke na 'n oplossing, word die probleem ontleed en selfs herformuleer. Die oorspronklike bewering is onderhewig aan kritiek en ontbinding in onderdele. Teenvoorbeelde word gesoek. Hierdie patroon van wiskundige ontdekking bestaan volgens Lakatos uit vier stappe:

- Oorspronklike bewering.

- Bewys ('n rowwe denkeksperiment of argument waar die oorspronklike bewering in onderdele of lemmas ontbind word).

- Die verskyning van "globale" teenvoorbeelde vir die oorspronklike bewering.

- Herondersoek van die bewys.

Die vierde stap sluit gewoonlik die identifisering van 'n "skuld-lemma" in. Dit is 'n essensiële premis wat nie in die oorspronklike bewering uitgespel is nie. Dit gebeur wanneer 'n "globale" teenvoorbeeld van die oorspronklike bewering dit nodig maak om 'n addisionele lemma te formuleer om die bewering by die eerste stap aan te pas deur die byvoeging van die nuwe lemma as 'n eksplisiete premis.

Deur dit te doen, word die "globale" teenvoorbeeld gereduseer na 'n "lokale" teenvoorbeeld. Dit is, anders gestel, 'n teenvoorbeeld vir die oorspronklike bewering, maar nie vir die verbeterde een nie.

Hanna (1983 : 62) verduidelik die twee tipes teenvoorbeelde soos volg. Veronderstel die oorspronkilike bewering is die volgende:

"As voorwaardes P_1 tot P_n geld, dan is die gevolgtrekking C waar."

As 'n voorbeeld nou gevind word sodanig dat hierdie voorwaardes geld terwyl die gevolgtrekking onwaar is, dan sal hierdie voorbeeld 'n globale teenvoorbeeld vir die oorspronklike bewering wees. Dit sal dalk beteken dat 'n nuwe voorwaarde P_{n+1} bygevoeg moet word. Hierdie globale teenvoorbeeld bevredig egter nie die voorwaarde nie, en is die sogenaamde "skuld-lemma" wat tot op hierdie stadium verskuil was.

Die bewering het nou 'n nuwe versameling voorwaardes, naamlik P_1 tot P_{n+1}, en die teenvoorbeeld is nie meer 'n globale teenvoorbeeld nie. Dit het nietemin sy doel gedien omrede dit 'n lokale teenvoorbeeld vir die oorspronklike bewering was.

Bogenoemde idee word met die volgende voorbeeld geïllustreer. Veronderstel dit word beweer dat alle poligone met vier sye en vier regte hoeke vierkante is. Dan is sekere reghoeke teenvoorbeelde aangesien daar reghoeke is wat nie vierkante is nie. As nou die verskuilde voorwaarde "met gelyke sye" by die bewering gevoeg word, dan is die reghoek nie meer 'n globale teenvoorbeeld nie.

Die formaliste het gepoog om wiskunde as onfeilbaar te bewys deur die skep van 'n strenge deduktiewe stelsel. Lakatos bevraagteken egter die uitvoerbaarheid hiervan. Gödel se navorsing het ingebore beperkings van aksiomatiese stelsels uitgewys. Lakatos beklemtoon eerder dat wiskunde in beginsel nie 'n finale formulering kan wees nie, aangesien wiskunde nie 'n eindige struktuur is wat op 'n vaste fondament gebou is nie. Wiskunde sal altyd groei en verander deur 'n proses van bewys en weerlegging, en nie deur bewys alleen nie.

Dit is 'n proses van kritiese wiskundige ontleding, waar die inisiële bewys van 'n oorspronklike bewering by verre nie 'n ry van logiese stappe in 'n deduktiewe stelsel is nie. Dit is eerder die toepassing van 'n verskeidenheid metodes van ontdekking, hetsy heuristies of sistematies. In die proses van ontdekking word die oorspronklike bewering verfyn, en uiteindelik verander na 'n nuwe wiskundige waarheid. Omdat die omvang van wiskundige kennis groei met die aanwas van nuwe wiskundige waarhede, gebeur dit dikwels dat 'n nuwe wiskundige waarheid voorafgaande waarhede bevestig of weerlê in die deduktiewe ketting, wat ontstaan na die oorspronklike ontdekking.

2.21 Samevatting

In hierdie hoofstuk is verskeie van die belangrikste wiskundige denkskole in oënskou geneem. Die punte van ooreenkoms asook verskille is uitgewys en beklemtoon. Dit is duidelik dat daar geen unieke teoretiese grondslag vir wiskunde bestaan nie. Ironies genoeg is dit te wyte aan die toenemende navorsing op die gebied van logiese strengheid.

Die sentrale gedagte van logisisme is dat wiskunde 'n deel van logika is. Die doel van die logisiste was om 'n wiskundige liggaam daar te stel waarvan die konsepte almal in logiese terme uitgedruk kan word, of in 'n stelsel volgens streng gedefinieerde reëls afgelei kan word. Die formele bewys speel dus 'n sentrale rol in die logiese stelsel.

Dit is ook waar van die formalistiese stelsel. Die tesis van die formalistiese skool is dat wiskunde 'n wetenskap van formele stelsels is. Dit gaan oor die manipulasie van stringe en simbole, waaraan geen betekenis geheg is nie. In die formalistiese beskouing, berus die geldigheid van enige wiskundige proposisie op die vermoë om sy waarheid te

bevestig deur 'n streng bewys binne 'n toepaslike formele stelsel. Formalisme 'n versameling van formele stelsels waarvan die elemente gemanipuleer en gekombineer word onderhewig aan spesifieke reëls. Hierdie reëls, genoem definisies, tesame met die bewyse van stellings, is die essensiële oogmerk van die wiskundige. Die formalis is 'n skepper en nie 'n ontdekker nie. Vir die formalis kom die vraag oor die bestaan van wiskundige objekte nie na vore nie. Vir die formalis is dit voldoende om aan te toon dat die toepassing van die wiskundige reëls nie tot teenstrydighede lei nie.

Die intuïsioniste heg ook groot waarde aan formele bewyse. Hulle verskil egter van die logisiste en formaliste oor watter bewyse as geldig aanvaar moet word. Intuïsioniste glo dat wiskunde en wiskundige taal twee aparte entiteite is, met wiskunde hoofsaaklik 'n taallose aktiwiteit van die gees. Wiskundige aktiwiteit bestaan uit introspektiewe konstruksies, eerder as aksiomas en stellings.

Vir die intuïsionis is die veronderstelling van 'n wiskundige proposisie ekwivalent met die veronderstelling dat daar 'n konstruksie van 'n eindige aard is wat, onderhewig aan streng reëls, tot die proposisie lei.

Intuïsioniste erken wiskunde tot die mate wat wiskundige objekte uit sekere primitiewe basiese objekte in 'n eindige aantal stappe gekonstrueer word. Die vraag oor konstrueerbaarheid is dominant.

Platonisme word eers gekonfronteer met 'n verskeidenheid van abstrakte strukture. Hierdie strukture is nie deur hom geskep nie, maar word deur hom ontdek. Sy intuïsie word gevorm deur waarhede van sy voorgangers. Daarna vind hy nuwe strukture en maak nuwe bewerings oor reeds bekende strukture.

Platoniste beweer dat wiskundige objekte, en dus die hele wiskunde, nog altyd, onafhanklik van tyd en die mens, bestaan het. Die wiskundige se taak is om hierdie bestaande wiskundige waarhede te ondersoek. Die wiskundige is eerder 'n ontdekker as 'n skepper.

Lakatos het beweer dat wiskunde feilbaar is. Alhoewel wiskunde nie 'n empiriese wetenskap is nie, het Lakatos aangetoon dat sy metodes soortgelyk aan dié van die

empiriese wetenskappe is. Hy glo dat wiskunde ontwikkel deur kritiese ontleding en verbetering van teorieë wat nooit geheel en al foutloos is nie. Lakatos verwys na wiskunde as kwasi-empiries.

Nog 'n belangrike faktor wat bygedra het tot die toenemende aandag op strengheid in bewyse, is die kragtige aksiomatiese metode. Hierdie metode word deur al die belangrike denkskole erken, alhoewel elkeen dit op 'n manier gebruik, ietwat verskillend van die ander.

Daar is geen algemene kriteria vir die geldigheid van 'n bewys nie. Wiskundiges stem egter saam dat 'n deduktiewe ketting binne 'n bepaalde verwysingsraamwerk nodig is. Dit beteken dat daar 'n gegewe aksiomatiese stelsel moet wees, alhoewel die verskillende denkskole nie dieselfde verwysingsraamwerk deel nie. Dit is inderdaad nie die inferensiereëls wat die denkskole verdeel nie, maar die logiese en wiskundige aksiomas self.

Ten spyte van die bestaande beperkings op die intuïsionistiese program, blyk dit dat voorkeur aan die intuïsionistiese filosofie gegee moet word. Die intuïsioniste het reeds daarin geslaag om groot dele van die huidige wiskunde, insluitend die teorie oor die kontinuum en 'n versamelingsteorie te rekonstrueer. Alhoewel talle dele van die klassieke wiskunde nog opgeoffer word, is die kanse goed dat dit in die toekoms deur die intuïsionistiese program geakkommodeer kan word. In so 'n geval sal die probleme wat die huidige krisis ten gevolge het, verdwyn, aangesien dit algemeen aanvaar word dat die intuïsionistiese metodes nie tot teenstrydighede lei nie. Tog is dit so dat wiskunde op sekondêre- en tersiêre vlak hoofsaaklik op die formalistiese filosofie geskoei is, en derhalwe sal hierdie benadering in die res van hierdie studie voorkeur geniet.

In hoofstuk 6 sal meer oor die benadering in bewystegnieke ten opsigte van die verskillende denkskole gesê word.

HOOFSTUK 3: BEWYS AS 'N WISKUNDIGE AKTIWITEIT

3.1 Inleiding

Daar is algemene konsensus tussen wiskundiges dat in enige wiskundige stelsel, 'n bewys 'n soort van skema sal hê, en dat elke bewys 'n metode is om bewerings, genoem stellings, af te lei uit ander bewerings, onderhewig aan 'n versameling van reëls.

Klein (1970 : 264) beweer dat die deduktiewe bewyse uit eksplisiet gestelde aksiomas as die onontbeerlike voorwaarde vir aanvaarding van gevolgtrekkings, wiskunde onderskei van alle ander weergawes van menslike kennis.

Die organisering van wiskunde in deduktiewe stelsels het 'n samehang in die wyd uiteenlopende inhoude van wiskunde tot gevolg gehad. Deduktiewe bewysvoering het die struktuur van wiskunde versterk, terwyl die aksiomatisering wat inherent tot hierdie tipe organisering is, dit duidelik gemaak het wat vooronderstel word in gevalle waar sodanige stelsels toepaslik is. Aksiomatisering suggereer ook abstraksies, soos byvoorbeeld groepeteorie, wat verskeie strukture omvat.

Volgens Tarski (1969 : 70) het die begrip "bewys" oor die jare 'n vaste betekenis gekry. Hanna (1983 : 29) beskou 'n bewys soos volg:

> "Proof is quite widely understood today as the procedure used in an axiomatic system to demonstrate the truth of a theorem in that system. (In this context the term theorem means any assertion which is true in the system, apart from the axioms.) Proof is an essential facet of the axiomatic method, and this method is common to a great deal of present-day mathematical practice (though the axiomatic approach has not been dominant in certain areas, such as graph theory and numerical analysis). Where the various schools of mathematical thought differ in regard to proof is not on its necessity, but rather on the criteria of validity to which it should be subject."

'n Bewys is nie altyd gesien as 'n deduksie, hetsy direk of indirek, vanuit eerste beginsels nie. Die eerste deduktiewe struktuur was Euklides se Elemente. Meetkunde het egter nie altyd 'n deduktiewe formaat gehad nie. Kline (1970 : 266) beweer dat dit 300 jaar geneem het alvorens die "Elemente" as 'n wiskundige stelsel georganiseer is.

Volgens Tarski (1969 : 70) was 'n bewys aan die einde van die negentiende eeu nog beskou as 'n intellektuele aktiwiteit wat daarop ingestel was om die waarheid van 'n sin te bevestig. Daar was geen beperkings op die argumente van die bewyse nie, behalwe dat hulle intuïtief oortuigend moes wees. Daar het 'n behoefte ontstaan om bewyse op 'n stewiger grondslag te plaas. Hierdie pogings, onder leiding van Gottlob Frege, het gelei tot die nuwe begrip, *formele bewys*. Die eerste stap wat nodig was vir die formalisering van bewyse, was om die taal van die teorie te formaliseer.

Die volgende stap was die formulering van die sogenaamde deduksiereëls. Net soos die sintaktiese reëls, het hulle ook 'n formele karakter gehad. Intuïtief was hierdie reëls onfeilbaar in dié sin, dat 'n sin wat uit 'n vorige ware sin (of sinne) afgelei is, ook waar sal wees. Onfeilbaarheid van die reëls vir bewyse kan inderdaad met behulp van 'n toepaslike definisie van waarheid bevestig word.

Tarski (1969 : 75) beskryf die formele bewys van 'n sin soos volg: Eerstens word die reëls van 'n bewys op die aksiomas toegepas om nuwe sinne uit die aksiomas af te lei. Vervolgens word dieselfde reëls op nuwe sinne en aksiomas toegepas om verdere nuwe sinne te skep. So word die proses voortgesit. As na 'n eindige aantal stappe, by die sin wat bewys moet word, uitgekom word, dan is die sin formeel bewys.

3.2 Wiskundige aktiwiteit

Volgens Kitcher (1984 : 163) bestaan wiskundige aktiwiteite uit vyf komponente, naamlik

- 'n taal,
- 'n versameling aanvaarbare stellings,
- 'n versameling aanvaarbare vrae,
- 'n versameling aanvaarbare argumente, en
- 'n versameling wiskundige beskouings.

Die laaste komponent sluit standaarde van bewyse en definisies in, asook voorwaardes oor die struktuur van die liggaam van wiskundige resultate wat ontwikkel is, en die maniere waarop wiskunde beoefen word. Kitcher verwerp die beskouing dat wiskundige kennis op bewys gebaseer is. Dit is ook nie waar dat veranderinge in wiskunde teweeggebring is as gevolg van die regstelling van foute van die verlede nie. Volgens Kitcher is wiskundige kennis sensitief vir uitdagings wat deur tegnieke bewys word.

Wiskundige definisies is altyd relatief van aard, in dié sin dat hulle definieer in terme van reeds aanvaarde begrippe. Wanneer 'n wiskundige definisie die absolute minimum van sodanige, reeds aanvaarde begrippe gebruik, kan hierdie begrippe self nie verder wiskundig gedefinieer word nie. Hulle kan slegs filosofies geregverdig word. So 'n filosofiese analise van 'n begrip, het nie 'n relatiewe karakter nie. In sodanige analises word alles wat saamgestel is, geanaliseer in sy saamgestelde komponente, totdat komponente verkry word wat nie meer saamgestel is nie.

3.2.1 Waarheid

Tarski (1969 : 63-69) beskryf die begrip *waarheid* kortliks . Onder sekere voorwaardes kan hierdie begrip presies gedefinieer word. Derhalwe kan 'n konsistente gebruik van hierdie begrip vir ten minste die semanties beperkte wiskundige tale vasgelê word. Die belangrikste voorwaardes wat aan die taal opgelê word is dat die volledige woordeskat beskikbaar moet wees, sowel as sintaktiese reëls vir die vorming van bewerings en betekenisvolle uitdrukkings. Verder moet die sintaktiese reëls suiwer formeel wees in dié sin dat hulle uitsluitlik na die vorm van die uitdrukkings verwys.

Wiskundige tale wat hierdie voorwaardes bevredig, staan as formele tale bekend. Formele tale is ten volle toegerus vir die aanbieding van logiese en wiskundige stelsels. Formele tale is allermins linguistiese stelsels wat geheel en al in terme van simbole geformuleer is. Die enigste formele tale van werklike belang is inderdaad daardie tale wat deel is van die natuurlike tale, op voorwaarde dat hulle oor 'n volledige woordeskat en presiese sintaktiese reëls beskik, óf daardie tale wat gerieflik in 'n natuurlike taal oorgesit kan word.

Tarski (1969 : 68) maak 'n duidelike onderskeid tussen die formele taal waarin die definisie van waarheid gekonstrueer word, en die taal waarin die definisie geformuleer word. Laasgenoemde taal word na verwys as die metataal, terwyl eersgenoemde as die objektaal bekend staan. Die metataal moet ryk genoeg wees sodat dit in besonder die objektaal omvat.

Tarski (1969 : 68) definieer vervolgens die begrip *waarheid* soos volg:

p is waar as en slegs as p,

waar p 'n willekeurige bewering van die objektaal is. Alle bewerings van die objektaal moet ook 'n bewering in die metataal wees. Verder moet die metataal name vir bewerings (en ander uitdrukkings) van die objektaal bevat.

Ten slotte, deur die begrip waarheid te definieer, kan semantiese terme, wat relasies tussen bewerings van die objektaal, en objekte waarna hierdie bewerings verwys, in die metataal met behulp van definisies voorgestel word.

Verder moet die metataal, wat voldoende is om die begrip waarheid te definieer, essensieel ryker as die objektaal wees. Dit kan nie ooreenstem met die objektaal nie, anders sal dit meebring dat beide tale universeel semanties sal wees. In so 'n geval sal teenstrydighede in beide tale gekonstrueer kan word.

3.2.2 Bewys

Volgens Tarski (1969 : 70-77) is 'n bewys slegs 'n prosedure om die waarheid van 'n bewering te bepaal. Hierdie prosedure vind hoofsaaklik in 'n deduktiewe wiskundige stelsel plaas, en staan bekend as die aksiomatiese metode.

Die aksiomatiese metode en die begrip van bewys binne hierdie raamwerk is die gevolg van 'n lang historiese ontwikkeling in die wiskunde. Tot en met die einde van die negentiende eeu was die begrip van bewys hoofsaaklik psigologies van aard. 'n Bewys was 'n intellektuele aktiwiteit wat daarop ingestel was om mense van die waarheid van 'n bewering te oortuig. Daar was geen beperkings op die argumente nie, behalwe dat hulle intuïtief oortuigend moes wees.

Hierna het egter 'n periode gevolg waar daar 'n behoefte bestaan het om bewyse op 'n stewiger grondslag te plaas. Die logisiste onder leiding van Gottlob Frege het begin om bewyse op 'n formele basis te konstrueer.

Die eerste stap om bewyse te formaliseer, was om die taal van die teorie te formaliseer. Die volgende stap was die formulering van die sogenaamde inferensiereëls. Die aantal reëls vir bewyse is min. Hierdie reëls is eenvoudig, en het 'n formele karakter. Hierdie reëls is onfeilbaar in dié sin dat 'n bewering wat vanaf ander ware bewerings afgelei is, self waar moet wees.

Die onfeilbaarheid van die reëls van bewyse berus inderdaad op 'n geskikte definisie van waarheid. Die mees bekende en belangrikste reël vir 'n bewys, is die reël bekend as *modus ponens*. Volgens hierdie reël (wat in sommige wiskundige stelsels die enigste reël vir 'n bewys is) is 'n bewering q direk afleibaar uit twee gegewe bewerings, waar een van die bewerings die voorwaardelike bewering "as p, dan q" is, terwyl die ander bewering p is. Hier word p en q beskou as twee bewerings van die besondere geformaliseerde taal.

Tarski (1969 : 75) beskryf vervolgens 'n formele bewys vir 'n gegewe bewering soos volg:

- Die eerste bewering in die bewys is 'n aksioma.
- Elkeen van die volgende bewerings is óf 'n aksioma, óf volg direk as 'n afleiding uit bewerings wat dit voorafgaan, onderhewig aan een van die reëls vir bewyse.
- Die laaste bewering in die ketting is die bewering wat bewys moes word.

'n Aksiomatiese stelsel waarvan die taal geformaliseerd is, en waarvoor die begrip van 'n formele bewys verskaf is, word 'n geformaliseerde stelsel genoem. Slegs bewyse van 'n geformaliseerde stelsel word as formele bewyse beskou.

Alhoewel die stellings van Gödel 'n ernstige terugslag vir die formele metodes was, het die begrip nie sy betekenis verloor nie (Tarski 1969 : 77). 'n Bewys is steeds die enigste metode om die waarheid van 'n wiskundige bewering in 'n spesifieke wiskundige

stelsel te bepaal. Wiskundiges is nou bewus van die feit dat daar bewerings in sekere wiskundige stelsels bestaan wat *waar* is, maar nie as sulks bewys kan word nie. Die moontlikheid bestaan dus dat een van die bewerings waarvoor 'n bewys gesoek word, juis een van hierdie bewerings kan wees. Daar mag dus soms 'n behoefte ontstaan om die versameling bewysbare bewerings uit te brei. Dit sal beteken dat die gegewe wiskundige stelsel verryk word deur die byvoeging van nuwe bewerings tot die aksiomatiese stelsel, óf die verskaffing van nuwe reëls vir bewysvoering.

3.2.3 Analisering van wiskundige aktiwiteite

Volgens Snapper (1979 : 555) is die analisering van wiskundige aktiwiteite kompleks en bestaan uit twee komponente, waarvan elkeen weer verder ontleed kan word. Die eerste komponent bestaan uit 'n filosofiese analise, terwyl die tweede komponent die keuse van 'n toepaslike bewysmetode is om die waarheid van 'n bewering te bewys. Wiskundige strengheid is slegs teenwoordig in die aktiwiteit van die tweede komponent. Dit is waarom wiskundiges dikwels die eerste komponent ignoreer wanneer hulle oor wiskunde redeneer.

Snapper (1979 : 555) bespreek nie-Euklidiese meetkundes as 'n voorbeeld van so 'n wiskundige aktiwiteit. Hiperboliese vlakmeetkunde het uit die studie van Euklidiese vlakmeetkunde ontstaan. Laasgenoemde was reeds goed gevestig. In die Euklidiese vlakmeetkunde is die vyfde parallelaksioma 'n intuïtief vanselfsprekende sin, en die klassieke vraag was: "Kan die vyfde parallelaksioma uit die ander aksiomas bewys word?". In 'n poging om aan te toon dat die antwoord op hierdie vraag negatief is, het Gauss, Bolyai en Lobachevski almal die vyfde parallelaksioma vervang met die volgende aksioma: "Deur 'n gegewe punt wat nie op 'n gegewe lyn lê nie, kan meer as een lyn getrek word wat nie die gegewe lyn sal ontmoet nie." Die hiperboliese meetkunde wat hieruit ontstaan het, is aksiomaties ondersoek.

3.3 Kreatiwiteit in bewysmetodes

Newell en Simon (1972 : 876) onderskei tussen formele logika en menslike denke. Alhoewel die ontwikkeling van die moderne formele logika in die twintigste eeu grootliks bygedra het tot die skouspelagtige ontwikkeling in die wiskunde en wetenskappe, het menslike denke ook 'n belangrike rol gespeel.

Newell en Simon (1972 : 876) merk op:

> "Thinking must not be confused with logic because human thinking frequently is not rigorous or correct, does not follow the path of step-by-step deduction, in short, is not usually logical."

Simon (1944 : 19) steun hierdie uitspraak:

> "Any rational decision may be viewed as a conclusion reached from certain premises ---. The behaviour of a rational person can be controlled, therefore, if the value and factual premises upon which he bases his decisions are specified for him."

Die aksomatiese metode het 'n betekenisvolle bydrae gelewer tot die ontwikkeling van wiskunde. Dit is sekerlik so dat belangrike wiskundige ondersoeke uitgevoer is, wat nie moontlik sou wees sonder die hulp van die askiomatiese benadering nie.

Hanna (1983 : 67) steun egter ook die opvatting dat menslike kreatiwiteit 'n belangrike rol gespeel het met hierdie ontwikkelings, deur op te merk:

> "--- use of the formal axiomatic method, or any method for that matter, cannot account for mathematical creativity."

Davis en Hersh (1981: 62) beaam hierdie uitspraak:

> "A new mathematical result, entirely new, never before conjectured or understood by anyone, nursed from the first tentative hypothesis through labyrinths of false attempted proofs, wrong approaches, unpromising directions, and months or years of difficult and delicate work - there is nothing, or almost nothing, in the world that can bring a joy and a sense of power and tranquility to equal those of its creator."

Wiener (1953 : 212) beskou 'n goeie geheue as die belangrikste bate van 'n wiskundige, en daarmee saam 'n verbeelding wat die moontlikhede van gekompliseerde intellektuele situasies kan ontleed.

Wiskundiges skep dikwels proposisies en veronderstellings terwyl hulle nog nie eers besin het oor 'n ketting van afleidings vir bewyse nie. Die oorsprong van hulle inspirasies het niks te doen met aksiomatiese stelsels nie. Wiskundiges kan 'n veronderstelling formuleer omdat hulle dit nodig het om 'n probleem op te los, of as hulle voel dat dit in die algemeen 'n handige proposisie kan wees. Die oorsprong van wiskundige konsepte en proposisies het dus min te doen gehad met die aksiomatiese stelsels.

Bewys is dus sekerlik nie 'n voorvereiste vir ontdekking nie. Die Egiptenare het al 'n meetbare hoeveelheid wiskunde daargestel voor die Grieke met die begrip bewys vorendag gekom het.

Die bemeestering van 'n formele aksiomatiese metode sal nie help om 'n bewys vir 'n stelling te kry nie. Formele logika speel 'n klein rol in die vind van 'n bewys. Logisiste erken dat hulle geen voordeel het in die soeke na 'n ketting van afleidings vir die konstruksie van 'n bewys nie, alhoewel hulle opleiding en kennis hulle kan help om 'n voltooide bewys te kontroleer. Shanker (1987 : 77) haal Wilder soos volg aan:

> "Our intuition suggests certain results, and they seem mathematically desirable – and moreover, prove to be generally liked by the mathematical public. We test them by what we call a proof."

Wilder (1967 : 121) som die toekoms van die aksiomatiese metode soos volg op:

> "... in the future this will be one of the chief roles played by the axiomatic method: to help us analyze more deeply the consequences of what our intuitions suggest."

3.4 Aanvaarbaarheid van bewyse

Hanna (1989 : 21) bespreek vyf faktore wat 'n bewys vir 'n stelling aanvaarbaar maak vir die wiskundige gemeenskap. Onder die opskrif "Factors in acceptance" beweer sy dat die ontwikkeling van wiskunde en die kommentaar van praktiserende wiskundiges bydra tot die aanvaarding van 'n nuwe stelling deur wiskundiges as 'n kombinasie van die volgende faktore teenwoordig is:

1 Hulle verstaan die stelling, die konsepte wat daarin bevat is, die logiese vooronderstellings en implikasies, terwyl daar bowenal niks is wat suggereer dat die stelling nie waar is nie.

2 Die stelling is betekenisvol genoeg om implikasies in een of meer afdelings van wiskunde teweeg te bring, en is derhalwe belangrik genoeg om 'n intensiewe ontleding en studie te regverdig.

3 Die stelling is konsistent binne 'n aanvaarbare wiskundige stelsel.

4 Die skrywer van die stelling het 'n onberispelike reputasie as 'n kenner van die vak.

5 Daar is 'n oortuigende streng formele of informele wiskundige argument vir die stelling.

Neubrand (1989 : 6) kom tot die gevolgtrekking dat hierdie faktore inderdaad 'n rol speel by die aanvaarding van bewyse van stellings. Hy herformuleer egter die vyfde faktor soos volg en verwys hierna as "the language-factor":

> "The process of acceptance of a proof by the community of mathematicians is initiated by the proposal of a convincing argument by an accepted member of the mathematical community, and by a careful check of the argumentation by the experts in that field. But then the existence of some combination of the understanding-, significance-, compatibility-, reputation-, and language-factors is necessary to ensure the final acceptance of the proof."

Die punt wat Neubrand hier beklemtoon, is dat wiskunde 'n dinamiese proses is, wat voortgedryf word deur nuwe kreatiewe denke, gelei deur kritiese besprekings.

3.5 Die aard van 'n bewys

Volgens Shanker (1987 : 75) het Wittgenstein 'n buitengewone gawe gehad om probleme uit 'n ander hoek te benader. So het filosowe en wiskundiges voortdurend

gedebatteer oor die implikasies van Gödel se tweede volledigheidstelling sonder om ooit die betroubaarheid van die "metawiskundige" raamwerk waarop Gödel se bewys berus, te beskou. Slegs Wittgenstein het gepoog om laasgenoemde te ondersoek om daardeur die betekenis van die bewys op te helder.

Wittgenstein het gewaarsku dat alvorens met die probleem gespook word om 'n antwoord op 'n vraag te vind deur die skep van 'n algoritme bestaande uit 'n eindige aantal stappe, die basis van alle probleme in die filosofie van die wiskunde beskou moet word, naamlik die aard van 'n wiskundige bewys. Dit mag vreemd klink dat Wittgenstein die eerste filosoof was om voor te stel dat die begrip bewys intensief ondersoek moet word. Dit was tog immers die kruks van die "krisis" in die grondslae, en Kronecker, Frege, Russell, Hilbert en Brouwer het almal 'n besondere belangstelling in hierdie dispuut geopenbaar.

Shanker (1987 : 75) regverdig die stelling soos volg:

> "The distinction operating here turns, however, on what we understand by a 'philosophical' investigation. For there is a crucial difference between the various foundations approaches to the question of what *should* or *should not* be admitted as a legitimate proof, and Wittgenstein's focus on what *does* qualify as a legitimate proof. Wittgenstein was not interested in participating in the debate on what sorts of technique and methodology should be permitted in the ongoing search for ever greater rigour in the pursuit of mathematics. Rather, his intention was to clarify the features of those constructions which mathematicians *do* present and accept as proofs."

Volgens Tieszen (in Detlefsen 1992 : 57) beskou formaliste, en sommige logisiste, 'n bewys as 'n eindige konfigurasie van simbole in 'n elementêre formele stelsel. Met hierdie begrip kan bewyse in natuurlike getalle gekodeer word. In enige elementêre formele stelsel waar dit moontlik is om bewyse na kodering rekenkundig uit te voer, kan Gödel se volledigheidstellings bewys word. Gödel se stellings word dikwels beskryf as 'n verifiëring dat bewys, in die formalistiese sin, nie dieselfde as waarheid is nie, óf dat sintaksis nie dieselfde as semantiek is nie.

'n Bewys is egter meer as 'n standaard ketting van inferensies wat tot 'n stelling lei. Dit betrek vele informele komponente wat 'n tipe strengheid is wat onafhanklik van algemene formalisering is. So speel die kognitiewe aspek 'n essensiële rol in enige bewys. Die geestelike of verstandelike konstruksie van enige bewys kan nie ontken word nie.

3.6 Kontrolering van 'n bewys

Hilbert (Shanker 1987 : 120) maak die volgende opmerking:

> "If logical inference is to be reliable, it must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, are concatenated, is immediately given intuitively, together with the objects, as something that can neither be reduced to anything else nor requires reduction."

Shanker ondersteun hierdie opmerking en beweer dat opheldering 'n deel van bewyse is. As die proses wat tot die gevolgtrekking lei, nie ondersoek kan word nie, kan tereg gevra word wat veronderstel is om bewys te word.

Om oortuigend te wees, hoef 'n bewys nie altyd 'n streng deduktiewe ketting te wees nie. Beskou byvoorbeeld die volgende stelling uit Barshay (1969 : 17):

> "Theorem ≡ mod A is an equivalence relation on A
> Proof The proof is immediate from the definitions of an equivalence relation and an ideal."

Dit is nie ongewoon om sulke bewyse in handboeke en artikels op te merk nie. In bogenoemde bewys gee die skrywer slegs 'n aanduiding vir die uiteensetting van die bewys.

In die volgende voorbeeld gee Abhyanker (1973 : 6) 'n wenk tesame met induksie vir die bewys van die stelling.

"Corollary 1: dim {L, D} ≥ dim L − deg D

Proof: Follows by induction on deg D using the inequality dim {L, D} − 1 ≤ dim {L, D + M}."

Dikwels wil die skrywer die leser verveling en moeite spaar deur aan te dui dat 'n bewys soortgelyk is aan een wat hy reeds uitgevoer het. Die volgende voorbeeld is gebruik deur Hamilton (1990 : 12):

"For any statement forms A, B, C, the following pairs of statement forms are logically equivalent.

(a) A ∨ (B ∨ C) and (A ∨ B) ∨ C.
(b) (A ∧ B) and (B ∧ A).
(c) (A ∨ B) and (B ∨ A).

The verifications of these follow the same pattern as the worked example above."

Soms maak die skrywer staat op die kundigheid van die leser om 'n bewys uit te voer. Die volgende stelling en bewys is deur Morash (1987 : 307) aangebied:

"Theorem 4 Let a, b, x and y be elements of an ordered field F:

(a) If $x < y$, then $a + x < a + y$
(b) If $a < b$ and $x < y$, then $a + x < b + y$
(c) If $x < y$ and $a > 0$, then $ax < ay$
(d) If $x < y$ and $a < 0$, then $ax > ay$

Partial Proof. We leave (a) and (c) as exercises [see Exercise 3b]."

Morash bewys vervolgens slegs (b) en (d).

Bewyse soos hierbo is aanvaarbaar, en is inderdaad eerder die reël as die uitsondering. Die belangrikste rede vir hierdie kriptiese bewyse is die feit dat 'n bewys ondersoek en gekontroleer kan word. Uri (1985 : 13) beweer dat dit beter is om 'n gestruktureerde

bewys te gee en die triviale besonderhede uit te los. Hierdie besonderhede is gewoonlik roetine werk met 'n tegniese karakter, en kan as sulks maklik gekontroleer word.

'n Wiskundige bewys hoef nie streng of volledig te wees om oortuigend te wees nie. Wat wel belangrik is, is dat dit ondersoek en gekontroleer kan word. Shanker, (1987 : 122) stel dit dat die eis dat 'n bewys ondersoek kan word neerkom op die beginsel dat die grammatikale konvensies wat deur 'n bewys gevestig is, duidelik moet wees.

Die gapings in 'n bewys moet ook aanvaarbaar vir die ervare leser wees. Die volgende bewys uit Soifer (1987 : 34) is 'n voorbeeld van 'n bewys wat ondersoek en gekontroleer kan word.

Bewys dat vir alle nie-negatiewe reële getalle a en b, $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Bewys:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Dus $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$

Gevolglik is $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Alhoewel hierdie bewys nie streng formeel is nie, is dit oortuigend genoeg om aanvaarbaar te wees. 'n Voorbeeld van 'n formele kontroleerbare bewys is deur Barnard (1993 : 89) aangebied by 'n streekkongres oor wiskundeonderwys.

"Consider the following set of axioms as frame of reference of a finite geometry:

1 Exactly one line passes through any two points.
2 There are at least three different points on each line.
3 At least one line exists.
4 Not all points are on the same line.
5 Given any line e and a point P not on e, there is exactly one line f with the following two properties:
   (a) P lies on f.
   (b) e and f do not intersect.

Theorem: At least four different lines exist.

Proof: At least one line, say e, exists (axiom 3).

There are at least three different points, say P, Q and R on e (axiom 2).

At least one point, say S, is not on line e (axiom 4).

Exactly one line passes through S and each of P, Q and R (axiom 1).

Suppose two lines contain QR, namely line PQR and line SQR.

This is contradictory to axiom 1.

Thus, the lines e, PS, QS, and RS are different."

Hierdie bewys kan duidelik ondersoek word en is kontroleerbaar. Die bestaan van die lyne kan duidelik gekontroleer word deur die verifiëring van elke stap. Verder is die bewys formeel in dié sin dat die stelling uit die aksiomas afgelei word deur die logiese reëls alleen, sonder verwysing na betekenis.

Hanna (1983 : 79) noem 'n paar belangrike kenmerke van bewyse wat ondersoek kan word. Dit is prakties en 'n bondige skryfwyse vir 'n deduktiewe argument. 'n Bewys uit eerste beginsels in gevorderde wiskunde kan maklik tot vyf volumes beslaan. Daarom word teruggeval op lemmas en stellings om die argument korter te maak. Dus, alhoewel sulke bewyse soms frustrerend kan wees, is dit aanvaarbaar, solank hulle net kontroleerbaar is. Uiters lang bewyse is moeilik om te kontroleer. Bowendien bestaan die gevaar dat daar maklik foute in sodanige bewyse kan wees. Alhoewel 'n bewys van honderd of meer bladsye teoreties ondersoek kan word, is dit prakties nie so maklik nie.

3.7 Die vierkleurprobleem

Een van die mees tergende probleme in wiskunde, was die vierkleurprobleem. Alhoewel Appel en Haken glo dat Möbius in 1840 die eerste persoon was wat met die probleem vorendag gekom het, word die eer, volgens Keeports (1991 : 759) toegeken aan Francis Guthrie wat in 1852 die vierkleurprobleem die eerste keer geformuleer het.

Volgens Broere (1980 : 130) bespreek Arthur Cayley die vraag of enige landkaart in vier of minder kleure gekleur kan word só dat enige twee lande met 'n gemeenskaplike grenslyn verskillende kleure ontvang. In die moderne terminologie kan dit soos volg geformuleer word:

Die aansigte van elke vlakgrafiek kan met vier of minder kleure gekleur word só dat enige twee aansigte met 'n gemeenskaplike grenslyn verskillende kleure ontvang.

Cayley se bydrae was die begin van 'n lang en kleurryke geskiedenis waarin verwante probleme, uitgebreide teorieë en foutiewe bewyse voorkom. Volgens Broere (1980 : 131) het Alfred B. Kempe in 1879 die eerste "bewys" van die vierkleurprobleem gepubliseer. Sowat 'n dekade na Kempe se "bewys" verskyn het, wys Percy J. Heawood 'n fout daarin uit, maar gebruik die tegnieke van Kempe om 'n vyfkleurstelling te bewys. Hierna het soveel foutiewe bewyse verskyn dat Whitney en Tutte in 1972 skryf:

> "Anyone now having a proof that he wishes to be taken seriously would be well advised to write it out clearly and in full logical detail, so that any mathematician willing to spend enough time on it will be able to check it." (Broere 1980 : 138).

Appel en Haken het dié opmerking dan ook ernstig opgeneem, en twee artikels in 1977 die lig laat sien wat saam 139 bladsye lank was terwyl twee bylaes in mikrofiche verdere inligting bevat. Hulle het die resultaat in Junie 1976 aangekondig en het die bewys gelewer deur 'n onvermybare versameling van 1482 reduseerbare konfigurasies te konstrueer.

Die bewys is uitsonderlik lank en die samestelling daarvan het meer as vier jaar in beslag geneem. In 1970 was Appel en Haken bekommerd dat die bestaande rekenaars nie die vermoë het om al die berekeninge uit te voer nie. Op daardie stadium het hulle ongeveer 100 000 uur rekenaartyd, ofte wel meer as elf jaar, nodig gehad om die bewys te voltooi. In 1972 het hulle egter die probleem na 'n meer hanteerbare konfigurasie gereduseer wat sonder probleme deur die huidige rekenaars uitgevoer kan word.

Volgens Keeports (1991 : 759) het die vierkleurprobleem eers hierna die status as 'n stelling ontvang.

Die bewys was met 'n mengsel van entoesiasme en skeptisisme ontvang.

Swart (Hanna 1983 : 84) word soos volg aangehaal:

> "Although it has apparently been confirmed, it has triggered a new controversy over the philosophical implications of computer-assisted proofs."

3.8 Rekenaarbewyse

Kolata (1976 : 990) spreek sy bekommernis uit ten opsigte van wiskundige bewyse.

Hy is bekommerd dat lang en ingewikkelde bewyse eerder die reël as die uitsondering word, veral in sekere gebiede soos groepteorie. Hy spekuleer dat hierdie probleem ontstaan as gevolg van die feit dat daar relatief min interessante bewerings met kort bewyse is. In vergelyking met die totale aantal moontlike wiskundige bewerings is dié met kort bewyse al redelik uitgeput en word al hoe minder. Die bevestiging van bewerings deur rekenaars mag noodwendig 'n deel van wiskunde in die toekoms word. Dit kan wiskundiges dwing om hulle siening ten opsigte van die verifiëring van bewerings te hersien.

Rekenaarondersteunde bewyse is inderdaad 'n sterk aanslag teen die tradisionele begrip van bewys. Die bewys van die vierkleurprobleem deur Appel en Haken illustreer hierdie punt. Voor 1976 was daar talle pogings om hierdie stelling te bewys, maar nie een was suksesvol nie. In die lig van Gödel se onvolledigheidstelling het wiskundiges begin glo dat die vierkleurprobleem dalk een van die ware bewerings is wat nóg bewys, nóg weerlê kan word. In 1976 het Appel en Haken met 'n rekenaarondersteunde bewys vorendag gekom waaroor Tymoczko baie skepties was. Hy was van mening dat die vierkleurprobleem nie as 'n stelling beskou kan word nie, aangesien die waarheid daarvan slegs deur die rekenaar bevestig is.

Tymoczko, soos aangehaal deur Shanker (1987 : 141) beweer:

> "The reliability of the 4CT... is not of the same degree as that guaranteed by traditional proofs, for this reliability rests on the assessment of a complex set of empirical factors ... The 4CT is a substantial piece of pure mathematics which

can be known by mathematicians only *a posteriori*. Our knowledge must be qualified by the uncertainty of our instruments, computer and program."

Swart (Hanna 1983 : 85) stem nie met Tymoczko saam nie. Volgens hom is gebreke in rekenaarprobleme soortgelyk aan gebreke wat in tradisionele bewyse voorkom. Die gebreke in rekenaarprogramme is menslik en het niks met rekenaars te doen nie. Die bewys van die vierkleurprobleem kan ook opgebreek word in modules. Elke module kan dan apart ondersoek en gekontroleer word. Hy glo dat die bewys geldig is en beweer dat dit selde gebeur dat wiskundiges aandring op 'n streng formele bewys wat letterlik, in terme van byvoorbeeld die Zermelo-Fraenkel versamelingsteorie, aangebied word. Dit word gewoonlik as voldoende geag om dit tot só 'n mate te formaliseer dat dit moontlik is om 'n strenger bewys te lewer indien dit verlang word.

Volgens Vanden Eynden (1989 : 637) het die Franse regsgeleerde, Pierre de Fermat in 1637 beweer dat hy 'n geldige bewys het dat die vergelyking $x^n + y^n = z^n$ geen oplossing vir positiewe heelgetalle het indien $n > 2$ is nie. Fermat het in die kantlyn van 'n kopié van "Diofantiese rekenkunde" 'n aantekening gemaak dat hy 'n ongelooflike elegante bewys het. Daar kon egter na sy dood geen bewys vir hierdie stelling tussen sy korrespondensie gevind word nie.

Fermat sou nooit kon droom dat hierdie stelling teen die einde van die twintigste eeu met rekenaartegnieke aangepak sou word in 'n poging om die probleem op te los nie.

Die bewys van hierdie stelling is egter nogtans, 350 jaar later, sonder die hulp van die rekenaar, suksesvol uitgevoer.

3.8.1 Empiriese beskouings in wiskundige bewyse

Detlefsen en Luker (1980 : 805) gee twee argumente om aan te toon dat die rekenaar-ondersteunde bewys van die vierkleurprobleem nie nuut is nie. Eerstens noem hulle 'n paar rekenaarondersteunde bewyse wat voor die vierkleurprobleem met die hulp van die rekenaar aangepak is, aangesien hulle te lank was om ondersoek te word.

Tweedens poog hulle om die empiriese vertroue van berekeninge as deel van die tradisionele bewys te grondves. Hulle argumenteer dat die enigste verskil tussen die

tradisionele en hedendaagse begrippe van 'n rekenaarondersteunde bewys, die aard van die rekenaar is. Tradisioneel was die rekenaar die mens self, terwyl dit hedendaags 'n IBM 370 - 160A kan wees.

Voorbeelde van rekenaarondersteunde bewyse voor die oplossing van die vierkleur-probleem is redelik volop. Een sodanige voorbeeld wat deur Detlefsen en Luker (1980 : 805) bespreek word is die soeke na Mersenne priemgetalle, waar die Lucas-Lehmer algoritme gebruik is om te kontroleer of 'n sekere getal wel 'n Mersenne priemgetal is of nie. 'n Mersenne priemgetal is 'n priemgetal wat as $2^p - 1$ geskryf kan word, met p 'n priemgetal. Die Lucas-Lehmer algoritme is in 1876 deur die Franse wiskundige, Eduoard Lucas ontwikkel, en in 1930 deur D.H. Lehmer verbeter. Die getal rekenaarstappe wat vir die algoritme benodig word, is eweredig aan die derde mag van die eksponent p van die Mersenne priemgetal. In 1971 het B. Tuckerman die rekenaar gebruik om aan te toon dat $2^{19937} - 1$ 'n priemgetal is. Onlangs is bewys dat $2^{21701} - 1$ 'n priemgetal is. Laasgenoemde bewys het ongeveer 350 uur rekenaartyd in beslag geneem.

Nog 'n voorbeeld van 'n rekenaarondersteunde bewys, die stelling van Pappus van Alexandria (320 n.C.), word deur Cerutti en Davis (1969 : 898) bespreek. Die opskrif van afdeling 7 van hierdie artikel is: "What constitutes a Proof in mathematics?" In die inleiding van hierdie afdeling, merk die outeurs die volgende op:

> "The reader who is not used to thinking about mathematics in terms of machine work may object to the claim that the printout DE = 0 constitutes a proof of Pappus' Theorem.
> What if the programming was erroneous?
> What if the initial data were false?
> What if there was a machine malfunction?
> What if the programmer, in a moment of pique, simply programmed the computer to type out DE = 0, and let it go at that?"

Hierdie is sekerlik geldige besware. Die outeurs beweer egter dat dieselfde besware ook geld in gevalle van konvensionele bewyse. Hulle gaan voort en beweer dat 'n wiskundige bewys onder andere uit 'n eindige string van simbole bestaan. Hierdie

simbole moet een vir een herken en verwerk word deur óf 'n persoon, óf 'n masjien, óf beide. Maar simbole moet fisiese tekens op papier, die brein, of elders besit, en kan nie met volkome sekerheid herken en weergegee word nie. Menslike verwerking is onderhewig aan faktore soos vermoeiing, beperkte kennis of geheue, en die psigologiese begeerte om 'n verlangde resultaat te verkry.

Om rekenaarondersteunde bewyse te ondersoek en te kontroleer, maak Cerutti en Davis (1969 : 904) die volgende opmerking:

> "For machine proofs as well as conventional proofs, one can (a) run the program several times, (b) inspect the program, (c) invite other people to inspect the program or to write and run similar programmes. In this way, if a common result is repeatedly obtained, one's degree of belief in the theorem goes up."

Hulle beweer verder dat hierdie beskouing min aandag in die literatuur ten opsigte van die filosofie van wiskunde kry. Hierdie beskouing mag die indruk wek dat 'n wiskundige bewys in wese ooreenstem met 'n fisiese eksperiment. Dit mag blyk dat die geldigheid van 'n bewys op dieselfde grondslag berus as herhaalde eksperimentele resultate, en dus nie absoluut bo verdenking is nie.

Detlefsen en Luker (1980 : 807) beantwoord die vraag oor die vertroue in rekenaarberekeninge deur 'n welbekende stelling van Gauss te gebruik. Gauss bepaal die som van die eerste n positiewe heelgetalle soos volg:

Stel $S = 1 + 2 + \text{------} + (n-1) + n$

Dan is $S = n + (n-1) + \text{------} + 2 + 1$

$\therefore 2S = (n+1) + (n+1) + \text{---} + (n+1) + (n+1)$

$\therefore 2S = n(n+1)$

$\therefore S = \frac{n}{2}(n+1)$

Detlefsen en Luker (1980 : 808) onderskei vier voorwaardes wat nodig is om vertroue in die berekening te hê, naamlik:

(i) die onderliggende algoritme moet wiskundig betroubaar wees,

(ii) die besondere program wat gebruik word moet 'n korrekte implementering van hierdie algoritme wees,

(iii) die rekenaarbediener moet die program korrek uitvoer, en

(iv) die eindresultaat moet werklik verkry word.

Volgens Detlefsen en Luker (1980 : 808–809) is (i) en (ii) in beginsel onderhewig aan deduktiewe bewysvoering. Daarenteen berus (iii) en (iv) se geldigheid op empiriese beskouings, waar die berekeninge deur byvoorbeeld 'n IBM 370 - 160A óf 'n persoon uitgevoer word.

Uit die bewys van Gauss se stelling is dit duidelik dat die berekeninge om vanaf die waarneming na die resultaat te vorder, op die vier voorwaardes wat hierbo genoem is, berus. Aangesien voorwaardes (iii) en (iv) op empiriese beskouings berus, moet aanvaar word dat die bewys van Gauss se stelling gebruik maak van empiriese premisse.

3.8.2 Kontrolering van rekenaarondersteunde bewyse

Tymoczko, soos aangehaal deur Detlefsen en Luker (1980 : 813–814), beweer 'n bewys is "... a construction that can be looked over, reviewed, and verified by a rational agent ..." and "... can be definitely checked by members of the mathematical community."

'n Deel van die kontrole van Gauss se stelling is die vermoë van een rekenaar (die mens) opgeweeg teen dié van 'n ander (die masjien). Die vertroue in die resultate van die berekeninge is in beide gevalle 'n empiriese aangeleentheid. Die kontrole van die resultate kan wederkerig uitgevoer word.

Die kontrole deur die mens van die rekenaarondersteunde bewys van die vierkleur-probleem deur Appel, Haken en Koch, sal sekerlik vereis dat daar op sekere empiriese premisse gerugsteun sal word. In wese sal so 'n kontrole slegs die verifiëring van een rekenaar, byvoorbeeld 'n IBM 379 - 160A, se resultate deur 'n ander rekenaar (die menslike wiskundige) beteken. Dit mag inderdaad so wees dat die kontrole van die resultate van 'n IBM 370 - 160A rekenaar, deur die mens, minder betroubaar kan wees as die kontrole deur 'n tweede IBM 370 - 160A rekenaar.

Dit is duidelik dat die ondersoek van 'n bewys nie sal waarborg dat empiriese beskouings gesystap sal word nie. Teller (1980 :799) stel dit soos volg:

> "... what we have is a novel way of checking, not a novelty in what is checked."

Die rekenaar hoef egter nie slegs op kontrole ingestel te wees nie. Teller (1980 : 800) gaan voort en skryf soos volg:

> "If a computer is programmed to use the same methods of proof we use, a proof that is produced would be a proof in our old sense. Legitimate worries whether an error might have been made only show that there may be legitimate worries whether the proof is correct, not that the proof is a proof only in some new sense even if no mistakes have been made. To put the point in a very slightly different way, the fact that I cannot follow a complex proof produced by a good mathematician does not show that such a mathematician's complex proof is a proof in a different sense of the word from a proof that I can follow. In the same way, the fact that no mathematician may be able to follow a proof produced by a computer does not show that a computer-produced proof is a proof only in some new sense."

3.9 Waarskynlikheidsbewyse

Na die Appel, Haken en Koch oplossing van die vierkleurprobleem het Tymoczko daarop gewys dat empiriese eksperimente 'n vastrapplek in die wiskunde gekry het. Tymoczko, soos aangehaal deur Shanker (1987 : 130) merk die volgende op:

> "It is a traditional proof with a lacuna, or gap, which is filled by the results of a well-thought-out experiment. This makes the 4CT the first mathematical proposition to be known *a posteriori* and raises again for philosophy the problem of distinguishing mathematics from the natural sciences."

Dit is nie moeilik om te sien dat die oplossing van die vierkleurprobleem wye belangstelling geniet het nie. Shanker (1987 : 130) merk inderdaad op:

"... for herein hangs the fate of our conception of proof, and quite likely as a result, the immediate future of mathematical research."

Ten spyte van die natuurlike vrees dat die outonomie van wiskunde deur rekenaar-wiskunde bedreig word, groei die algemene gevoel onder wiskundiges en filosowe dat die ontwikkeling van rekenaarbewyse en heuristiese programme in suiwer wiskunde die mens dwing om begrippe oor bewyse en wiskundige ontdekking te herformuleer.

Cerutti en Davis (1969 : 903) beweer dat soortgelyke besware teen konvensionele bewyse ingebring kan word.

Wiskundiges is bewus van die feit dat daar oneindig veel wiskundige bewerings is wat onbeslisbaar is, dit wil sê, hulle kan nie as waar, of onwaar bewys word nie. Hierdie feit het die wiskunde filosofies diep en grondig geraak. Wiskundiges het egter geleer om met hierdie feit saam te leef. Met die koms van die rekenaar het die vraag oor beslisbaarheid nuwe betekenis gekry. Navorsers het gevind dat selfs beslisbare bewerings se bewyse so lank kan wees dat dit nooit deur die mens of 'n rekenaar uitgeskryf kan word nie. Om die probleem van lang bewyse te systap, het Michael Rabin van die Hebreeuse Universiteit in Jerusalem voorgestel dat wiskundiges hulle definisies van 'n bewys verslap.

"In many cases it may be possible to 'prove' statements with the aid of a computer if the computer is allowed to err with a predetermined low probability." (Kolata 1976 : 989).

Rabin het hierdie gedagte geïllustreer met 'n voorbeeld van 'n waarskynlikheidsbewys. Rabin het aangetoon dat as die eis vir absolute sekerheid verslap word, dit moontlik is om 'n algoritme te definieer wat, tot 'n sekere graad van betroubaarheid, sal bepaal of 'n willekeurige gekose groot getal 'n priemgetal is of nie. Shanker (1987 : 131) stel dit alternatiewelik soos volg:

"... Rabin's algorithm establishes that the probability of a number's *not* being prime can be virtually insignificant."

Volgens Kolata (1976 : 990) het die belangstelling onder wiskundiges sedert 1970 sterk gegroei om bewyse met die hulp van rekenaars aan te pak. Navorsers het egter gevind dat die bewyse onaanvaarbare hoeveelheid rekenaartyd in beslag neem. In 1975 is konkrete resultate oor die lengtes van rekenaarbewyse verkry. Hulle fokus was op 'n logiese stelsel gebaseer wat die vraag probeer beantwoord oor die uitvoerbare lengte van 'n bewys. Hulle het "geheel en al onmoontlik" om te bewys, beskryf as 'n bewys met 'n rekenaarnetwerk bestaande uit 10^{123} komponente. Dit is die getal proton-grootte objekte wat die waarneembare heelal dig sou vul. Hulle het vervolgens aangetoon dat 'n rekenaar met 10^{123} komponente nodig sal wees om 'n willekeurige bewering bestaande uit 617 of minder simbole te bewys.

Volgens Rabin (Kolata 1976 : 990) is die probleem met bewyse, dat hulle korrek moet wees. As gevolg van hierdie voorwaarde, is die mens daarop ingestel om sy taak te volvoer, terwyl die rekenaar dikwels stop as gevolg van 'n gebrek aan tyd. Rabin het probeer om voorbeelde te vind van gevalle waar die rekenaar nie die taak met absolute sekerheid kon volvoer nie. In sodanige gevalle kan resultate egter verkry word, op voorwaarde dat 'n graad van waarskynlikheid vir foute toegelaat word. Dit het hom tot die geval van priemgetalle gelei. Rabin het 'n waarskynlikheidsalgoritme ontwikkel wat resultate van 'n besondere hoë graad van vertroue in uitermate kort rekenaarperiodes verskaf.

Rabin se algoritme is gebaseer op werke van Miller. Miller het 'n toets vir priemgetalle ontwikkel, en hierdie toets het 'n eenvoudige en effektiewe algoritme ingesluit wat bepaal of 'n gegewe positiewe getal 'n priemgetal is of nie. Miller het gevind dat as 'n getal n 'n priemgetal is, dan sal elke heelgetal tussen 1 en n 'n sekere wiskundige toets slaag. As enige sodanige heelgetal die toets faal, dan is n nie 'n priemgetal nie. Miller het verder aangetoon dat nie alle heelgetalle vanaf 1 tot n getoets hoef te word nie. Dit is voldoende om heelgetalle vanaf 1 tot 'n sekere getal m, afhanklik van n, te toets. As n nie priem is nie, sal daar 'n heelgetal vanaf 1 tot m wees wat die toets sal faal. Miller se toets was relatief vinnig, maar die nadeel was dat die getalle wat getoets moet word toeneem as n baie groot is. Rabin het gevind dat as n nie 'n priemgetal is nie, ten minste die helfte van die heelgetalle vanaf 1 tot n, Miller se toets sal faal. As 'n getal

dus willekeurig tussen 1 en n gekies word, is die kans dat dit Miller se toets nie sal slaag, ten minste ½ as n nie 'n priemgetal is nie. As twee getalle willekeurig gekies word, is die kans ten minste ¾ dat een die toets sal faal indien n nie 'n priemgetal is nie. As 30 getalle willekeurig gekies word, is die kans ten minste $1 - (½)^{30}$ dat een getal die toets nie sal slaag indien n nie 'n priemgetal is nie. Die kans dat 30 willekeurig gekose getalle tussen 1 en n almal die toets sal slaag terwyl n nie 'n priemgetal is nie, is slegs $(½)^{30}$, wat minder as 1 uit 'n biljoen is. Hierdie waarskynlikheids metode betrek relatief min heelgetalle by die toets. Die aantal heelgetalle wat getoets word, is onafhanklik van die grootte van n, maar is afhanklik van die kans om verkeerd te wees. Rabin se waarskynlikheidstoets is uitermate vinniger as eksakte toetse. Eksakte toetse neem so lank dat getalle groter as 10^{60} getoets kan word slegs as hulle spesiale eienskappe besit. Rabin se toets kan getalle van hierdie orde in ongeveer 1 sekonde rekenaartyd toets. As 'n voorbeeld van getalle wat getoets is, het Rabin en Vaughn Perapp aangetoon dat $2^{400}-593$ 'n priemgetal "vir alle praktiese redes" is.

Davis en Kolata, soos aangehaal deur Hanna (1983 : 83) stem saam dat wiskundiges gedwing sal word om hulle begrip van bewys te wysig en die rol van waarskynlikheid sal moet erken. Hierdie nuwe benadering van bewyse is dieselfde as die erkenning dat wiskunde sekere aspekte van die empiriese wetenskappe deel.

> "A proof, in their view, is not a device which permits mathematicians to certify a theorem as absolutely and universally valid, but rather a balance between convincing oneself psychologically of the truth of a statement ..." (Hanna 1983 : 83).

Detlefsen en Luker (1980 : 819) stel dit duidelik dat daar geen rede bestaan waarom rekenaarbewyse onaanvaarbaar hoef te wees nie. Die graad van betroubaarheid ten opsigte van die talle ingewikkelde resente wiskundige bewyse word wel beperk deur die feit dat die waarskynlikheid van 'n fout toeneem met die kompleksiteit van die bewys. Maar in meer tradisionele bewyse word sekerheid en oortuiging beperk as gevolg van die feilbaarheid van die mens, die moontlikheid van inkonsistente aksiomas, en die wete dat foute algemeen in die geskiedenis van wiskunde voorkom.

3.10 Enkele opmerkings

Met die draai van die eeu was daar 'n ontsaglike groei in die hoeveelheid wiskunde. Daar was derhalwe ernstige pogings om wiskunde op 'n vaste grondslag te vestig. Sommige van die begrippe was taamlik problematies. In hierdie verband word veral gedink aan begrippe wat afhanklik van die begrip oneindigheid was. Ook was daar die begrip van "infinitesimaal".

Aan die een kant was daar die begrip van "oneindig klein". Volgens Pohlers (1989 : 1) is die begrip geëlimineer met die invoering van limietprosesse. Dit was 'n ongeëwenaarde bydrae tot die grondslae van die wiskunde.

Aan die ander kant was daar ook begrippe wat, ten minste implisiet, afhanklik van die begrip "oneindig groot" was. Volgens Pohlers (1989 : 1) was Cantor in sy navorsing oor trigonometriese reekse herhaaldelik gekonfronteer met sulke begrippe. Dit het daartoe aanleiding gegee dat Cantor 'n totaal nuwe wiskundige teorie oor oneindigheid ontwikkel het, naamlik versamelingsteorie. Die hoofkenmerk van versamelingsteorie is die beginsel wat die vorming van 'n kolleksie van moontlik oneindig veel objekte toelaat. Cantor het so 'n kolleksie 'n versameling genoem.

Dit het aanleiding gegee tot die "krisis" in die grondslae van die wiskunde soos in hoofstuk 2 opgemerk is. Een lastige teenstrydigheid, afgesien van dié wat in hoofstuk 2 genoem is, was die keuseaksioma:

Vir enige familie $(S_k)_{k\in I}$ van nie-leë versamelings is daar 'n keusefunksie
$f : I \rightarrow \cup \{S_k \mid k \in I\}$ só dat $f(k) \in S_k$ vir alle $k \in I$.

Hierdie aksioma het 'n paradoksale moontlikheid om enige versameling te welorden. 'n Versameling F is welgeörden as sy elemente x in 'n bepaalde opeenvolging toeneem vanaf 'n kleinste element x_1, sodat die volgende twee voorwaardes geld:

1 Daar is 'n kleinste element x_1 in F.

2 As G enige deelversameling van F is, en as F een of meer elemente bevat wat groter as enige van die elemente van G is, dan bestaan daar 'n element x^1 in F wat direk volg op al die elemente van G, sodat daar geen element van F tussen die elemente van G en x^1 lê nie.

Niemand kon die welordening van reële getalle voorstel nie, en Hilbert het gereken dat dit uiters gewens sal wees om 'n direkte bewys vir hierdie probleem te hê.

Vandag is dit bekend dat daar geen elementêre konstruksie vir die welordening van die reële getalle bestaan nie. Enige welordening van die reële getalle het dieselfde graad van konstruksie as die keusefunksie self. Die bestaan van die keusefunksie is egter nie bewysbaar uit die Zermelo-Fraenkel aksiomas nie. Al hierdie feite het bygedra tot die onsekerheid van die begrip versameling onder die wiskundiges. Dit was egter nie moontlik om Cantor se ontdekkings summier te ignoreer nie. Hermann Weyl het in 'n artikel "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik" probeer om wiskundiges daarvan te oortuig dat hierdie probleme oor die grondslae van die wiskunde, nie geïsoleerde gevalle is nie, maar analise ook aan die hart raak. Dit was hy wat die term "krisis" gebruik het. In sy boek "Das Kontinuum" het hy 'n ontwikkeling van wiskunde voorgestel wat die konstruksie van onbeperkte versamelings vermy het.

In meer moderne terminologie kan gesê word dat hy 'n predikatiewe ontwikkeling van wiskunde voorgestaan het. Wiskundiges soos Brouwer het reeds die logiese basis van wiskunde in twyfel getrek. Hulle bekommernis was die wet van die uitgeslote derde. Met die hulp van die wet van die uitgeslote derde is dit moontlik om die bestaan van objekte te bewys sonder om hulle eksplisiet te konstrueer. Brouwer het 'n ontwikkeling van wiskunde voorgestel wat berus het op die basis van alternatiewe intuïtiewe beginsels, en wat die wet van die uitgeslote derde uitsluit. Hulle formalisering onder leiding van Heyting, is nou bekend as intuïsionistiese logika.

Beide die benaderings van Weyl en Brouwer se beperkings op wiskunde was star en onbuigsaam. Hilbert, een van die mees prominente wiskundiges van die tyd, was egter nie te vinde om 'n teoretiese grondslag te aanvaar wat bestaande wiskunde sou uitsluit nie.

Die krisis was vir hom 'n nagmerrie. Na sy mening was wiskunde dié wetenskap, die model vir alle wetenskappe, waarvan die waarhede ondubbelsinnig met behulp van definisies en onfeilbare inferensies bewys is. Hierdie waarhede was gevolglik universeel geldig. Hilbert het geglo die posisie van wiskunde was in gevaar, en wou die wiskunde behou het soos dit was. Hy was in besonder onwillig om die teorie van Cantor te verwerp. Na sy mening was die teorie oor die transfiniete ordinale een van die grootste wiskundige prestasies van die mens. Daarom het hy 'n program ontwikkel om wiskunde in sy huidige vorm te bewaar.

Volgens Pohlers (1989 : 3) het Hilbert voorgestel dat stap II van sy program, naamlik "Beweistheorie", ofte wel, bewysteorie, in 'n nuwe wiskundige teorie uitgevoer moet word. Volgens Hilbert moes bewysteorie oortuigde redenering gebruik in plaas van formele wiskundige inferensies. Hilbert was ten volle bewus van die feit dat die redenasie van bewysteorie bo kritiek verhewe moes wees. Hy het derhalwe 'n bewysteorie verlang wat resultate bo verdenking moes plaas. Hy het voorgestel dat slegs eindige metodes gebruik moet word. Met eindige metodes het hy bedoel daardie metodes waarsonder geen redenering of wetenskaplike handeling moontlik is nie. Hierdie metodes was egter vaag en onduidelik aangesien Hilbert nooit sy eindige metodes presies gedefinieer het nie.

Pohlers (1989 : 3) interpreteer bogenoemde metodes as kombinatoriese redenasies in eindige domeine. Sommige van Hilbert se studente, soos Ackermann, von Neuman en Bernays het kort voor lank konkrete resultate gekry. Hulle het die prinsipe van Hilbert gevolg deur eers die wiskundige gereedskap wat vir die oplossing van 'n algemene probleem nodig is, te ontwikkel deur die studie van spesiale gevalle van die probleem. Vervolgens het hulle deelstelsels van elementêre rekenkunde aangepak en daarin geslaag om konsistensiebewyse vir deelstelsels te kry wat nie die skema van volledige induksie bevat het nie. Dit wou voorkom asof dit net 'n kwessie van tegniese verfyning is om hierdie konsistensiebewyse uit te brei na stelsels wat die volledige induksieskema bevat.

Alle pogings hiertoe was egter onsuksesvol. Volgens Pohlers (1989 : 3–4) kon hierdie onsuksesvolle pogings nie voor die deur van die navorsers gelê word nie. Die rede het duidelik geword na die publikasie van Kurt Gödel se artikel:

"Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme."

In hierdie artikel het Gödel sy beroemde stellings bewys wat min of meer die volgende sê:

- In enige formele stelsel wat sekere natuurlike vereistes bevredig, is dit moontlik om sinne te formuleer wat waar is in die standaardmodel, maar terselfdertyd onbeslisbaar in die formele stelsel is. Dit beteken dat nóg die sin, nóg sy negering bewysbaar in die formele stelsel is.

- Die konsistensiebewys vir enige formele stelsel wat sekere vereistes bevredig, kan nie in die stelsel self geformaliseer word nie.

Dit mag voorkom asof Gödel se stellings die einde van Hilbert se program beteken het. Die eerste stelling toon inderdaad aan dat dit nie moontlik is om al die wiskunde te aksiomatiseer nie. Dit kan egter geremedieer word deur op te let dat dit inderwaarheid nie nodig is om alle moontlike wiskunde te aksiomatiseer nie. Dit is welbekend dat byna alle alledaagse wiskunde, en, met die uitsondering van die kontinuumhipotese, waarskynlik alle wiskunde wat Hilbert in gedagte gehad het, in een enkele formele stelsel geformaliseer kan word, naamlik die Zermelo-Fraenkel versamelingsteorie tesame met die keuseaksioma.

Talle dele van die wiskunde kan selfs in heelwat swakker stelsels geformaliseer word. Die tweede stelling van Gödel was egter verdoemend vir die program van Hilbert. Aangesien die metodes waarsonder geen redenering of wetenskaplike handeling moontlik is nie, dit is kombinatoriese redenasies in eindige domeine, in wiskunde beskikbaar moet wees, sal enige redelike aksiomatisering die formalisering van Hilbert se eindige metodes toelaat. Daar is dus geen konsistensiebewys vir 'n aksiomatisering vir sterker dele van die wiskunde nie, in besonder daardie dele wat die skema vir volledige induksie bevat.

Gelukkig vir die bewysteorie, het navorsers van die jare dertig hierdie resultate nie so ernstig opgeneem nie. Hilbert en sy volgelinge was bewus van die resultate van Gödel.

Alhoewel Bernays getwyfel het aan die uitvoerbaarheid van die eindige konsistensiebewyse, het hy ontken dat Gödel se resultate die onmoontlikheid daarvan impliseer. Pohlers (1989 : 4) vermoed dat die rede die gesag was wat Hilbert ingeboesem het asook die vaagheid van sy program. Wiskundiges het egter steeds voortgegaan met die soeke na konsistensiebewyse. Gentzen het daarin geslaag om die konsistensie van die elementêre getalleteorie te bewys.

Die punt is egter dat dit maklik is om die konsistensie van die getalleteorie te bewys. Daar moet eenvoudig bewys word dat daar 'n model vir die getalleteorie bestaan. Wat is nou die voordeel van Gentzen se konsistensiebewys? Die konstruksie van die model self benodig 'n sekere raamwerk, byvoorbeeld versamelingsteorie. Wat dus deur 'n konsistensiebewys via 'n konstruksie van 'n model in versamelingsteorie, of selfs 'n swakker teorie, verkry word, is dat die konsistensie van versamelingsteorie, die konsistensie van getalleteorie tot gevolg het. Gentzen se bewys gee egter baie meer informasie. Pohlers (1989 : 5−6) noem twee gevolge van Gentzen se bewys:

- Die induksie in Gentzen se bewys is slegs nodig vir formules van baie beperkte kompleksiteit, en

- die feit dat induksie langs die welordening die enigste nie-eindige middele in Gentzen se bewys is, suggereer ook die gebruik van hierdie welordening as 'n maat vir die transfiniete inhoud van getalleteorie.

3.11 Samevatting

Wiskundiges stem saam dat 'n bewys 'n soort skema sal hê, en dat elke bewys 'n metode is om bewerings (stellings) af te lei uit ander bewerings, onderhewig aan 'n versameling reëls. In die soeke na 'n bewys, speel die formele logika 'n klein rol, terwyl kreatiwiteit van die mens 'n oorheersende aktiwiteit is. Dit is belangrik dat alle bewyse gekontroleer kan word, hetsy deur die mens, of deur die mens met die hulp van 'n rekenaar. Die rekenaar kan van onskatbare waarde wees in lang bewyse, en lewer inderdaad 'n bydra tot die uitbreiding en ontwikkeling van die wiskunde.

Hierdie hoofstuk is afgesluit met 'n paar belangrike opmerkings. Indien dit redelik seker wil wees dat steeds aanvaarbare wiskunde beoefen word, blyk dit dat wiskundige aktiwiteite tot baie eenvoudige begrippe beperk moet word, of die argumente moet geformaliseer word. Omdat wiskundige begrippe nie noodwendig eenvoudig hoef te wees nie, moet op 'n formaliseringsproses staatgemaak word.

Vervolgens sal in die volgende twee hoofstukke 'n kunsmatige taal ontwerp word. Daarin kan die teorieë van groepe, ringe, versamelings, kategorieë, ensovoorts geformaliseer word.

HOOFSTUK 4: PROPOSISIELOGIKA

4.1 Inleiding

Logika bestaan onder andere uit afleidings. Om afleidings in 'n taal te kan maak, moet die betekenis van simbole in die taal eenduidig wees. In hierdie hoofstuk word die proposisielogika bestudeer. Dit is 'n eenvoudige simboliese taal wat uit sinne en konnektiewe bestaan. Vir die ontwikkeling van die proposisielogika is besluit om die benadering van Hamilton (1990 : 1-44) te volg.

4.2 Bewerings en konnektiewe

'n Sin waaraan 'n waarheidswaarde waar (W) of onwaar (V) toegevoeg kan word, sal 'n *bewering* genoem word. *Eenvoudige* bewerings sal met hoofletters A, B, C ... aangedui word. 'n *Saamgestelde* bewering ontstaan met die samevoeging van twee eenvoudige bewerings. Hierdie samevoeging word met behulp van 'n *konnektief* bewerkstellig.

Die mees algemene konnektiewe word in die volgende tabel verskaf:

LINGUISTIESE VORM	LOGIESE VORM
nie A	$\sim A$
A en B	$A \wedge B$
A óf B	$A \vee B$
As A, dan B	$A \Rightarrow B$
A as en slegs as B	$A \Leftrightarrow B$

Voorbeelde van eenvoudige bewerings is die volgende:

- A: Napoleon is dood.
- B: Die mense is verheug.

'n Voorbeeld van 'n saamgestelde bewering is die volgende:
Napoleon is dood en die mense is verheug.

Met simbole sal die saamgestelde bewering soos volg lyk:

$$A \wedge B$$

So 'n saamgestelde bewering in terme van simbole is van groot belang. Dit stel 'n persoon in staat om afleidings beter te analiseer.

Die volgende is 'n voorbeeld van 'n argument.

Voorbeeld

As Sokrates 'n man is, dan is Sokrates sterflik.
Sokrates is 'n man.
$\therefore$ Sokrates is sterflik.

Hierdie argument is logies bevredigend. Beskou egter die volgende argument:

Sokrates is 'n man.
$\therefore$ Sokrates is sterflik.

Dit mag voorkom of die gevolgtrekking uit die premis volg, maar dit is slegs die geval as gevolg van die betekenis van die woorde "man" en "sterflik", en nie as gevolg van 'n logiese afleiding nie. In terme van simbole lyk die argumente soos volg:

$A \Rightarrow B$	A
A	$\therefore B$
$\therefore B$	

Die argument met die eerste "vorm" sal as geldig beskou word; so ook enige ander argument van dieselfde vorm. Argumente van die tweede vorm sal as ongeldige argumente beskou word. Die studie sal dus ingestel wees op die "vorms" van argumente en bewerings. Die simbole p, q, r, ... sal vir *beweringveranderlikes* gebruik word. Hierdie simbole sal willekeurige en ongespesifiseerde eenvoudige bewerings voorstel. Die veranderlikes maak dit moontlik om algemene eienskappe van bewerings en konnektiewe te beskryf.

4.3 Waarheidsfunksies en waar- onwaartabelle

Die semantiek van die konnektiewe kan met behulp van waar- onwaartabelle beskryf word.

4.3.1 Negering

Die negering van 'n bewering A word met ~ A aangedui en sal op A die volgende invloed hê:

As A waar is, dan is ~ A onwaar.
As A onwaar is, dan is ~A waar.
Die betekenis van A is irrelevant.

Hierdie semantiese reël kan soos volg met 'n waar- onwaartabel voorgestel word:

p	~ p
W	V
V	W

Die tabel verskaf 'n waarheidswaarde van ~ p, gegee die waarheidswaarde van p. Die konnektief ~ gee aanleiding tot 'n *waarheidsfunksie*, $f^{\sim}$, wat 'n afbeelding is van die versameling {W, V} op homself.

Dus $f^{\sim}(W) = V$ en $f^{\sim}(V) = W$.

4.3.2 Konjunksie

Konjunksie sal met die simbool $\wedge$ voorgestel word.
Vir $\wedge$ sal die volgende uitkomste geld:

As A waar en B ook waar is, dan is A $\wedge$ B waar.
As A waar en B onwaar is, dan is A $\wedge$ B onwaar.
As A onwaar en B waar is, dan is A $\wedge$ B onwaar.
As A onwaar en B onwaar is, dan is A $\wedge$ B onwaar.

Die logiese simbool $\wedge$ word dus volkome bepaal deur die volgende waar- onwaartabel:

p	q	p $\wedge$ q
W	W	W
W	V	V
V	W	V
V	V	V

Die konnektief $\wedge$ definieer dus 'n waarheidsfunksie $f^{\wedge}$ soos volg:

$f^{\wedge}$ (W, W) = W, $f^{\wedge}$ (W, V) = V, $f^{\wedge}$ (V, W) = V, $f^{\wedge}$ (V, V) = V.

4.3.3 Disjunksie

A $\vee$ B se linguistiese betekenis word as "A óf B" aangedui. Hiermee sal bedoel word A of B of beide. Hierdie simbool sal soos volg optree:

As A waar en B waar is, dan is A $\vee$ B waar.
As A waar en B onwaar is, dan is A $\vee$ B waar.
As A onwaar en B waar is, dan is A $\vee$ B waar.
As A onwaar en B onwaar is, dan is A $\vee$ B onwaar.

Die waar- onwaartabel lyk soos volg:

p	q	p $\vee$ q
W	W	W
W	V	W
V	W	W
V	V	V

'n Funksie $f^{\vee}$ word dus volkome deur die bostaande waar- onwaartabel bepaal.
Dus volg dat $f^{\vee}$ (W, W) = W, $f^{\vee}$ (W, V) = W, $f^{\vee}$ (V, W) = W en $f^{\vee}$ (V, V) = V.

4.3.4 Voorwaardelike konnektief

In die voorwaardelike bewering A $\Rightarrow$ B word A die *antesedent* genoem, terwyl B die *gevolgtrekking* genoem word. 'n Voorwaardelike bewering A $\Rightarrow$ B word as onwaar

geag as en slegs as A waar en B onwaar is. Die waar- onwaartabel word soos volg gedefinieer:

p	q	p ⇒ q
W	W	W
W	V	V
V	W	W
V	V	W

4.3.5 Ekwivalensie

Die simbool ⇔ word gebruik om ekwivalensie voor te stel. Die waar- onwaartabel vir A ⇔ B lyk soos volg:

p	q	p ⇔ q
W	W	W
W	V	V
V	W	V
V	V	W

4.4 Linguistiese betekenisse

Die konnektiewe ⇒ en ⇔ kan linguisties soos volg geïnterpreteer word:

1. p ⇒ q
   - (a) As p, dan q (q as p).
   - (b) p impliseer q (q word deur p geïmpliseer).
   - (c) Wanneer ook al p, dan q (q wanneer ook al p).
   - (d) p is sterker as q (q is swakker as p).
   - (e) q behalwe as ~p (~p behalwe as q).
   - (f) As nie q, dan nie p (p slegs as q).
   - (g) Nie q impliseer nie p (nie p word geïmpliseer deur nie q).
   - (h) p is voldoende vir q (~q is voldoende vir ~p).
   - (i) q is nodig vir p (~p is nodig vir ~q).
   - (j) nie p óf q.

2. $p \Leftrightarrow q$

   (a) p is ekwivalent aan q.

   (b) p as en slegs as q.

   (c) p is nodig en voldoende vir q.

   (d) p impliseer q en q impliseer p.

   (e) As p, dan q en as q, dan p.

3. Die volgende verskeidenheid van bewerings en hulle simboliese weergawes is ook geldig:

	Bewering	Simboliese weergawe
(a)	p of q, maar nie beide nie.	$\sim (p \Leftrightarrow q)$
(b)	p, maar nie q nie.	$p \wedge \sim q$
(c)	p, behalwe as q.	$\sim q \Rightarrow p$

4.5 Definisie

'n *Beweringvorm* is 'n uitdrukking met beweringveranderlikes en konnektiewe wat met behulp van die volgende reëls gevorm word:

(i) Enige beweringveranderlike is 'n beweringvorm.

(ii) As A en B twee beweringvorms is, dan is $\sim A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ en $A \Leftrightarrow B$ ook beweringvorms.

4.6 Voorbeeld

$((p \wedge q) \Rightarrow (\sim (q \vee r)))$ is 'n beweringvorm. Uit (i) van Definisie 4.5 volg dat p, q en r beweringvorms is. Uit (ii) volg dat $(p \wedge q)$ en $(q \vee r)$ beweringvorms is. Uit (ii) volg dat $(\sim (q \vee r))$ 'n beweringvorm is. Uit (ii) volg dat $((p \wedge q) \Rightarrow (\sim (q \vee r)))$ 'n beweringvorm is.

'n Waar-onwaartabel is 'n grafiese voorstelling van 'n waarheidsfunksie. Dus het elke beweringvorm 'n waarheidsfunksie.

4.7 Voorbeeld

$((\sim p) \vee q)$

p	q	$(\sim p)$	$((\sim p) \vee q$
W	W	V	W
W	V	V	V
V	W	W	W
V	V	W	W

Hierdie waarheidsfunksie stem ooreen met die waarheidsfunksie wat deur $p \Rightarrow q$ bepaal word.

'n Beweringvorm met n verskillende beweringveranderlikes sal 'n waar-onwaartabel met 2^n rye oplewer.

4.8 Definisie

(a) 'n Beweringvorm is 'n *toutologie* as dit 'n waarheidswaarde W het vir elke toevoeging van waarheidswaardes aan die beweringveranderlikes wat daarin voorkom.

(b) 'n Beweringvorm is 'n *teenstrydigheid* as dit 'n waarheidswaarde V het vir elke moontlike toevoeging van waarheidswaardes aan die beweringveranderlikes wat daarin voorkom.

4.9 Voorbeelde

(a) $(p \vee (\sim p))$ is 'n toutologie

(b) $(p \wedge (\sim p))$ is 'n teenstrydigheid.

(c) $(((\sim p) \Rightarrow q) \Rightarrow (((\sim p) \Rightarrow (\sim q)) \Rightarrow p))$ is 'n toutologie.

Die metode om te bepaal of 'n gegewe bewering 'n toutologie of teenstrydigheid is, is om 'n waar-onwaartabel te konstrueer.

4.10 Bekende toutologieë

Die meeste van die volgende toutologieë word deur Rubin (1990 : 30) verskaf. Hierdie lys is aangevul uit Morash (1987 : 70).

Indien p, q en r willekeurige formules aandui, sal die volgende almal toutologieë wees:

1	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	(Modus ponens)
2	$\sim q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$	(Modus tollendo tollens)
3	$\sim p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$	(Modus tollendo ponens)
4	$p \wedge q \Rightarrow p$	(Reël van vereenvoudiging)
5	$p \Rightarrow p \vee q$	(Additiewe reël)
6	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$	(Adjunksie reël)
7	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	(Reël van hipotetiese sillogisme)
8	$(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	(Reëls van alternatiewe bewys)
9	$(\sim p \Rightarrow q \wedge \sim q) \Rightarrow p$ $p \wedge \sim p \Rightarrow q$	(Reël van absurditeit)
10	$p \vee \sim p$	(Reël van die uitgeslote derde)
11	$\sim (p \wedge \sim p)$	(Reël van teenstrydigheid)
12	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	(Kommutatiewe reëls)
13	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	(Assosiatiewe reëls)
14	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(Distributiewe reëls)
15	$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	(De Morgan se reëls)
16	$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$	(Reël van dubbele negering)

17	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$	(Reëls vir die voorwaardelike)
18	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$	(Reëls vir ekwivalensie)
19	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	(Idempotente reëls)
20	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ $(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim p)$ $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow p)$	(Kontrapositiewe reëls)
21	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$	(Uitvoer-invoer reël)
22	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	(Absorpsie reëls)
23	$(p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \Rightarrow r)$	(Reël vir afleiding van gevolgtrekking $q \vee r$)

4.11 Argumente en geldigheid

Die volgende argumentvorm is reeds behandel:

$p \Rightarrow q$

p

$\therefore q$

Oor die algemeen is 'n argumentvorm 'n eindige ry van beweringvorms, waarvan die laaste een die gevolgtrekking is, terwyl die res as die premisse bekend staan. Deur waarheidswaardes aan beweringveranderlikes in 'n argumentvorm toe te ken, mag gevind word dat die gevolgtrekking, sowel as een of meer premisse onwaar is. Die feit dat die gevolgtrekking onwaar kan wees, is irrelevant. Al wat van 'n geldige argument vereis sal word, is dat vir enige toevoeging van waarheidswaardes aan beweringveranderlikes, die gevolgtrekking die waarheidswaarde W sal hê as die premisse almal die waarheidswaarde W het.

4.12 Definisie

Die argumentvorm A_1, A_2, ..., A_n; $\therefore$ A is *ongeldig* as dit moontlik is om waarheidswaardes aan beweringveranderlikes toe te ken op só 'n wyse dat as elke A_1, A_2, ..., A_n die waarheidswaarde W het, die gevolgtrekking A die waarheidswaarde V het. Andersins is die argumentvorm *geldig*.

Voorbeeld

Hamilton (1990 : 23) bepaal vervolgens of die argumentvorm (p ⇒ q), p; $\therefore$ q geldig is of nie.

'n Waar-onwaartabel moet gekonstrueer word.

p	q	(p ⇒ q)
W	W	W
W	V	V
V	W	W
V	V	W

In slegs die eerste ry het al die premisse die waarheidswaarde W. In hierdie ry het die gevolgtrekking ook die waarheidswaarde W. Die argumentvorm is gevolglik geldig.

Voorbeeld

Bepaal die geldigheid van die argumentvorm:

(p ⇒ q), ((~ q) ⇒ r), r; $\therefore$ p.

Konstrueer 'n waar-onwaartabel:

(p ⇒ q)			((~ q) ⇒ r)			r	p	
W	W	W	V W	W	W	W	W	←
W	W	W	V W	V	V	V	W	
W	V	V	W V	W	W	W	W	
W	V	V	W V	W	V	V	W	
V	W	W	V W	W	W	W	V	←
V	W	W	V W	V	V	V	V	
V	W	V	W V	W	W	W	V	←
V	W	V	W V	W	V	V	V	

Die rye wat met die pyle aangedui is, is die rye waar al die premisse die waarheidswaarde W aanneem. In die vyfde en sewende rye het die gevolgtrekking 'n waarheidswaarde van V. Gevolglik is die argumentvorm ongeldig.

Hamilton (1990 : 25) bewys vervolgens die volgende proposisie wat die verwantskap tussen argumente en impliksasies eksplisiet stel.

4.13 Proposisie

Die argumentvorm $A_1, A_2, ..., A_n;\ \therefore A$ is geldig as en slegs as die beweringvorm $((A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \Rightarrow A)$ 'n toutologie is.

Bewys

Veronderstel dat $A_1, A_2, ..., A_n;\ \therefore A$ 'n geldige argumentvorm is, en dat $((A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \Rightarrow A)$ nie 'n toutologie is nie. Dan bestaan daar 'n toevoeging van waarheidswaardes aan die beweringveranderlikes só dat $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n)$ die waarheidswaarde W aanneem, terwyl A die waarheidswaarde V het. Vir hierdie toevoeging het elke A_i, $1 \leq i \leq n$, die waarde W, terwyl A die waarde V het. Dit is teenstrydig met die geldigheid van die argumentvorm, en dus moet $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n)$ 'n toutologie wees.

Veronderstel nou omgekeerd, dat $((A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \Rightarrow A)$ 'n toutologie is, en dat $A_1, A_2, ..., A_n;\ \therefore A$ nie 'n geldige argumentvorm is nie. Dan bestaan daar 'n toevoeging van waarheidswaardes wat elke A_i, $1 \leq i \leq n$, die waarde W gee, terwyl A die waarde V het, sodat $((A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \Rightarrow A)$ die waarde V het. Dit is teenstrydig met die veronderstelling dat die beweringvorm 'n toutologie is. Gevolglik is $A_1, A_2, ..., A_n;\ \therefore A$ 'n geldige argumentvorm. □

Hierdie bewys deur *reductio ad absurdum* is op hierdie stadium geregverdig. As dit bekend is dat die argumentvorm geldig is, terwyl dit ook bekend is dat die gevolgtrekking onwaar is, dan moet ten minste een van die premisse onwaar wees. As dit bekend is dat al die premisse op een na (die veronderstelde een) waar is, dan is die geldige afleiding dat hierdie veronderstelde een die een is wat onwaar is.

Vervolgens gaan 'n formele deduktiewe stelsel ontwikkel word. Dit is 'n proses om die begrip bewys te abstraheer. Die woord "formeel" word gebruik in gevalle waar simbole gebruik word, en waar die gedrag en eienskappe van die simbole volledig bepaal word deur 'n gegewe versameling van reëls. In 'n formele stelsel het die simbole geen betekenis nie.

4.14 Die sintaksis van L

Die formele stelsel L van die proposisielogika word soos volg gedefinieer:

1. 'n Alfabet van simbole (oneindig veel):
   $\sim, \Rightarrow, (,), p_1, p_2, p_3, \ldots$

2. 'n Versameling van goedgevormde formules (afgekort met gfs). In plaas daarvan om die versameling eksplisiet te spesifiseer, word 'n induktiewe reël van drie dele verskaf:

   (i) p_i is 'n goedgevormde formule (gf) vir elke $i \geq 1$.
   (ii) As A en B gfs is, dan is $(\sim A)$ en $(A \Rightarrow B)$ ook gfs.
   (iii) Die versameling van alle gfs word deur (i) en (ii) voortgebring.

3. Aksiomas.
   Daar is oneindig veel aksiomas, en dus kan hulle nie almal gelys word nie. Hulle kan egter almal met behulp van drie *aksiomaskemas* soos volg gespesifiseer word:

   Vir enige gfs A, B en C sal die volgende aksiomas in L wees:
   (L1) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$.
   (L2) $((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$.
   (L3) $(((\sim A) \Rightarrow (\sim B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$.

   Elke aksiomaskema het oneindig veel *instansies* as A, B en C oor al die gfs van L varieer.

4. Deduksiereël

Daar is slegs een deduksiereël in L naamlik *modus ponens* (afgekort met MP). Uit A en $(A \Rightarrow B)$, is B 'n direkte gevolgtrekking, waar A en B enige gfs in L is.

Die simbole $\wedge$, $\vee$ en $\Leftrightarrow$ kom nie in die alfabet van L voor nie. Dus is uitdrukkings waarin hulle voorkom, nie deel van L nie. Dit is egter duidelik dat $\{\sim, \Rightarrow\}$ 'n voldoende versameling van konnektiewe is sodat elke waarheidsfunksie deur een of ander gf van L voorgestel sal word, en elke beweringvorm logies ekwivalent aan een of ander gf van L sal wees. Die beperkte aantal konnektiewe maak die taal ook eenvoudiger.

Die deduksiereël is redelik voor-die-hand-liggend. Die grondslag van 'n deduksie, is die aksiomas. Laasgenoemde is almal toutologieë. Vervolgens word die aard van 'n afleiding in L ondersoek.

4.15 Definisie

'n *Bewys* in L is 'n ry van gfs, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ só dat vir elke i, $1 \leq i \leq n$, óf A_i 'n formule van L is, óf A_i volg uit twee vorige lede, sê A_j en A_k, $j < i$, $k < i$, as 'n direkte gevolg, deur die gebruik van die reël MP van deduksie. Só 'n bewys sal bekend staan as 'n *bewys van* A_n in L, en A_n sal 'n *stelling* van L genoem word.

4.16 Opmerkings

- In definisie 4.15 moet A_j en A_k noodwendig van die vorms B en $B \Rightarrow A_i$ wees, en omgekeerd.

- As $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 'n bewys in L is, en $k < n$, dan is $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ook 'n bewys in L, en derhalwe is A_k 'n stelling van L.

- Aksiomas van L is ook stellings van L. Hulle bewyse is eenterm rye in L.

- 'n Bewys in L is 'n deduksie wat by die aksiomas begin.

4.17 Voorbeeld

Hamilton (1990 : 30) verskaf die volgende ry as 'n bewys in L.

1.	$(p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_1))$	(instansie van (L1))
2.	$((p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_1)) \Rightarrow ((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_1)))$	(L2)
3.	$((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_1))$	(Uit 1, 2 deur MP)

'n Meer algemene begrip van deduksie uit 'n gegewe versameling van gfs is nodig.

4.18 Definisie

Veronderstel Γ is 'n versameling van gfs van L, wat aksiomas of stellings van L mag wees of nie. 'n ry $A_1, A_2, ..., A_n$ van gfs van L is 'n *deduksie uit* Γ as vir elke i, $1 \leq i \leq n$, een van die volgende geld:

(a) A_i is 'n aksioma van L,
(b) A_i is 'n element van Γ, of
(c) A_i volg uit twee vorige lede van die ry as 'n direkte gevolg deur die gebruik van MP.

So 'n deduksie van Γ is slegs 'n "bewys" waar die elemente van Γ as tydelike aksiomas beskou word. Die laaste lid, A_n, van 'n ry wat 'n deduksie uit Γ is, is *afleibaar uit* Γ, of is 'n gevolgtrekking uit Γ in L.

As 'n gf A die laaste lid van 'n deduksie uit Γ is, word gesê Γ *bring A voort*, en word geskryf $\Gamma \vdash A$.

Dit is belangrik om op te let dat $\vdash$ nie 'n simbool van L is nie. Dus sal enige uitdrukking wat hierdie simbool bevat, nie 'n deel van L wees nie. Hamilton (1990 : 30) verskaf die volgende belangrike voorbeeld:

4.19 Voorbeeld

Die volgende is 'n deduksie in L:

$\{A, (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))\} \vdash (B \Rightarrow C)$, waar A, B en C gfs van L is.

1.	A	(veronderstelling)
2.	$(B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(veronderstelling)
3.	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$	(L1)
4.	$(B \Rightarrow A)$	(1, 3, MP)
5.	$((B \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	(L2)
6.	$((B \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow C))$	(2, 5, MP)
7.	$(B \Rightarrow C)$	(4, 6, MP).

Vervolgens sal daar op twee vlakke voortgegaan word. Die woord "stelling" sal gebruik word in die geval van gfs in formele stelsels met bewyse in die sin van definisie 4.15. Die woord "metastelling" word soms gebruik vir voorbeelde soos voorbeeld 4.19, wat resultate oor formele stelsels is. Stellings is dus gfs van 'n besondere soort, terwyl metastellings in gewone wiskundige taal geskryf is. Die woord proposisie word dus vir metastellings gebruik.

Die volgende stellings word as voorbeeld deur Hamilton (1990 : 31) bewys, en word hier net gemeld:

4.20 Voorbeeld

Vir enige gfs A en B van L volg

(a) $\vdash (A \Rightarrow A)$

(b) $\vdash (\sim B \Rightarrow (B \Rightarrow A))$.

Een metode om bewyse van stellings eenvoudiger te maak is om gebruik te maak van gfs wat reeds in L bewys is. Nog 'n metode is om algemene metastellings te gebruik. Die belangrikste hulpmiddel is egter die volgende stelling:

4.21 Proposisie (Die deduksiestelling)

As $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, dan $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$, waar A en B gfs in L is, en Γ 'n versameling van gfs van L is. In besonder kan Γ die leë versameling wees.

Bewys

Die bewys volg deur induksie op die aantal gfs in die deduktiewe ry waar B volg uit $\Gamma \cup \{A\}$. Veronderstel eerstens dat hierdie ry slegs een lid het. Daardie lid moet B self wees. Dus is B 'n aksioma van L óf B is 'n lid van $\Gamma \cup \{A\}$.

Geval 1: B is 'n aksioma van L.
Dan is die volgende 'n deduksie van $(A \Rightarrow B)$ uit Γ.

1.	B	(aksioma van L)
2.	$(B \Rightarrow (A \Rightarrow B))$	(L1)
3.	$(A \Rightarrow B)$	(1, 2, MP)

Dus $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$.

Geval 2: $B \in \Gamma$.
Die volgende deduksie toon aan dat $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$.

1.	B	(lid van Γ)
2.	$(B \Rightarrow (A \Rightarrow B))$	(L1)
3.	$(A \Rightarrow B)$	(1, 2, MP).

Geval 3: B is A.
Uit voorbeeld 4.20 volg dat $\vdash (A \Rightarrow A)$. Derhalwe sal die bewys van $(A \Rightarrow A)$ in L dien as 'n deduksie van $(A \Rightarrow A)$ uit Γ. Dus volg in hierdie geval ook dat $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$.

Veronderstel nou dat die deduksie van B uit $\Gamma \cup \{A\}$ is 'n ry met n lede, waar $n > 1$, en dat die proposisie geld vir alle gfs C wat uit $\Gamma \cup \{A\}$ afgelei kan word langs 'n ry met minder as n lede. In hierdie geval is daar vier gevalle om te beskou.

Geval 1: B is 'n aksioma van L.

$\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$ volg presies soos in geval 1 hierbo.

Geval 2: $B \in \Gamma$.

Weer eens volg $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$ soos in geval 2 hierbo.

Geval 3: B is A.

Soos in geval 3 hierbo.

Geval 4: B word verkry uit twee vorige gfs in die afleiding deur die toepassing van MP. Hierdie twee gfs moet van die vorms C en $(C \Rightarrow B)$ wees, en elkeen kan uit $\Gamma \cup \{A\}$ afgelei word met 'n ry van minder as n lede. In elke geval moet slegs die daaropvolgende lede uit die oorspronklike afleiding weggelaat word, en wat oorbly is die verlangde ry. Wat nou reeds beskikbaar is, is $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ en $\Gamma \cup \{A\} \vdash (C \Rightarrow B)$, en deur die induksiehipotese toe te pas, volg $\Gamma \vdash (A \Rightarrow C)$ en $\Gamma \vdash (A \Rightarrow (C \Rightarrow B))$. Die verlangde afleiding van $(A \Rightarrow B)$ uit Γ lyk nou soos volg:

(l)		} afleiding van $(A \Rightarrow C)$ uit Γ
⋮		
(k)	$(A \Rightarrow C)$	
(k+1)		} afleiding van $(A \Rightarrow (C \Rightarrow B))$ uit Γ
⋮		
(ℓ)	$(A \Rightarrow (C \Rightarrow B))$	
$(\ell + 1)$	$(A \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$	(L2)
$(\ell + 2)$	$(A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	(ℓ), $(\ell + 1)$, MP
$(\ell + 3)$	$(A \Rightarrow B)$	(k), $(\ell + 2)$, MP

$\therefore \Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$ in al vier gevalle. □

Die omgekeerde van die deduksiestelling lui soos volg:

4.22 Proposisie

As $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$, dan $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, waar A en B gfs van L is, en Γ 'n (moontlik leë) versameling van gfs van L is.

4.23 Gevolgtrekking

Vir enige gfs A, B en C van L, $\{(A \Rightarrow B), (B \Rightarrow C)\} \vdash (A \Rightarrow C)$. Hierdie resultaat is bekend as die reël *hipotetiese sillogisme*. (Kyk afdeling 4.10 (7)).

4.24 Proposisie

Die volgende is stellings in L, waar A en B enige gfs van L is:

(a) $(\sim B \Rightarrow (B \Rightarrow A))$.

(b) $((\sim A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$.

Die bewys word deur Hamilton (1990 : 35) aangebied.

4.25 Die adekwaatheid van L

Die rede vir die definiëring van L was 'n poging om 'n formele stelsel te konstrueer wat die intuïtiewe begrippe oor afleiding, geldigheid en waarheid reflekteer. Anders gestel, die semantiese en sintaktiese idees lei tot ekwivalente resultate, en hierdie eienskap word die *adekwaatheid* van L genoem.

In die res van hierdie hoofstuk sal aangetoon word dat L hierdie eienskap besit.

4.26 Definisie

'n *Waardering* van L is 'n funksie υ met definisieversameling die versamling gfs van L, en waardeversamling die versameling {W, V}, só dat vir enige gfs A, B van L,

(i) $\upsilon(A) \neq \upsilon(\sim A)$, en

(ii) $\upsilon(A \Rightarrow B) = \text{V}$ as en slegs as $\upsilon(A) = \text{W}$ en $\upsilon(B) = \text{V}$.

4.27 Definisie

'n gf A van L is 'n *toutologie* as vir elke waardering υ, $\upsilon(A) = \text{W}$.

4.28 Die betroubaarheidstelling

Elke stelling van L is 'n toutologie.

Bewys

Veronderstel A is 'n stelling van L. Die bewys volg deur induksie op die aantal gfs van L in 'n ry van gfs as 'n bewys van A in L.

Veronderstel dat die bewys van A in L slegs een gf het, naamlik A. Dan moet A 'n aksioma van L wees. Maar al die aksiomas van L is toutologieë, wat met waar-onwaartabelle geverifieer kan word.

Veronderstel nou dat die bewys van A_n gfs bevat, waar n > 1. Veronderstel verder, as induksiehipotese, dat al die stellings van L met minder as n stappe, toutologieë is. Nou is daar twee moontlikhede:

A is 'n aksioma, in welke geval A 'n toutologie is, óf A volg as gevolg van MP uit twee vorige gfs. Hierdie twee gfs moet die vorms B en $(B \Rightarrow A)$ hê. Maar B en $(B \Rightarrow A)$ is stellings van L met bewyse met minder as n rye gfs. Dus volg uit die induksiehipotese dat B en $(B \Rightarrow A)$ toutologieë is. Dus volg uit 4.10(1) dat A 'n toutologie is. Uit die beginsel van wiskundige induksie volg dus dat *elke stelling van L 'n toutologie is.* □

Die omgekeerde van stelling 4.28 geld ook. Om die omgekeerde te bewys, is twee begrippe nodig: *uitbreidings van L* en *konsistensie.*

L het drie aksiomaskemas, en hierdie skemas is die beginpunt van alle bewyse van stellings. Die vraag is wat sal gebeur as nog 'n aksiomaskema, of selfs 'n enkele aksioma bygevoeg word? Oor die algemeen is die verwagting dat meer stellings bewys sal kan word. Alle vorige gfs wat reeds as stellings bewys is, sal steeds stellings bly. Daar sal inderdaad nuwe stellings na vore kom as en slegs as die nuwe versameling aksiomas 'n gf insluit wat nie voorheen 'n stelling was nie.

4.29 Definisie

'n *Uitbreiding* van L is 'n formele stelsel wat verkry word met die vergroting van die versameling aksiomas sodanig dat alle stellings van L, stellings bly.

Dit kan gebeur dat 'n uitbreiding van L tot 'n formele stelsel lei waar vir 'n gf A, beide A en $(\sim A)$ stellings is. So 'n geval is duidelik onaanvaarbaar.

4.30 Definisie

'n Uitbreiding van L is *konsistent* as en slegs as vir enige gf A van L, nie beide A en $(\sim A)$ stellings van die uitbreiding is nie.

4.31 Proposisie

L is konsistent.

Bewys

Veronderstel L is nie konsistent nie. Dan bestaan daar 'n gf A só dat $\vdash A$ en $\vdash (\sim A)$. Dus volg uit stelling 4.28 dat beide A en $(\sim A)$ toutologieë is. Dit is egter onmoontlik, want as A 'n toutologie is, dan is $(\sim A)$ 'n teenstrydigheid, en as $(\sim A)$ 'n toutologie is, dan is A 'n teenstrydigheid. Gevolglik moet L konsistent wees. □

4.32 Proposisie

'n Uitbreiding L* van L is konsistent as en slegs as daar 'n gf bestaan wat nie 'n stelling van L* is nie.

Bewys

Veronderstel L* is konsistent, en stel A is enige gf. Dan is óf A, óf $(\sim A)$ nie 'n stelling nie.

Omgekeerd, veronderstel dat L* nie konsistent is nie. Daar gaan aangetoon word dat daar geen gf is wat nie 'n stelling van L* is nie, of anders gestel, elke gf is 'n stelling van L*.

Stel A is enige gf. L* is nie konsistent nie. Dus $\vdash B$ en $\vdash (\sim B)$ in L* vir een of ander gf B.

Maar uit proposisie 4.24 volg $\vdash (\sim B \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ in L. Dus volg $\vdash (\sim B \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ in L*, omdat L* 'n uitbreiding van L is. Deur nou MP twee keer toe te pas, volg $\vdash A$ in L*. Dus is elke gf 'n stelling van L*, soos verlang is.

□

Twee aspekte van hierdie proposisie moet beklemtoon word:

(i) In 'n inkonsistente uitbreiding van L is elke gf 'n stelling.

(ii) Die voldoende voorwaarde vir konsistensie wat deur hierdie proposisie verskaf word, is redelik swak, naamlik dat daar slegs een gf hoef te wees wat nie 'n stelling is nie. Dit is verrassend aangesien daar in enige konsistente stelsel talle gfs is wat nie stellings is nie, byvoorbeeld die negerings van alle stellings.

Die volgende proposisie lyk op die oog af nie belangrik nie, maar dit beskryf 'n geval om 'n konsistente uitbreiding van L te verkry.

4.33 Proposisie

Veronderstel L* 'n konsistente uitbreiding van L, en laat A 'n gf van L wees, met A nie 'n stelling van L* nie. Dan is L** ook konsistent, waar L** die uitbreiding van L is, wat verkry word uit L* deur die byvoeging van $(\sim A)$ as 'n addisionele aksioma.

Bewys

Laat A is 'n gf van L wees wat nie 'n stelling van L* is nie. Veronderstel dat L** inkonsistent is. Dan geld vir 'n gf B in L**, $\vdash B$ en $\vdash (\sim B)$.

Dit volg nou soortgelyk met die bewys van proposisie 4.33 dat $\vdash A$ in L**. Maar L** verskil van L* slegs as gevolg van die addisionele aksioma ($\sim A$). Dus is $\vdash A$ in L** ekwivalent aan ($\sim A$) $\vdash A$ in L*. ('n Bewys van L** is slegs 'n deduksie vanaf ($\sim A$) in L*.) Dus $\vdash ((\sim A) \Rightarrow A)$ in L*, as gevolg van die deduksiestelling. Maar uit proposisie 4.24 volg $\vdash (((\sim A) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ in L, sodat $\vdash (((\sim A) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ in L*.

Volgens MP volg nou $\vdash A$ in L*. Maar dit is teenstrydig met die hipotese dat A nie 'n stelling in L* is nie. Dus moet L** konsistent wees. □

Dit is voor-die-hand-liggend dat daar 'n beperking op die byvoeging van addisionele aksiomas in 'n uitbreiding van L sal wees vir die behoud van konsistensie. Hierdie beperking word in die volgende proposisie aangespreek, maar eers is 'n verdere definisie nodig.

4.34 Definisie

'n Uitbreiding van L is *volledig* as vir elke gf A, óf A óf ($\sim A$) 'n stelling van die uitbreiding is.

4.35 Opmerkings

(i) L is glad nie volledig nie, want daar bestaan 'n gf p_1 van L só dat nóg p_1 nóg ($\sim p_1$) stellings van L is.

(ii) Uit proposisie 4.32 volg dat elke inkonsistente uitbreiding van L volledig is.

(iii) As L^c 'n konsistente volledige uitbreiding van L is, dan sal enige verdere uitbreiding van L waar die klas van stellings die klas van stellings van L^c oorskry, inkonsistent wees.

4.36 Proposisie

Laat L* 'n konsistente uitbreiding van L wees. Dan bestaan daar 'n konsistente volledige uitbreiding van L*.

Die bewys van hierdie proposisie word volledig in Hamilton (1990 : 41-42) aangebied.

4.37 Proposisie

As L* 'n konsistente uitbreiding van L is, dan bestaan daar 'n waardering waarin elke stelling van L* die waarde W besit.

Ook hierdie bewys word volledig deur Hamilton (1990 : 42-43) aangebied.

Vervolgens word die verlangde resultaat bewys.

4.38 Proposisie (Die toereikendheidstelling)

As A 'n gf van L is en A is 'n toutologie, dan $\vdash A$.

Bewys

Laat A 'n gf van L wees. Veronderstel A is 'n toutologie en stel A is nie 'n stelling van L nie. Dan is die uitbreiding L*, wat verkry word deur die byvoeging van $(\sim A)$ as 'n nuwe aksioma, volgens proposisie 4.33 konsistent. Gevolglik bestaan daar 'n waardering v wat die waarde W toevoeg aan elke stelling van L*. In besonder, $v(\sim A) = W$. Maar $v(A) = W$, want A is 'n toutologie. Dit is 'n teenstrydigheid. Gevolglik is A 'n stelling van L. □

Die waar-onwaartabelle verskaf al die informasie wat nodig is vir besondere beweringvorms en argumentvorms, en deur hulle te gebruik, kan effektief tussen toutologieë, teenstrydighede en ander beweringvorms onderskei word. Die gevolge hiervan is belangrik en handig vir L.

4.39 Proposisie

L is *beslisbaar*, of anders gestel, daar is 'n effektiewe metode om vir 'n gegewe gf van L te beslis of dit 'n stelling van L is of nie.

Bewys

Om te besluit of 'n gf A 'n stelling van L is, word dit as beweringvorm beskou. Konstrueer vervolgens die ooreenstemmende waar-onwaartabel. Dan is A 'n stelling as en slegs as A 'n toutologie is.

4.40 Samevatting

In hierdie hoofstuk is aangetoon dat die formele stelsel L in beginsel die eienskap het wat dit veronderstel is om te hê, naamlik dat gfs wat in L bewys kan word, presies daardie formules is wat logies waar is. Die aksiomas en deduksiereël in L karakteriseer logiese deduksies in hierdie konteks. Bewerings en argumente is geabstraheer om die onderlinge verwantskappe beter te analiseer. 'n Eenvoudige prosedure is gevind om geldige argumente te konstrueer. Om afleidings te kan maak, moet oorspronklike aannames gemaak word. Hiervoor is 'n formele deduktiewe stelsel nodig. Dit is essensieel om die begrip bewys te abstraheer.

HOOFSTUK 5: DIE PREDIKAATLOGIKA

5.1 Inleiding

Die proposisielogika is nie ryk genoeg om die wiskunde te akkommodeer nie. Wiskunde bevat uitdrukkings soos die volgende: $x < y$; $x^2 + 3x = 1$; $x + y = y + x$ vir alle heelgetalle x en y; daar bestaan 'n heelgetal tussen 1 en 3; elke heelgetal is ewe óf onewe, ensovoorts. Dus is bo en behalwe die simbole en konnektiewe van proposisielogika, ook simbole vir terme nodig, soos 1, 3, x, y, a, f(a), ensovoorts.

Verder word predikate, relasies en kwantore benodig. Hiervoor is dit nodig om die proposisielogika uit te brei, en hierdie uitgebreide stelsel staan bekend as die *predikaatlogika.*

Soos die geval met die ontwikkeling van die proposisielogika, sal die benadering van Hamilton (1990 : 45-104) weer eens gevolg word vir die ontwikkeling van die predikaatlogika.

Elke eenvoudige bewering in Afrikaans het 'n *onderwerp* en 'n *predikaat.*

5.2 Voorbeeld

In die volgende bewerings is die onderwerp kursief gedruk, terwyl die res van die sin die predikaat is.

(i) *Sokrates* is 'n man.
(ii) *Ek* skryf boeke.
(iii) *Die getal* is nie groter as drie nie.

Die predikaat verwys na 'n "eienskap" wat die onderwerp besit. Dit is gerieflik om predikate met hoofletters A, B, C, ..., en die onderwerpe met klein letters voor te stel. Met simbole lyk die bewerings in voorbeeld 5.2 soos volg:

(i) A(s), waar A die predikaatsimbool is vir "is 'n man", en s die onderwerp, "Sokrates".

(ii) B(i) sal op 'n soortgelyke wyse die bewering "Ek skryf boeke" voorstel.

(iii) Hierdie is 'n geval van negering. Daar is dus 'n keuse. R kan staan vir "nie groter as drie nie". In so 'n geval sal die bewering met R(j) voorgestel kan word, waar j staan vir "die getal". 'n Ander moontlikheid is om S te kies vir die predikaat "is groter as drie". In so 'n geval sal die bewering met (~ S(j)) voorgestel word.

In die bewering "alle mans is sterflik", is meer as 'n onderwerp-predikaat simbool nodig. Laat M en S onderskeidelik die predikate "is 'n man" en "is sterflik" voorstel. Dan kan "alle mans is sterflik" soos volg met simbole geskryf word:

$$\text{Vir alle x, } (M(x) \Rightarrow S(x)).$$

Die frase "vir alle x", word 'n *universele kwantor* genoem, en word met simbole as $(\forall x)$ geskryf. Die bewering hierbo kan dus soos volg geskryf word:

$$(\forall x)\ (M(x) \Rightarrow S(x)).$$

'n Tweede kwantor kom na vore in die volgende bewering: "Daar bestaan ten minste een objek x só dat x 'n vark is en x het vlerke." Die frase "daar bestaan ten minste een objek x só dat" word 'n *eksistensiële kwantor* genoem, en word met simbole geskryf as $(\exists x)$. Die sin kan nou soos volg geskryf word: $(\exists x)\ (P(x) \wedge V(x))$, waar P(x) staan vir "x is 'n vark" en V(x) vir "x het vlerke".

In die ontwikkeling van die eersteordepredikaatlogika sal aanvanklik 'n informele benadering beskou word om die invloed van verskillende bewerings in toepaslike eersteorde tale te bestudeer.

5.3 Alfabet van 'n algemene eersteorde taal *L*

Die alfabet van 'n algemene eersteorde taal bestaan uit die volgende:

(i) veranderlikes x_1, x_2, x_3, ...
(ii) konstante simbole (moontlik geen) a_1, a_2, a_3, ...
(iii) predikaatsimbole (moontlik geen) A_i^n, ...
(iv) funksiesimbole (moontlik geen) f_i^n, ...
(v) punktuasiesimbole (,) en ,
(vi) konnektiewe ~ en ⇒
(vii) die kwantor ∀.

5.4 Motivering van die alfabet

- Die konstante simbole word ingesluit sodat daar formules in die taal sal wees wat as bewerings oor besondere dinge geïnterpreteer kan word.

- Daar is 'n lys van lyste van predikaatsimbole. Die eerste is 'n lys van unêre predikaatsimbole wat predikate soos "is 'n man" voorstel.

Die volgende is 'n lys van binêre predikaatsimbole, wat relasies soos "is die vader van" voorstel, ensovoorts.

- Die funksiesimbole kom tot hulle reg wanneer spesifieke wiskundige stelsels bespreek word.

- Daar is slegs een kwantor in die taal, naamlik die universele kwantor. Die eksistensiële kwantor kan in terme van die universele kwantor gedefinieer word. Om dieselfde rede word slegs die konnektiewe ~ en ⇒ in die alfabet ingesluit.

- Alhoewel daar oneindig veel simbole in die alfabet ingesluit word, sal slegs 'n eindige aantal kombinasies toegelaat word vir die konstruksie van goedgevormde formules.

Dit is duidelik dat daar talle verskillende eersteorde tale bestaan, wat afhanklik is van die simbole wat ingesluit word. Om 'n formele taal volledig te spesifiseer, is dit nodig om 'n goedgevormde formule te definieer. Alvorens dit gedoen word, sal die volgende voorbeeld in Hamilton (1990 : 52) sekere begrippe illustreer.

5.5 Voorbeeld

As die eersteorde taal toepaslik vir bewerings oor die rekenkunde van natuurlike getalle moet wees, kan L, tesame met die veranderlikes, punktuasiesimbole, konnektiewe en kwantor, die volgende simbole hê:

a_1, om 0 voor te stel.
A_1^2, om "=" voor te stel.
f_1^1, om die opvolgerfunksie voor te stel, dit is $f_1^1(n) = n + 1$ vir alle $n \in \mathbb{N}$.
f_1^2, om "+" voor te stel.
f_2^2, om "×" voor te stel.

Dan sal, byvoorbeeld,

$$A_1^2 (f_1^2 (x_1, x_2), f_2^2 (x_1, x_2))$$

geïnterpreteer word as:

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 .$$

Alvorens 'n goedgevormde formule gedefinieer word, is 'n paar definisies nodig.

5.6 Definisie

Laat L 'n eersteorde taal wees.
'n *Term* in L word soos volg gedefinieer:

(i) Veranderlikes en konstantesimbole is terme.

(ii) As f_i^n 'n funksiesimbool in L is, en $t_1, t_2, \ldots, t_n$ is terme in L, dan is $f_i^n (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 'n term in L.

(iii) Die versameling van alle terme in L word voortgebring soos in (i) en (ii).

Terme in die formele taal sal daardie uitdrukkings wees wat as objekte geïnterpreteer sal word.

5.7 Definisie

'n Atomiese formule in L word soos volg gedefinieer:

As A_j^k 'n predikaatsimbool in L is, en $t_1, t_2, ..., t_k$ is terme in L, dan is $A_j^k (t_1, t_2, ..., t_k)$ 'n atomiese formule van L. Die atomiese formules is die eenvoudigste uitdrukkings in L wat as bewerings geïnterpreteer kan word. Atomies beteken dat 'n uitdrukking nie verder afgebreek kan word nie.

5.8 Definisie

'n *Goedgevormde formule* (gf) van L word soos volg gedefinieer:

(i) Elke atomiese formule van L is 'n gf van L.

(ii) As A en B goedgevormde formules (gfs) van L is, dan is $(\sim A)$, $(A \Rightarrow B)$ en $(\forall x_i)$ A, waar x_i enige veranderlike is, ook gfs van L.

(iii) Die versameling van alle gfs van L word deur (i) en (ii) voortgebring.

5.9 Opmerkings

(a) Slegs die konnektiewe $\sim$ en $\Rightarrow$ word ingesluit, soos ook die geval was met die stelsel L. Die rede is om bewyse eenvoudig te hou. Om dieselfde rede word die simbool $\exists$ uitgesluit. Dit sal later egter gerieflik blyk te wees om die simbool $\exists$, sowel as die konnektiewe $\wedge$ en $\vee$ as *gedefinieerde* simbole te gebruik.
$(\exists x_i)$ A is 'n afkorting vir $(\sim ((\forall x_i) (\sim A)))$.
$(A \wedge B)$ is 'n afkorting vir $(\sim (A \Rightarrow (\sim B)))$.
$(A \vee B)$ is 'n afkorting vir $((\sim A) \Rightarrow B)$.

Formules wat hierdie simbole insluit, is streng gesproke nie gfs van die formele taal nie, maar hulle kan, indien nodig, herlei word na gfs.

(b) Die gebruik van hakies in gfs is presies gedefinieer. Hakies sal somtyds weggelaat word indien daar nie verwarring oor dubbelsinnigheid is nie, en sal weggelaat word volgens die volgende reël:

~ word toegepas op die kortste formule wat dit volg, dan verbind $\wedge$ die kortste formules om homself, dan verbind $\vee$ die kortste formules om homself, dan word $(\forall x)$ toegepas op die kortste formule wat daarop volg, dan word $(\exists x)$ soortgelyk toegepas, waarna $\Rightarrow$ die kortste formules wat dit omring, verbind, terwyl laastens $\Leftrightarrow$ die kortste formules om homself verbind.

5.10 Definisie

In die gf $(\forall x_i)$ A word A die *bereik* van die kwantor genoem.

5.11 Definisie

Die voorkoms van 'n veranderlike x_i in 'n gf is *gebonde* as dit binne die bereik van 'n $(\forall x_i)$ in 'n gf voorkom, óf as dit die x_i in 'n $(\forall x_i)$ self is. As 'n voorkoms van 'n veranderlike nie gebonde is nie, dan is die voorkoms *vry*.

Hamilton (1990 : 54) verskaf die volgende voorbeeld om die begrippe te illustreer:

5.12 Voorbeeld

In die gf $(\forall x_1)$ A_1^1 (x_2), is A_1^1 (x_2) die bereik van die kwantor $(\forall x_1)$. Verder is die voorkoms van die veranderlike x_2 vry, terwyl die voorkoms van die veranderlike x_1 gebonde is.

5.13 Definisie

Indien x_i *miskien* vry voorkom in 'n gf $A(x_i)$, dan is $A(t)$ die formule wat uit $A(x_i)$ verkry word deur elke vrye voorkoms van x_i met die term t te vervang.

Dit mag somtyds nodig wees om veranderlikes deur ander veranderlikes of terme te vervang. Beskou byvoorbeeld weer die formule in voorbeeld 5.12, naamlik $(\forall x_1)\ A_1^1\ (x_2)$. As x_2 deur x_3 vervang word, is die interpretasie van die formule onveranderd, maar as x_2 deur x_1 vervang word, is daar duidelik 'n ander interpretasie vir die formule. Daar word gesê dat x_3 vry is vir x_2 in $(\forall x_1)\ A_1^1\ (x_2)$, maar dat x_1 nie vry is nie.

Meer algemeen, as x_2 deur die term sê, $f_1^2\ (x_1, x_3)$, vervang word, word die formule $(\forall x_1)$ $A_1^1\ (f_1^2\ (x_1, x_3))$ verkry. Nou is daar 'n interaksie tussen die kwantor $(\forall x_1)$ en sy bereik wat nie voorheen teenwoordig was nie. Dus is $f_1^2\ (x_1, x_3)$ nie vry vir x_2 in $(\forall x_1)\ A_1^1\ (x_2)$ nie.

5.14 Definisie

Laat A enige gf van L wees. 'n Term t is *vry vir* x_j in A as x_i nie vry in A binne die bereik van 'n $(\forall x_j)$ voorkom nie, waar x_j enige veranderlike is wat in t voorkom.

Dit beteken derhalwe dat elke vrye voorkoms van x_i in A deur t vervang mag word op voorwaarde dat daar geen interaksies met die kwantore in A is nie.

Die formele taal wat nou gebruik en ontwikkel sal word is nou beskryf. Die metodes sal soortgelyk wees as dié wat in hoofstuk 4 gevolg is deur aksiomas en deduksiereëls te beskryf om die spesifikasies vir formele stelsels te voltooi. Hierdie stelsels staan bekend as eersteordepredikaatstelsels. Alvorens dit gedoen word, is dit egter eers nodig om die vae begrip "interpretasie" te definieer.

5.15 Definisie

'n *Interpretasie* I van L is 'n nie-leë versameling D_1 (die *gebied* van I) tesame met 'n klas van onderskeidende elemente $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ...)$, 'n klas van funksies op D_i $(\bar{f}_i^n,\ i > 0,\ n > 0)$ en 'n klas van relasies op D_i $(\bar{A}_i^n,\ i > 0,\ n > 0)$.

5.16 Voorbeeld

In voorbeeld 5.5 is 'n beskrywing gegee van 'n toepaslike eersteorde taal. Dit bevat die simbole a_1, A_1^2, f_1^1, f_1^2, f_2^2, asook veranderlikes, punktuasiesimbole, konnektiewe en 'n kwantor. 'n Interpretasie $\mathbb{N}$ mag nou soos volg gedefinieer word. Laat $D_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, ...\}$ die versameling natuurlike getalle wees. Die element 0 is die interpretasie van die konstante a_1. Optelling en vermenigvuldiging van natuurlike getalle is onderskeidelik die interpretasies van die binêre funksies f_1^2 en f_2^2. Die opvolgerfunksie is die interpretasie van f_1^1. Die relasie = is die interpretasie van die predikaatsimbool A_1^2.

Gfs in hierdie taal kan na aanleiding van bogenoemde soos volg as bewerings oor natuurlike getalle geïnterpreteer word.

Die gf $(\forall x_1)(\forall x_2) \sim (\forall x_3) (\sim A_1^2 (f_1^2 (x_1, x_3), x_2))$ het byvoorbeeld die volgende interpretasie:

Vir alle x en y $\in D_{\mathbb{N}}$, is dit nie waar dat vir elke z $\in D_{\mathbb{N}}$, $x + z \neq y$, of ekwivalent, vir alle x en y $\in D_{\mathbb{N}}$, bestaan daar 'n z $\in D_{\mathbb{N}}$ só dat $x + z = y$.

Dit is slegs moontlik om in die konteks van 'n interpretasie te besluit of 'n bewering waar of onwaar is. Die gf hierbo is onwaar in hierdie interpretasie, maar kan waar wees in 'n ander interpretasie.

5.17 Voorbeeld

Die gf in voorbeeld 5.16 is waar in die interpretasie I, waar D_I die versameling van positiewe rasionale getalle is, 1 die interpretasie van a_1, vermenigvuldiging die interpretasie van f_1^2 en deling die interpretasie van f_2^2 is. Dan het die gemelde gf die volgende interpretasie:

Vir alle x, y $\in D_I$ bestaan daar 'n z $\in D_I$ só dat $xz = y$.

Hierdie is 'n welbekende eienskap van die rasionale getalle.

Vervolgens gaan die begrip waarheid in 'n interpretasie meer eksplisiet ontwikkel word.

Laat I 'n interpretasie met gebied D_I van die taal L wees . Voortaan sal die notasie van Definisie 5.15 gebruik word. Die interpretasies in I van a_i, f_i^n, A_i^n sal onderskeidelik met $\bar{a}_i$, $\bar{f}_i^n$, $\bar{A}_i^n$ aangedui word. Vir elke i geld $\bar{a}_i \in D_I$, $\bar{f}_i^n : D_I^n \rightarrow D_I$, en $\bar{A}_i^n$ is 'n n-nêre relasie op D_I.

5.18 Definisie

'n *Waardering* in I is 'n funksie v van die versameling van terme van L na die versameling D_I met die volgende eienskappe:

(i) $v(a_i) = \bar{a}_i$ vir elke konstante a_i van L.

(ii) $v(f_i^n\ (t_1, t_2, ..., t_n)) = \bar{f}_i^n\ (v(t_1), v(t_2), ..., v(t_n))$, waar f_i^n enige funksiesimbool in L is, en $t_1, t_2, ..., t_n$ enige terme van L.

'n Waardering is dus slegs 'n reël wat aan elke term van L 'n objek in D_I, naamlik sy interpretasie, toevoeg. Deel (ii) verseker dat die reël konsistent is.

5.19 Opmerkings

- Oor die algemeen sal daar talle verskillende waarderings vir 'n gegewe interpretasie wees.

- 'n Gegewe waardering sal 'n element van D_I toevoeg aan elk van die veranderlikes x_i in L. 'n Waardering v sal volledig gespesifiseer wees deur $v(x_1), v(x_2), ...$ Die rede is dat $v(a_i)$ deur (i) van die definisie gegee word, en vir enige term $f_i^n\ (t_1, t_2, ..., t_n)$, word die waarde van $v(f_i^n\ (t_1, t_2, ..., t_n))$ deur induksie deur (ii) bepaal.

Sommige waarderings, soos later gesien sal word, is byna identies in die sin van die volgende definisie.

5.20 Definisie

Twee waarderings υ_1 en υ_2 is *i-ekwivalent* as $\upsilon_1(x_j) = \upsilon_2(x_j)$ vir elke $j \neq i$.

Waarderings wat i-ekwivalent is, het dieselfde waardes vir elk van die veranderlikes, behalwe moontlik vir x_i. Oor die algemeen sal die waardes egter verskil vir enige term t waarin x_i voorkom.

Beskou vervolgens 'n gf A van L. 'n Gegewe waardering mag in effek 'n waarheidswaarde aan A op die volgende wyse toevoeg. Vervang elke term t wat in A voorkom met $\upsilon(t)$, en vervang elke funksiesimbool en predikaatsimbool met sy interpretasie in I. Wat verkry word is 'n bewering oor die elemente van D_I wat waar óf onwaar mag wees. As dit waar is, dan bevredig υ vir A.

5.21 Definisie

Laat A 'n gf van L wees, en laat I 'n interpretasie van L wees. 'n Waardering υ in I *bevredig* A as dit induktief onder die volgende vier voorwaardes is:

(i) υ bevredig die atomiese formule
$A_j^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ as $\bar{A}_j^n(\upsilon(t_1), \upsilon(t_2), ..., \upsilon(t_n))$ waar is in D_I.

(ii) υ bevredig $(\sim B)$ as υ nie vir B bevredig nie.

(iii) υ bevredig $(B \Rightarrow C)$ as óf $(\sim B)$ óf C deur υ bevredig word.

(iv) υ bevredig $(\forall x_i)\, B$ as elke waardering υ_1 wat i-ekwivalent met υ is, vir B bevredig.

5.22 Opmerkings

- Vir enige υ en A, sal υ vir óf A, óf $(\sim A)$ bevredig.
- Elk van die vier voorwaardes (i) – (iv) hierbo kan beskou word as 'n "as en slegs as" bewering.

Die volgende voorbeelde word deur Hamilton (1990 : 61) verskaf.

5.23 Voorbeeld

(i) Beskou die gf $A_1^2\ (f_2^2\ (x_1, x_2), f_2^2\ (x_3, x_4))$ in die rekenkundige interpretasie $\mathbb{N}$. Enige waardering υ met $\upsilon(x_1) = 2$, $\upsilon(x_2) = 6$, $\upsilon(x_3) = 3$ en $\upsilon(x_4) = 4$, sal hierdie gf bevredig, omdat $2 \times 6 = 3 \times 4$ waar is in $D_{\mathbb{N}}$. Soortgelyk sal enige waardering w met $w(x_1) = 1$, $w(x_2) = 5$, $w(x_3) = 4$ en $w(x_4) = 2$ die gf nie bevredig nie.

(ii) Die gf $(\forall x_1)\ A_1^2\ (f_2^2\ (x_1, x_2), f_1^2\ (x_2, x_1))$ word in $\mathbb{N}$ geïnterpreteer as "vir alle $n \in D_{\mathbb{N}}$, "nm = mn", wat sekerlik as waar beskou word.

Laat υ 'n waardering in $\mathbb{N}$ wees. Dan is $\upsilon(x_1)$ en $\upsilon(x_2)$ natuurlike getalle, en $A_1^2\ (f_2^2\ (x_1, x_2), f_2^2\ (x_2, x_1))$ word dan geïnterpreteer as $\upsilon(x_1) \times \upsilon(x_2) = \upsilon(x_2) \times \upsilon(x_1)$, wat sekerlik ook waar is. Dus bevredig υ vir

$A_1^2\ (f_2^2\ (x_1, x_2), f_2^2\ (x_2, x_1))$. As die waarde van $\upsilon(x_1)$ verander word om 'n nuwe i-ekwivalente waardering υ_1 te kry, sal υ_1 ook vir

$A_1^2\ (f_2^2\ (x_1, x_2), f_2^2\ (x_2, x_1))$ bevredig. Dus volg uit (iv) van definisie 5.21 dat υ vir $(\forall x_1)\ A_1^2\ (f_2^2\ (x_1, x_2), f_2^2\ (x_2, x_1))$ in $\mathbb{N}$ bevredig. Dus bevredig elke waardering υ in $\mathbb{N}$ hierdie gf.

(iii) Die gf $(\forall x_1)\ A_1^2\ (x_1, a_1)$ word intuïtief geïnterpreteer as "vir alle $n \in D_{\mathbb{N}}$, $n = 0$", wat onwaar is. Laat υ 'n waardering in $\mathbb{N}$ wees. Dan word $A_1^2\ (x_1, a_1)$ geïnterpreteer deur "$\upsilon(x_1) = 0$". Dus bevredig υ nie vir $A_1^2\ (x_1, a_1)$ nie, tensy $\upsilon(x_1) = 0$. Veronderstel dus dat $\upsilon(x_1) = 0$. Die vraag is dan of υ vir $(\forall x_1)\ A_1^2\ (x_1, a_1)$ bevredig. Daar moet nou beweer kan word dat enige υ_1 wat uit υ verkry kan word deur die waarde van $\upsilon(x_1)$ te verander, ook vir $A_1^2\ (x_1, a_1)$ bevredig. Dit is egter duidelik nie die geval nie. Dus bevredig geen waardering in $\mathbb{N}$ vir $(\forall x_1)\ A_1^2\ (x_1, a_1)$ nie.

Die substitusie van veranderlikes deur ander veranderlikes of terme is 'n belangrike tegniek. Die volgende proposisie is daarvoor nodig, en word hier slegs gemeld. Die bewys word volledig deur Hamilton (1990 : 62) aangebied.

5.24 Proposisie

Laat $A(x_i)$ 'n gf in L wees waarin die voorkoms van x_i vry is, en laat t 'n term wees wat vry is vir x_i in $A(x_i)$. Veronderstel v is 'n waardering en v_1 is die waardering wat i-ekwivalent aan v is en $v_1(x_i) = v(t)$. Dan bevredig v vir $A(t)$ as en slegs as v_1 vir $A(x_i)$ bevredig.

5.25 Definisie

'n Gf A is *waar* in 'n interpretasie I as elke waardering in I vir A bevredig. A is onwaar as daar geen waardering in I is wat vir A bevredig nie.

5.26 Notasie

As A waar is in I, sal dit met $I \vDash A$ aangedui word. Net soos $\vdash$, is $\vDash$ ook nie 'n simbool van die formele taal nie. Albei hierdie simbole is deel van die metataal waarin oor die formele tale gepraat word.

5.27 Opmerkings

- Dit mag vir 'n besondere gf A gebeur dat sommige waarderings in I vir A bevredig, terwyl vir ander waarderings dit nie die geval is nie. Só 'n gf is nóg waar, nóg onwaar in I.

- Die gebied van 'n interpretasie is volgens die definisie nie die leë versameling nie, en gevolglik kan die versameling van waarderings ook nie die leë versameling wees nie. Uit die definisie volg dat 'n gegewe waardering 'n gegewe gf A óf bevredig, óf nie bevredig nie. Gevolglik is dit onmoontlik vir 'n gf om beide waar en onwaar in 'n gegewe interpretasie te wees.

- In 'n gegewe interpretasie is 'n gf A onwaar as en slegs as $(\sim A)$ waar is. Dit volg dat vir geen gf A, beide A en $(\sim A)$ waar kan wees nie.

- Hamilton (1990 : 63) bewys dat 'n gf $(A \Rightarrow B)$ onwaar in 'n gegewe interpretasie I is as en slegs as A waar en B onwaar is.

5.28 Proposisie

As in 'n besondere interpretasie I, die gfs A en $(A \Rightarrow B)$ waar is, dan is B ook waar.

Bewys

Laat v 'n waardering in I wees. Dan bevredig v vir A en $(A \Rightarrow B)$. Uit definisie 5.21 volg nou dat v óf $(\sim A)$ óf B bevredig. Maar v kan nie vir $(\sim A)$ bevredig nie. Dus moet v vir B bevredig. Gevolglik word B deur elke waardering in I bevredig. Derhalwe is B waar in I. □

5.29 Proposisie

Laat A 'n gf van L en I 'n interpretasie van L wees. Dan $I \vDash A$ as en slegs as $I \vDash (\forall x_i) A$, waar x_i enige veranderlike is.

Die bewys van hierdie proposisie word volledig deur Hamilton (1990 : 64) aangebied.

5.30 Gevolgtrekking

Laat $y_1, y_2, ..., y_n$ veranderlikes in L wees, en laat A 'n gf van L en I 'n interpretasie van L wees. Dan $I \vDash A$ as en slegs as $I \vDash (\forall y_1)(\forall y_2) \ ... \ (\forall y_n) A$.

Twee aspekte van hierdie resultaat kom sterk na vore. Deur 'n kwantor by te voeg vir 'n veranderlike wat nie vry in A voorkom nie om $(\forall x_i) A$ te kry, verander nie die interpretasie nie. Dit is dus te wagte dat A waar is as en slegs as $(\forall x_i) A$ waar is. Deur 'n kwantor vir 'n veranderlike wat vry in A voorkom by te voeg om $(\forall x_i) A$ te kry, is die effek anders. Om te besluit oor die waarheid al dan nie van gfs, sal die voorkoms van die veranderlikes in ag geneem moet word, in dié sin dat hulle vry of gebonde kan wees.

Die eksistensiële kwantor $\exists$ is as 'n simbool van die formele taal gedefinieer. Die vraag oor watter plek dit inneem in die konteks van waarderings en bevrediging, word vervolgens ondersoek.

5.31 Proposisie

In 'n interpretasie I, bevredig 'n waardering v die formule $(\exists x_i)\ A$ as en slegs as daar ten minste een waardering v_i bestaan wat i-ekwivalent aan v is en wat vir A bevredig.

Bewys

$(\exists x_i)\ A$ is dieselfde as $\sim (\forall x_i)\ (\sim A)$. Laat v vir $\sim (\forall x_i)\ (\sim A)$ bevredig. Dan bevredig v nie vir $(\forall x_i)\ (\sim A)$ nie. Dus bestaan daar 'n v_i wat i-ekwivalent aan v is wat nie vir $(\sim A)$ bevredig nie. Hierdie v_i moet dan vir A bevredig. Die omgekeerde volg deur bogenoemde argument om te keer. □

Die taal van die proposisielogika L bevat die konnektiewe $\sim$ en $\Rightarrow$. So ook die taal van L. As nou 'n gf A_0 van L beskou word, en elke beweringsimbool in A_0 word vervang met 'n gf van L (dieselfde simbool word dan deurgaans vervang met dieselfde gf), sal 'n gf A van L verkry word. A word dan 'n *substitusie-instansie* van A_0 in L genoem. Die omgekeerde geld soortgelyk. Deur te begin met 'n gf van L, sal dit dieselfde struktuur hê as een of ander gf van L.

Hamilton (1990 : 65) bied die volgende voorbeelde aan:

5.32 Voorbeeld

(i) $(\sim (\forall x_1)\ A_1^1(x_1) \Rightarrow ((\forall x_2)\ A_2^2\ (x_1, x_2) \Rightarrow (A_1^1(x_2) \Rightarrow (\forall x_1)\ A_3^1(x_1))))$ is 'n substitusie-instansie van die gf $(\sim p_1 \Rightarrow p_2)$ van L, en ook van $(\sim p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_3))$.

(ii) $((\forall x_1)\ A_1^1(x_1) \Rightarrow (\forall x_1)\ A_1^1\ (x_1))$ is 'n substitusie-instansie van die gf $(p_1 \Rightarrow p_1)$ van L. Maar $(p_1 \Rightarrow p_1)$ is 'n toutologie. Vervolgens sal die begrip toutologie na gfs van L uitgebrei word.

5.33 Definisie

'n Gf A van L is 'n toutologie as dit 'n substitusie-instansie in L is van 'n toutologie in L.

5.34 Proposisie

'n Gf van L wat 'n toutologie is, is waar in enige interpretasie van L.

Die bewys van hierdie proposisie word volledig in Hamilton (1990 : 65-66) aangebied.

In afdeling 5.27 is reeds gesien dat nie elke gf in 'n gegewe interpretasie waar of onwaar is nie. Beskou byvoorbeeld die gf $A_1^1(x_1)$, en 'n interpretasie I waar D_I die versameling Z van heelgetalle is. As A_1^1 die predikaat "> 0" is, dan word $A_1^1(x_1)$ bevredig deur enige waardering υ waarvoor $\upsilon(x_1) > 0$. Maar $A_1^1(x_1)$ word deur geen waardering w waarvoor $w(x_1) \leq 0$ bevredig nie.

Hierdie geval kom dikwels voor in gfs waarin die voorkoms van die veranderlike vry is. Die volgende hoofresultaat, sien afdeling 5.37, stel dit dat 'n gf waarin geen voorkoms van 'n veranderlike vry is nie, altyd waar of onwaar in 'n gegewe interpretasie sal wees. 'n Paar voorafgaande resultate word egter benodig.

5.35 Definisie

'n Gf A van L word *geslote* genoem as geen voorkoms van 'n veranderlike in A vry is nie.

5.36 Proposisie

Laat I 'n interpretasie van L wees, en laat A 'n gf van L wees. As υ en w waarderings is só dat $\upsilon(x_i) = w(x_i)$ vir elke vrye veranderlike x_i van A, dan bevredig υ vir A as en slegs as w vir A bevredig.

Die bewys deur induksie op die aantal konnektiewe en kwantore in A word volledig deur Hamilton (1990 : 66-67) aangebied.

5.37 Gevolgtrekking

As A 'n geslote gf van L is, en I is 'n interpretasie van L, dan óf $I \models A$, óf $I \models (\sim A)$.

Bewys

Laat A 'n geslote gf en I 'n interpretasie wees. Laat υ en w enige twee waarderings wees. Dan volg $\upsilon(y) = w(y)$ triviaal as y 'n vrye veranderlike van A is (A het inderdaad geen vrye veranderlikes nie). Dus bevredig υ vir A as en slegs as w vir A bevredig. Gevolglik bevredig elke waardering vir A, óf geen waardering bevredig vir A nie. Dit beteken A is waar in I óf A is onwaar in I. Uit afdeling 5.27 volg dan dat óf $I \models A$, óf $I \Rightarrow (\sim A)$. □

Hierdie is 'n betekenisvolle resultaat aangesien die begrip waarheid in 'n interpretasie belangriker is as bevrediging deur 'n waardering. Wat nou aangetoon is, is dat vir *geslote* formules, alle waarderings in 'n besondere interpretasie dieselfde resultaat verskaf ten opsigte van die bevrediging van 'n gegewe formule. Om dus die waarheid al dan nie van 'n gegewe geslote gf te kontroleer, is dit slegs nodig om te kontroleer of daar 'n waardering bestaan wat dit bevredig of nie. Geslote formules is inderdaad meer relevant tot wiskunde. Daarenteen kan formules met vrye veranderlikes se gedrag soms onnatuurlik wees. Interpretasies is 'n toevoeging van waarheidswaardes aan die geslote formules van L.

Dit kan gebeur dat vir 'n gegewe gf A van L alle interpretasies die waarde W aan A toevoeg, of anders gestel, A is waar vir alle moontlike interpretasies van L.

5.38 Definisie

'n Gf A van L is *logies geldig* as A waar is in elke interpretasie van L. A is 'n *teenstrydigheid* as dit onwaar is in elke interpretasie.

Hierdie begrippe is ekwivalent met die begrippe toutologie en teenstrydigheid in hoofstuk 4. In hoofstuk 4 was daar onder andere formules wat nóg toutologieë, nóg teenstrydighede was. Soortgelyk is daar in L gfs wat nóg logies geldig, nóg teenstrydighede is.

5.39 Opmerkings

- Uit proposisie 5.28 volg dat as die gfs A en $(A \Rightarrow B)$ logies geldig is, dan is B logies geldig.

- Soortgelyk volg uit proposisie 5.29 dat as die gf A logies geldig is, dan is ook $(\forall x_i)$ A logies geldig, waar x_i enige veranderlike is.

Hamilton (1990 : 68-69) bied die volgende voorbeelde aan.

5.40 Voorbeeld

(i) Uit proposisie 5.34 volg dat elke substitusie-instansie in L van 'n toutologie in L logies geldig is. Dus bevat die klas van logies geldige gfs van L die klas van toutologieë.

(ii) Vir enige gf A van L is $((\forall x_i)\ A \Rightarrow (\exists x_i)\ A)$ logies geldig.

(iii) $((\forall x_1)(\exists x_2)\ A_1^2\ (x_1, x_2) \Rightarrow (\exists x_1)(\forall x_2)\ A_1^2\ (x_1, x_2))$ is nie logies geldig nie.

(iv) $A_1^1\ (x_1)$ is nie logies geldig nie.

Hamilton (1990 : 68-69) bied die bewyse van (ii) – (iv) aan.

Om logiese geldigheid oor die algemeen te bewys, moet aangetoon word dat 'n willekeurige waardering in 'n willekeurige interpretasie die betrokke gf bevredig. Om aan te toon dat 'n gf nie logies geldig is nie vereis gewoonlik insig in die konstruksie van 'n interpretasie waarin daar 'n waardering is wat dit nie sal bevredig nie.

5.41 Skolemfunksies

Beskou die gf $(\forall x_1)(\exists x_2)\ B\ (x_1, x_2)$. Veronderstel nou, vir eenvoudigheid, dat $B\ (x_1, x_2)$ 'n gf is waarin slegs x_1 en x_2 vry voorkom. Bostaande gf kan dus soos volg geïnterpreteer word:

"Vir alle x_1, bestaan daar 'n x_2 só dat x_1 en x_2 in relasie is soos uitgedruk deur $B\ (x_1, x_2)$."

Hierdie formule beskryf dus 'n verwantskap tussen die waardes x_1 en x_2. Daar hoef nie 'n eenduidige waarde vir x_2 te wees om met elke waarde van x_1 geassosieer te word nie. x_2 kan egter as 'n funksie van x_1 gedefinieer word. Die bostaande gf kan dus soos volg geskryf word:

$$(\forall x_1)\ B\ (x_1, h_1^1\ (x_1)).$$

Hierdie gf is 'n Skolemvorm van die gegewe gf, en die funksie h_i^1 word 'n Skolemfunksie genoem.

Die Skolemvorm van 'n gf en die gf self verskil in betekenis, en hulle kan dus nie logies ekwivalent wees nie. Tog is hulle ekwivalent in dié sin:

as die een 'n teenstrydigheid is, dan is die ander een ook 'n teenstrydigheid. Alvorens verder gegaan word, is dit egter nodig om die begrip Skolemvorm verder toe te lig.

Veronderstel dat die gf $(\exists x_i)\ B$ as 'n subformule in 'n gf A voorkom, binne die bereik van die universele kwantore $(\forall x_{i_1})$, $(\forall x_{i_2})$, ..., $(\forall x_{i_r})$. Dan mag B geskryf word as

$B(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}, x_i)$, alhoewel nie al hierdie veranderlikes eksplisiet in B hoef voor te kom nie. Verwyder vervolgens die eksistensiële kwantor $(\exists x_i)$ en vervang alle voorkomste van x_i deur sê $h_1^r\ (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r})$. Dit beskryf een stap in 'n proses wat gebruik kan word om alle eksistensiële kwantore uit 'n gegewe gf te verwyder.

In die geval waar die eksistensiële kwantor nie binne die bereik van 'n universele kwantor verskyn nie, lyk die proses soos volg.

Voorkomste van die *eksistensiële* gekwantifiseerde veranderlike sal in hierdie geval met 'n konstante simbool, eerder as met 'n funksieterm vervang word. Derhalwe sal bo en behalwe Skolemfunksies h_i^n, ook 'n versameling van Skolemkonstantes, sê c_i nodig wees.

As voorbeelde bied Hamilton (1990 : 71) die volgende aan:

5.42 Voorbeeld

(i) Die skolemvorm van

$(\forall x_1)(\exists x_2)\ (A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow (\exists x_3)\ A_1^3(x_1, x_2, x_3))$ is
$(\forall x_1)\ (A_1^2\ (x_1, h_1^1(x_1)) \Rightarrow A_1^3\ (x_1, h_1^1\ (x_1), h_2^1\ (x_1)))$.

(ii) Die Skolemvorm van

$(\exists x_1)(\forall x_2)\ ((A_1^1(x_1) \wedge (\forall x_3)\ A_1^3(x_1, x_2\ x_3)) \Rightarrow (\exists x_4)(\forall x_5)\ A_1^3(x_1, x_4, x_5))$ is
$(\forall x_2)\ ((A_1^1(x_2) \wedge (\forall x_3)\ A_1^3(c_1, x_2\ x_3)) \Rightarrow (\forall x_5)\ A_1^3(c_1, h_1^1\ (x_2), x_5))$.

5.43 Proposisie

'n Gf *A* van *L* is 'n teenstrydigheid as en slegs as die Skolemvorm van *A* 'n teenstrydigheid is.

Hamilton (1990 : 71-72) bewys hierdie proposisie volledig.

Tot dusver in hierdie hoofstuk is die aard van formele tale beskryf, en verskillende bewerings is oorgesit na gfs van toepaslike eersteorde tale. Vir die res van hierdie hoofstuk gaan 'n vaste, ongespesifiseerde eersteorde taal *L* beskou word. Die rede is dat alle resultate dan op alle eersteorde tale toegepas kan word. Die simbole van *L* kan op talle verskillende maniere geïnterpreteer word, maar daar sal gekonsentreer word op die formele aspekte van die taal, en die logiese verwantskappe tussen gfs. Dit is 'n afwyking in dié sin dat tot dusver meer gekonsentreer is op die eienskappe van gfs, wat afhanklik is van 'n besondere interpretasie.

Eers word 'n formele deduktiewe stelsel gedefinieer, waarna aangetoon sal word dat dit al die noodsaaklike eienskappe besit, naamlik konsistensie en dat sy klas van stellings inderdaad die klas van logies geldige gfs is.

5.44 Definisie

Beskou dus 'n vaste eersteorde taal L. Definieer 'n formele deduktiewe stelsel K_L deur die volgende aksiomas en deduksiereëls:

Aksiomas

Laat A, B en C enige gfs van L wees. Die volgende is aksiomas van K_L.

(K1) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

(K2) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

(K3) $(\sim A \Rightarrow \sim B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

(K4) $((\forall x_i)\, A \Rightarrow A)$, as x_i nie vry in A voorkom nie.

(K5) $((\forall x_i)\, A(x_i) \Rightarrow A(t))$, as $A(x_i)$ 'n gf van L is, en t is 'n term in L wat vry is vir x_i in $A(x_i)$.

(K6) $(\forall x_i)\, (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x_i)\, B)$, as A geen vrye voorkomste van die veranderlike x_i bevat nie.

Hierdie is inderdaad aksiomaskemas, en elkeen het oneindig veel instansies.

Reëls

(1) Modus ponens (MP). Uit A en $(A \Rightarrow B)$ volg B, waar A en B enige gfs van L is.

(2) Veralgemening. Uit A volg $(\forall x_i)\, A$, waar A enige gf van L en x_i enige veranderlike is.

5.45 Opmerkings

- Die aksiomaskemas en deduksiereëls van K_L sluit die aksiomaskemas en reëls van L in. Die addisionele aksiomas en reëls is nodig vir bewyse wat die eienskappe van kwantore betrek.

- Aksioma K(5) is in sy mees algemene vorm. In toepassings sal die instansie $((\forall x_i) A \Rightarrow A)$ dikwels na vore kom, waar x_i 'n vrye of gebonde veranderlike sal wees. As x_i vry in A voorkom, mag A as $A(x_i)$ geskryf word, en uit K(5) volg dat $((\forall x_i) A(x_i) \Rightarrow A(x_i))$, omdat x_i vry is vir x_i in $A(x_i)$. As x_i nie vry in A voorkom nie, dan volg uit (K4) dat $((\forall x_i) A \Rightarrow A)$.

5.46 Definisie

- 'n *Bewys* in K_L is 'n ry gfs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ van L só dat vir elke i, $1 \leq i \leq n$, A_i 'n aksioma van K_L is, óf A_i volg uit vorige lede van die ry deur MP of veralgemening.

- As Γ 'n versameling gfs van L is, dan is 'n *deduksie uit* Γ in K_L 'n soortgelyke ry, waarby lede van Γ ingesluit mag word.

- 'n Gf A is 'n *stelling* van K_L as A die laaste lid van 'n bewys in K_L is.

- 'n Gf A is 'n *gevolgtrekking* in K_L van die versameling Γ van gfs, as A die laaste lid van 'n ry is wat 'n deduksie uit Γ in K_L voorstel.

- Die notasie $\vdash A$ sal aandui dat A 'n stelling van K_L is, terwyl $\Gamma \vdash A$ sal aandui dat A 'n gevolgtrekking in K_L van Γ is, waar Γ 'n versameling gfs van K_L is.

- Vir gerief sal K_L met K afgekort word.

5.47 Proposisie

As A 'n gf van L is, en A is 'n toutologie, dan is A 'n stelling van K.

Bewys

'n Gf A van L is 'n toutologie as daar 'n toutologiese gf A_0 van L is waaruit A verkry word deur die beweringveranderlikes met gfs van L te vervang. Laat A 'n gf van L wees en stel A is 'n toutologie. Laat A_0 die ooreenstemmende gf van L wees. Dan is

A_0 'n toutologie, en so ook $\vdash A_0$. Die bewys van A_0 in L kan oorgesit word na 'n bewys van A in K deur beweringveranderlikes met toepaslike gfs van L te vervang. Wat verkry word is 'n bewys in K omdat aksiomaskemas (L1), (L2), (L3) en die reël MP (kyk afdeling 4.14) gemeenskaplik vir die stelsels L en K is. Derhalwe is $\vdash A$, soos verlang is. □

In teenstelling met dieselfde geval in hoofstuk 4 (kyk afdeling 4.28), geld die omgekeerde van hierdie stelling nie.

'n Belangrike feit om op te let op hierdie stadium is dat alle instansies van (K1), (K2) en (K3) logies geldig is aangesien hulle toutologieë is. Hamilton (1990 : 75-76) bewys vervolgens die volgende proposisie volledig:

5.48 Proposisie

Alle instansies van aksiomaskemas (K4), (K5) en (K6) is logies geldig.

Hierdie voorkennis is nodig om 'n belangrike stelling wat analoog is met dié in afdeling 4.28 te bewys.

5.49 Die betroubaarheidstelling vir K.

Vir enige gf A van L, as $\vdash A$, dan is A logies geldig.

Bewys

Die bewys volg deur induksie op die aantal stappe in 'n bewys vir A.

As A in een stap bewys word, dan is A 'n aksioma van K. Maar elke aksioma van K is logies geldig. Veronderstel nou A het 'n bewys met n stappe (n > 1), en dat alle stellings van K met bewyse in minder as n stappe logies geldig is. A kom voor in 'n bewys, dus A is 'n aksioma, óf A volg uit vorige gfs in die bewys deur die gebruik van MP of veralgemening. As A 'n aksioma is, dan is A logies geldig. As A uit B en ($B \Rightarrow A$) volg, dan het B en ($B \Rightarrow A$) korter bewyse, en volg uit die induksiehipotese dat B

en $(B \Rightarrow A)$ logies geldig is. Uit afdeling 5.39 volg dat A logies geldig is. As A deur veralgemening uit 'n vorige gf C volg, dan is C logies geldig, en dus is A, wat $(\forall x_i)\ C$ is, volgens afdeling 5.39 logies geldig. Derhalwe is A vir alle gevalle logies geldig. □

5.50 Gevolgtrekking

K is konsistent.

Bewys

Veronderstel $\vdash A$ en $\vdash (\sim A)$ vir 'n gf A van L. Dan volg uit afdeling 5.49 dat A en $(\sim A)$ beide logies geldig is. Derhalwe is beide A en $(\sim A)$ in enige interpretasie geldig. Dit is egter teenstrydig met afdeling 5.27, en gevolglik moet K konsistent wees. □

5.51 Voorbeeld

Alhoewel uit die reël vir veralgemening volg dat $A \vdash (\forall x_i)\ A$ vir enige gf A van K, toon Hamilton (1990 : 76-77) met 'n teenvoorbeeld aan dat dit nie noodwendig so is dat $\vdash (A \Rightarrow (\forall x_i)\ A)$ nie.

5.52 Die deduksiestelling vir K

Laat A en B gfs van L en Γ 'n versameling (moontlik leeg) van gfs van L wees. As $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, en die deduksie bevat geen toepassing van veralgemening waarin 'n vrye veranderlike in A betrokke is nie, dan $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$.

Hierdie bewys word volledig deur induksie op n, die aantal gfs in die deduksie van B uit $\Gamma \cup \{A\}$, deur Hamilton (1990 : 77-78) uitgevoer.

5.53 Gevolgtrekking

As $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, en A is 'n geslote gf, dan $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$.

5.54 Gevolgtrekking

Vir enige gfs A, B en C van L, $\{(A \Rightarrow B), (B \Rightarrow C)\} \vdash (A \Rightarrow C)$.

5.55 Proposisie

Veronderstel A en B is gfs van L, Γ is 'n versameling gfs van L en $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)$. Dan $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.

5.56 Ekwivalensie

Dit is gerieflik om die konnektief $\Leftrightarrow$ as 'n gedefinieerde simbool te implementeer. Vir gfs A en B van L, sal $(A \Leftrightarrow B)$ dieselfde betekenis hê as $\sim ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \sim (B \Rightarrow A))$.

Dit moet beklemtoon word dat $(A \Rightarrow B)$ nie 'n gf van L is nie, en slegs 'n gerieflike afkorting vir die besondere gf is.

5.57 Proposisie

Vir enige gfs A en B van L, $\vdash (A \Leftrightarrow B)$ as en slegs as $\vdash (A \Rightarrow B)$ en $\vdash (B \Rightarrow A)$.

Bewys

Veronderstel $\vdash (A \Leftrightarrow B)$. Dan $\vdash \sim ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \sim (B \Rightarrow A))$. Maar die gfs $(\sim ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \sim (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ en $(\sim ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \sim (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ is toutologieë. Dus volg uit proposisie 5.47 dat hierdie gfs stellings van K is. Uit MP volg dan $\vdash (A \Rightarrow B)$ en $\vdash (B \Rightarrow A)$, soos verlang is.

Veronderstel nou dat $\vdash (A \Rightarrow B)$ en $\vdash (B \Rightarrow A)$. Dan moet aangetoon word dat $\vdash \sim ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \sim (B \Rightarrow A))$. Dit is voldoende om aan te toon dat die gf $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow \sim ((A \Rightarrow B) \Rightarrow \sim (B \Rightarrow A)))$ 'n toutologie is, en dit kan maklik gedoen word deur 'n waar-onwaartabel te konstrueer. □

5.58 Definisie

As A en B gfs van L is en $\vdash (A \Leftrightarrow B)$, dan is A en B *ekwivalent bewysbaar.*

5.59 Gevolgtrekking

Vir enige gfs A, B en C van L, as A en B ekwivalent bewysbaar en B en C ekwivalent bewysbaar is, dan is A en C ekwivalent bewysbaar.

Bewys

Veronderstel $\vdash (A \Leftrightarrow B)$ en $\vdash (B \Leftrightarrow C)$.
Dan volg $\vdash (A \Rightarrow B)$ en $\vdash (B \Rightarrow C)$.
Dus volg $\vdash (A \Rightarrow C)$ uit die reël van hipotetiese sillogisme.
Omgekeerd, as $\vdash (B \Rightarrow A)$ en $\vdash (C \Rightarrow B)$, dan $\vdash (C \Rightarrow A)$, uit die reël van hipotetiese sillogisme. Dus volg uit proposisie 5.57 $\vdash (A \Leftrightarrow C)$. □

Proposisie 5.57 is baie handig om aan te toon dat twee gfs ekwivalent bewysbaar is. Daar hoef slegs aangetoon te word dat beide implikasies stellings is.

Die volgende proposisie toon aan dat 'n gebonde veranderlike vervang kan word om 'n gf te kry wat ekwivalent bewysbaar aan die oorspronklike gf is, op voorwaarde dat die nuwe veranderlike toepaslik gekies word.

5.60 Proposisie

As x_i vry is $A(x_i)$ voorkom, en x_j is 'n veranderlike wat nie vry of gebonde in $A(x_i)$ is nie, dan $\vdash ((\forall x_i)\, A(x_i) \Leftrightarrow (\forall x_j)\, A(x_j))$. Die bewys van hierdie proposisie word deur Hamilton (1990 : 82) aangebied.

5.61 Proposisie

Laat A 'n gf van L met vrye veranderlikes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ wees. Dan $\vdash A$ as en slegs as $\vdash (\forall y_1)(\forall y_2) \ldots (\forall y_n)A$.

Die bewys na beide kante volg deur induksie op die aantal vrye veranderlikes.

5.62 Definisie

As A 'n gf van L is wat slegs $y_1, y_2, ..., y_n$ as vrye veranderlikes bevat, dan word die gf $(\forall y_1)(\forall y_2) ... (\forall y_n)$ die *universele afsluiting* van A genoem. Die universele afsluiting van A sal met A^1 aangedui word.

Proposisie 5.61 beweer dat vir enige gf A van L, $\vdash A$ as en slegs as $\vdash A^1$. Dit kan maklik aangetoon word dat A en A^1 oor die algemeen nie ekwivalent bewysbaar is nie.

5.63 Proposisie

Laat A en B gfs van L wees, en veronderstel dat B_0 uit die gf A_0 volg deur een of meer voorkomste van A in A_0 met B te vervang. Dan $\vdash ((A \Leftrightarrow B)^1 \Rightarrow (A_0 \Leftrightarrow B_0))$.

Hierdie redelik ingewikkelde en lang bewys word deur Hamilton (1990 : 83-85) uitgevoer deur induksie op die lengte van A_0.

5.64 Gevolgtrekking

Laat A, B, A_0 en B_0 wees soos in proposisie 5.63. As $\vdash (A \Leftrightarrow B)$, dan $\vdash (A_0 \Leftrightarrow B_0)$.

5.65 Gevolgtrekking

As x_j nie in die gf $A(x_i)$ voorkom nie, en die gf B_0 volg uit A_0 deur een of meer voorkomste van $(\forall x_i)\, A(x_i)$ met voorkomste van $(\forall x_j)\, A(x_j)$ te vervang, dan $\vdash (A_0 \Leftrightarrow B_0)$.

5.66 Voorgevoegde vorm

Een gebruik van voorgevoegde normaalvorms, wat in afdeling 5.69 gedefinieer sal word, is om die verwantskappe in logiese strukture van formules na vore te bring. Dit behels onder andere die rangskikking van kwantore.

5.67 Proposisie

Laat A en B gfs van L wees.

(i) As x_i nie vry in A voorkom nie, dan $\vdash ((\forall x_i)\ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x_i)\ B))$, en $\vdash ((\exists x_i)\ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (\exists x_i)\ B))$.

(ii) As x_i nie vry in B voorkom nie, dan $\vdash ((\forall x_i)\ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\exists x_i)\ A \Rightarrow B))$, en $\vdash ((\exists x_i)\ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\forall x_i)\ A \Rightarrow B))$.

Hamilton (1990 : 86-87) bied die volgende voorbeeld aan.

5.68 Voorbeeld

Toon aan dat die gf
$(\forall x_1)\ A_1^1\ (x_1) \Rightarrow (\forall x_2)\ (\exists x_3)\ A_1^2\ (x_2, x_3)$ ekwivalent bewysbaar aan die gf

$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\ A_1^1\ (x_1) \Rightarrow\ A_1^2\ (x_2, x_3))$ is.

Dit word gedoen deur 'n ry gfs, elk ekwivalent bewysbaar aan die volgende een, neer te skryf, deur telkens proposisie 5.67 toe te pas.

$(\forall x_1)\ A_1^1\ (x_1) \Rightarrow (\forall x_2)(\exists x_3)\ A_1^2\ (x_2, x_3)$,
$(\exists x_1)\ (A_1^1\ (x_1) \Rightarrow (\forall x_2)(\exists x_3)\ A_1^2\ (x_2, x_3))$,
$(\exists x_1)(\forall x_2)\ (A_1^1\ (x_1) \Rightarrow (\exists x_3)\ A_1^2\ (x_2, x_3))$,
$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)\ (A_1^1\ (x_1) \Rightarrow A_1^2\ (x_2, x_3))$.

Gfs van L kan baie kompleks wees, en moeilik om te interpreteer as die kwantore nie almal aan die begin van die gf voorkom nie. Bogenoemde resultate oor substitusies en ekwivalensie toon aan dat elke gf ekwivalent bewysbaar aan 'n gf is waarin al die kwantore voor die gf staan.

5.69 Definisie

'n Gf A van L is in *voorgevoegde normaalvorm* as dit in die vorm $(Q_1\ x_{i_1})(Q_2\ x_{i_2})\ \ldots\ (Q_k\ x_{i_k})\ D$ is, waar D 'n gf van L met geen kwantore is, en elke Q_j óf $\forall$, óf $\exists$ voorstel.

'n Gf wat geen kwantore bevat nie, word as 'n triviale geval van 'n gf in voorgevoegde normaalvorm beskou.

Die volgende proposisie word deur Hamilton (1990 : 87-87) bewys deur induksie op die lengte van die gf A.

5.70 Proposisie

Vir enige gf A van L, bestaan daar 'n gf B wat in voorgevoegde normaalvorm is, en ekwivalent bewysbaar aan A is.

5.71 Die adekwaatheid van K

Die *toereikendheidstelling* van K is van belang omdat dit die versekering gee dat die semantiese en sintaktiese idees van waarheid tot ekwivalente resultate lei. (Kyk afdeling 4.25). Alvorens hierdie belangrike stelling bewys word, is 'n paar voorafgaande begrippe nodig.

5.72 Definisie

'n *Uitbreiding* van K is 'n formele stelsel wat verkry word deur die versameling aksiomas te verander of te vergroot só dat al die stellings van K, steeds stellings in die uitbreiding sal wees, terwyl nuwe stellings moontlik na die uitbreiding bygevoeg sal word. As daar twee uitbreidings K_1 en K_2 van K is, dan is K_1 'n uitbreiding van K_2 as die klas van stellings vir K_1 groter is as die klas van stellings vir K_2, of in die triviale geval, dieselfde is.

5.73 Definisie

'n *Eersteordestelsel* is 'n uitbreiding van K_L, waar L 'n eersteorde taal is.

5.74 Definisie

'n Eersteordestelsel S is *konsistent* as vir geen gf A, beide A en $(\sim A)$ stellings van S is nie.

5.75 Proposisie (kyk afdeling 4.33)

Laat S 'n konsistente eersteordestelsel wees, en laat A 'n geslote gf wees wat nie 'n stelling van S is nie. Dan is S^* ook konsistent, waar S^* die uitbreiding van S is wat verkry word deur $(\sim A)$ as 'n addisionele aksioma by te voeg.

Bewys

Veronderstel S^* is inkonsistent. Dan volg vir 'n gf, sê B, $\vdash B$ en $\vdash (\sim B)$. Omdat S^* 'n uitbreiding van K is, volg uit proposisie 5.47 $\vdash (\sim B \Rightarrow (B \Rightarrow A))$. Dus volg $\vdash (B \Rightarrow A)$ deur MP, en $\vdash A$, weer eens deur MP. Daar bestaan dus 'n bewys van A in S^*. Só 'n bewys is 'n deduksie vanaf $(\sim A)$ in S.

Dus $(\sim A) \vdash A$.
Omdat $(\sim A)$ geslote is, kan die deduksiestelling (kyk afdeling 5.52) toegepas word om $\vdash ((\sim A) \Rightarrow A)$ te verkry.

Maar uit proposisie 5.47 volg $\vdash (((\sim A) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$.
Dus volg $\vdash A$ uit MP.
Dit is teenstrydig met die hipotese dat A nie 'n stelling van S is nie, en gevolglik moet S^* konsistent wees. □

5.76 Definisie

'n Eersteordestelsel S is *volledig* as vir elke geslote gf A, $\vdash A$, óf $\vdash (\sim A)$. Dit is belangrik om op te let dat K *nie* volledig is nie. So is die gf $(\forall x_1)\ A_1^1\ (x_1)$, óf sy negering, byvoorbeeld nie 'n stelling van K nie.

5.77 Proposisie (Kyk afdeling 4.36)

Laat S 'n konsistente eersteordestelsel wees. Dan bestaan daar 'n konsistente uitbreiding van S wat volledig is.

Hierdie bewys kan volledig in Hamilton (1990 : 94) gevolg word.

Van nou af, sal die metodes wesenlik van dié van hoofstuk 4 verskil. Proposisie 4.37 kan soos volg in die predikaatlogika geïnterpreteer word:

5.78 Proposisie

Laat S 'n konsistente uitbreiding van K_L wees. Dan bestaan daar 'n interpretasie van L waarin elke stelling van S waar is.

Hierdie ingewikkelde en lang bewys word deur Hamilton (1990 : 95-99) aangebied. Om die bewys te kan uitvoer, is dit nodig om die taal L te vergroot deur 'n oneindige versameling van konstante simbole b_0, b_1, b_2, ... by te voeg.

Proposisie 5.78 maak die bewys van die volgende belangrike proposisie maklik.

5.79 Proposisie (Die toerekendheidstelling van K_L). (Kyk afdeling 4.38)

As A 'n logies geldige gf van L is, dan is A 'n stelling van K_L.

Bewys

Laat A 'n logies geldige gf van L wees, en laat A^1 sy universele afsluiting wees. Dan volg uit gevolgtrekking 5.30 dat A^1 ook logies geldig moet wees. Veronderstel A is nie 'n stelling van K_L nie. Dan volg uit proposisie 5.61 dat A^1 nie 'n stelling van K_L is nie. As $(\sim A^1)$ as 'n addisionele aksioma ingesluit word, word 'n nuwe stelsel verkry, wat volgens proposisie 5.75 konsistent is. Dus volg uit proposisie 5.78 dat daar 'n interpretasie van L is waarin elke stelling van K_L^1 waar is. In besonder is $(\sim A^1)$ in hierdie interpretasie waar, en dus is A^1 onwaar, omdat A^1 noodwendig geslote is. Dit is teenstrydig met die logies geldigheid van A^1, en dus moet A 'n stelling van K_L wees.

□

Proposisie 5.79 het talle afleidings en gevolgtrekkings. Alvorens dit behandel word, is dit gerieflik om die begrip model te definieer.

5.80 Definisie

(i) Laat Γ 'n versameling gfs van L wees. 'n Interpretasie van L, waarin elke element van Γ waar is, word 'n *model* van Γ genoem.

(ii) As S 'n eersteordestelsel is, dan is 'n *model van* S 'n interpretasie waarin elke stelling van S waar is.

5.81 Proposisie

Laat S 'n eersteordestelsel wees, en laat I 'n interpretasie wees waarin elke aksioma van S waar is. Dan is I 'n model van S. (Kyk afdeling 5.49)

Bewys

Veronderstel dat I 'n interpretasie is waarin elke aksioma van S waar is. Laat A 'n stelling van S wees. Dan moet aangetoon word dat A waar in I is. Die bewys is deur induksie op die aantal, sê n, gfs in 'n bewys van A. Stel n = 1. Dan is A 'n aksioma van S, en dus waar in I.

Stel vervolgens n > 1. Veronderstel dat elke stelling met 'n korter bewys, waar is in I.

Geval 1: A volg deur MP uit vorige gfs, sê uit B en $(B \Rightarrow A)$. Uit die induksiehipotese volg dat B en $(B \Rightarrow A)$ waar in I is, en dus is volgens proposisie 5.28, A waar in I.

Geval 2: A volg uit 'n vorige gf in die bewys deur veralgemening. Dan is A, sê, $(\forall x_i)$ B, en die vorige gf is B. Dus volg uit die induksiehipotese, dat B waar in I is. Dus volg uit proposisie 5.29, dat $(\forall x_i)$ B waar is in I.

Geval 3: A is 'n aksioma van S. Dan volg soortgelyk as hierbo dat A waar is in I.

Gevolglik is elke stelling van S waar in I. Dus is I 'n model van S. □

Proposisie 5.78 kan vervolgens soos volg gestel word:

5.82 Proposisie

'n Eersteordestelsel S is konsistent as en slegs as dit 'n model het.

Bewys

Een rigting van die implikasie is reeds bewys. Veronderstel nou dat S 'n model I het, en dat S inkonsistent is. Dan $\vdash A$ en $\vdash (\sim A)$ vir een of ander gf A. Maar alle stellings van S is waar in I. Dus is beide A en $(\sim A)$ waar in I. maar uit afdeling 5.27 volg dat dit onmoontlik is. Dus moet S konsistent wees. □

5.83 Proposisie

Laat S 'n konsistente eersteordestelsel wees, en laat A 'n geslote gf wees wat waar in elke model van S is. Dan is A 'n stelling van S.

Bewys

Laat A 'n geslote gf wees wat waar in elke model van S is. Veronderstel A is nie 'n stelling van S nie. Dan volg uit proposisie 5.75 dat die stelsel S^1 wat uit S verkry word deur $(\sim A)$ as addisionele aksioma by te voeg, konsistent is. Dus volg uit proposisie 5.82 dat S^1 'n model het. $(\sim A)$ is waar in M, en dus is A onwaar in M.

Omdat S^1 'n uitbreiding van S is, volg dat M 'n model van S is. Dit is teenstrydig met die hipotese dat A waar is in elke model van S, en dus moet A 'n stelling van S wees. □

5.84 Proposisie (Löwenheim-Skolem stelling)

As 'n eersteordestelsel S 'n model het, dan het S 'n model waarvan die gebied 'n aftelbare versameling is. ('n Versameling is aftelbaar as sy elemente in 'n een-tot-eenafbeelding met die versameling natuurlike getalle is.)

Die bewys word deur Hamilton (1990 : 102) aangebied.

5.85 Proposisie (Die kompaktheidstelling)

As elke eindige deelversameling van 'n versameling van aksiomas van 'n eersteordestelsel S 'n model het, dan het S self 'n model.

Bewys

Veronderstel dat elke eindige versameling van aksiomas van S 'n model het, maar dat S nie 'n model het nie. Dan is S volgens proposisie 5.82 inkonsistent. Dus $\vdash A$ en $\vdash (\sim A)$ vir een of ander gf A. Maar hierdie bewyse kan slegs instansies met eindig veel aksiomas van S bevat. Laat Γ die versameling van al die aksiomas van S wees wat in hierdie bewyse gebruik word. Dan is Γ eindig, en het gevolglik 'n model. Dus bestaan daar 'n interpretasie I waarin elke element van Γ waar is. Dit volg dat beide A en $(\sim A)$ in I waar is. Die rede is omdat die deduksiereëls, MP en veralgemening waarheid behou in 'n interpretasie. Maar A en $(\sim A)$ kan nie beide waar in I wees nie. Dit is teenstrydig met die veronderstelling, en gevolglik moet S 'n model hê. □

Proposisie 5.85 word somtyds ietwat anders gestel, en word gegee as 'n gevolgtrekking.

5.86 Gevolgtrekking

Laat Γ 'n oneindige versameling van gfs van K_L wees. Dan het Γ 'n model as elke eindige deelversameling van Γ 'n model het.

5.87 Samevatting

In hierdie hoofstuk is 'n formele stelsel gekonstrueer. Die stelsel is meer kompleks as die stelsel in hoofstuk 4. Die beginsels waarop dit gebou is, is egter dieselfde. Hierdie stelsel moet verkieslik volledig wees. Oor die algemeen kan gesê word dat 'n konsistente eersteordestelsel volledig is as en slegs as dit nie moontlik is om 'n aksioma by te voeg sonder om konsistentheid te verloor nie.

Die belangrikste vraag in die wiskunde is egter of 'n besondere eersteordestelsel teenstrydighede bevat of nie. Anders gestel, is die stelsel konsistent. Die beste toets vir konsistensie kom van proposisie 5.82. 'n Eersteordestelsel S is konsistent as en slegs as dit 'n model het. Om dus te bewys dat S konsistent is hoef slegs 'n model vir S gekonstrueer te word.

Die konstruksie van hierdie formele stelsel is in die metataal, in hierdie geval, Afrikaans, gedoen. Die formele taal wat geskep is, word die objektaal genoem. Enige bewys van eienskappe van die objektaal moet binne die metataal plaasvind. Die predikaatlogika maak dit moontlik om 'n enorme aantal argumente wat in predikaatvorm is, te evalueer. Hierdie tipe argumente kom algemeen in wiskundige en fisiese wetenskappe voor. In hoofstuk 6 sal sterk op formele strengheid gefokus word om bewyse uit te voer.

HOOFSTUK 6: FORMELE BEWYSTEGNIEKE

6.1 Inleiding

In hierdie hoofstuk sal 'n formele benadering met die uitskryf van bewyse gevolg word. Die beginsels van die logika wat in hoofstukke 4 en 5 ontwikkel is, sal toegepas word. Daar is geen vaste resep om bewyse uit te skryf nie. Selfs eenvoudige bewyse benodig 'n mate van kreatiwiteit. Oor die algemeen is daar ook geen eenduidige bewys van 'n probleem nie. Bewyse kan nooit gereduseer word tot 'n meganiese proses nie, maar 'n bewys kan tog met heelwat meer vertroue aangepak word as sekere basiese beginsels en tegnieke vir die uitskryf van 'n bewys gevolg word.

Verskillende bewyse vereis verskillende beginpunte en verskil in benadering ten opsigte van die logiese struktuur. Plumpton et al. (1984 : 1) merk die volgende op:

> "Fundamentally, mathematical proof is based on logical argument, that is to establish from a hypothesis 'p is true' a conclusion 'q is true'."

In hierdie hoofstuk sal verskillende bewystegnieke vir spesifieke probleme wat varieer vanaf die skool tot op voorgraadse vlak bestudeer word.

6.2 Die keusemetode

Volgens Solow (1981 : 40-43) is die keusemetode 'n bewystegniek wat bewerings betrek wat die kwantor "vir alle" bevat. Sodanige bewerings kom op 'n heel natuurlike wyse in die wiskunde na vore, en in besonder in die versamelingsteorie.

Om byvoorbeeld aan te toon dat $A \subseteq B$, word 'n willekeurige element x van A gekies, en dan word bewys dat x ook 'n element van B is. Die keusemetode sal in hierdie hoofstuk dikwels gebruik word om bewyse uit te voer.

Eerstens word 'n toepaslike definisie gegee wat nodig is vir die oplossing van die daaropvolgende voorbeelde.

6.2.1 Definisie

Veronderstel A en B is versamelings.

(a) A is gelyk aan B (aangedui met $A = B$) as en slegs as die bewering $(\forall x)$ $((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ waar is.

(b) A is 'n deelversameling van B ($A \subseteq B$) as en slegs as die bewering $(\forall x)$ $((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$ waar is.

Voorbeeld 1

Bewys dat $\emptyset \subseteq A$ vir enige versameling A.

Bewys

Veronderstel A is 'n willekeurige versameling. Per definisie, beteken $\emptyset \subseteq A$ dat $(\forall x)$ $[(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A)]$. Maar die predikaat $x \in \emptyset$ is onwaar vir alle x, sodat, volgens afdeling 4.3.4, $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A)$ waar is vir alle x, ongeag die waarheidswaarde van die predikaat $x \in A$.
Gevolglik is die bewering $(\forall x)$ $[(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in A)]$ waar, sodat $\emptyset \subseteq A$ waar is.

□

Voorbeeld 2

Bewys dat $A \subseteq A$ vir enige versameling A.

Bewys

Veronderstel A is 'n willekeurige versameling. Per definisie beteken $A \subseteq A$ dat

$$(\forall x)\ [(x \in A) \Rightarrow (x \in A)].$$

Maar die predikaat $(x \in A) \Rightarrow (x \in A)$ het die vorm $p \Rightarrow p$ en is 'n toutologie. (Kyk afdelings 4.8 en 5.33) Gevolglik is die bewering $(\forall x)\ [(x \in A) \Rightarrow (x \in A)]$ waar en dus is $A \subseteq A$. □

Voorbeeld 3

Bewys dat vir enige versamelings A en B, $A = B$ as en slegs as $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$.

Bewys

Per definisie is $A = B$ as $(\forall x)\ [(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$, terwyl $A \subseteq B$ gedefineer is deur $(\forall x)\ [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)]$.
Maar $(\forall x)\ [(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$ is logies ekwivalent aan die konjunksie
$(\forall x)\ [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)] \wedge (\forall x)\ [(x \in B) \Rightarrow (x \in A)]$.
Deur die toutologie
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ te gebruik tesame met die feit dat
$(\forall x)\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\ (P(x)) \wedge (\forall x)\ (Q(x))$, volg dat
$(\forall x)\ [(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$
$\Leftrightarrow (\forall x)\ [((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \wedge ((x \in B) \Rightarrow (x \in A))]$
$\Leftrightarrow (\forall x)\ [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)] \wedge (\forall x)\ [(x \in B) \Rightarrow (x \in A)]$ □

Elkeen van hierdie resultate is 'n fundamentele resultaat in die versamelingsteorie. Elkeen kan in eenvoudige simbole omskrywe word na 'n makliker vorm as die formele bewering. Die eerste voorbeeld beweer "die leë versameling is 'n deelversameling van enige versameling".

Volgens die tweede voorbeeld is "elke versameling 'n deelversameling van homself". Volgens die derde voorbeeld is "twee versamelings gelyk as en slegs as elk 'n deelversameling van die ander is". Die bewyse wat in voorbeelde 1–3 gegee is, maak eksplisiet gebruik van die logiese beginsels wat in hoofstukke 4 en 5 voorkom. Die styl wat wiskundiges in die praktyk gebruik is nie so formeel nie. Hoe meer ervare 'n wiskundige word met die uitskryf van bewyse, hoe minder aandag word aan die eksplisiete logiese beginsels gegee. Solow (1981 : 1) onderskryf hierdie siening:

"Unfortunately, many proofs that appear in textbooks and journal articles are not presented properly; more appropriately stated, the proofs are presented properly for someone who already knows the language of mathematics."

In hierdie verband word ook verwys na afdeling 3.6.

Teller (1980 : 798) glo egter dat sommige bewyse so eenvoudig is, dat hulle maklik gekontroleer kan word.

"Some proofs are so simple that even I can survey them. Others are so complicated that only a few mathematicians can."

Die direkte manier om te bewys dat 'n versameling A 'n deelversameling van 'n versameling B is, is om 'n willekeurige vaste element x van versameling A te neem, en aan te toon dat x 'n element van B is. Die bewys word uitgevoer deur afleidings te maak wat afhanklik van die besonderhede van die probleem is. Morash (1987 : 117) illustreer hierdie metode met die volgende twee voorbeelde.

Voorbeeld 4

Bewys dat vir enige versamelings A en B, $A \cap B \subseteq A$ en $A \subseteq A \cup B$.

Bewys

Om te bewys dat $A \cap B \subseteq A$, word 'n willekeurige, vaste element x van $A \cap B$ beskou. Daar moet aangetoon word dat hierdie element x, ook 'n element van A is.

Omdat $x \in A \cap B$, moet $x \in A$ en $x \in B$. Dus is $x \in A$, soos verlang is. Die laaste stap maak implisiet gebruik van die toutologie $(p \wedge q) \Rightarrow p$ (afdeling 4.10(4)).

Om te bewys dat $A \subseteq A \cup B$, stel $x \in A$. Daar moet nou aangetoon word dat $x \in A \cup B$, dit is, $x \in A$ óf $x \in B$. Omdat $x \in A$, volg die laaste bewering direk. Die toutologie wat hier gebruik is, is $p \Rightarrow (p \vee q)$ (afdeling 4.10(5)). □

Voorbeeld 5

Bewys dat vir enige versamelings A en B, $A \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup B')$

Bewys

Veronderstel x is 'n willekeurige element van A. Om te bewys dat $x \in (A \cup B) \cap (A \cup B')$, moet bewys word dat $x \in A \cup B$ *en* $x \in A \cup B'$. Omdat $x \in A$, volg dit uit voorbeeld 4 dat $x \in A \cup B$. Dieselfde resultaat impliseer dat $x \in A \cup B'$. Dus is $x \in (A \cup B) \cap (A \cup B')$. □

Beginners argumenteer dikwels dat hierdie metode om $A \subseteq B$ te bewys, nie bewys dat elke element van 'n versameling A ook 'n element van versameling B is nie. Hulle redeneer dat die kies van 'n element x van A, slegs een element van A is. Hulle fouteer egter in hierdie opsig deurdat hulle die betekenis van die universele kwantor, $\forall x$, nie verstaan nie. Verder word die feit dat x willekeurig is, verontagsaam.

Definisie 6.2.1 (b) word soos volg geïnterpreteer: daar moet aangetoon word dat enige willekeurige element x van A, ook 'n element van B sal wees. Anders gestel, daar is geen x in A wat nie ook in B is nie. In simbole lyk dit soos volg:
$\sim [(\exists x)\ ((x \in A) \wedge (x \notin B))]$.

Maar dit is logies ekwivalent met $(\forall x)\ [\sim ((x \in A) \wedge (x \notin B))]$, wat weer ekwivalent is met $(\forall x)\ [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)]$.

Voorbeeld 6

Bewys dat $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$, waar A, B en C willekeurige versamelings is.

Bewys

Veronderstel $x \in A \cap (B \cup C)$. Om te bewys dat $x \in (A \cap B) \cup C$, moet aangetoon word dat $x \in A \cap B$ óf $x \in C$. Veronderstel $x \notin C$. Die bewering is nou dat hierdie bykomende veronderstelling die gevolgtrekking $x \in A \cap B$ afdwing. Om aan te toon dat $x \in A \cap B$, moet bewys word dat $x \in A$ en $x \in B$. Maar uit die hipotese volg dat $x \in A$ en $x \in B \cup C$. Omdat uit die veronderstelling volg dat $x \in A$, hoef slegs bewys te word dat $x \in B$. Omdat $x \in B \cup C$, is $x \in B$ óf $x \in C$. Omdat $x \notin C$, volg dit dat $x \in B$.

□

Die benadering was om te begin met "veronderstel $x \notin C$" om die gevolgtrekking met logiese vorm $q \vee r$ af te lei.

Transitiwiteit van $\subseteq$ kan deur die keusemetode bewys word.

Voorbeeld 7

Bewys dat, vir enige versamelings A, B en C, as $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$ dan is $A \subseteq C$.

Bewys

Om te bewys dat $A \subseteq C$, moet $(\forall x)\,[(x \in A) \Rightarrow (x \in C)]$ geverifieer word onderhewig aan die voorwaarde, $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$, wat die hipotese is. Veronderstel dus dat x enige willekeurige element van A is. Daar moet aangetoon word dat $x \in C$. Die redenasie is soos volg:

As $x \in A$ en $A \subseteq B$, dan is $x \in B$. As $x \in B$ en $B \subseteq C$, dan is $x \in C$.

'n Belangrike opmerking oor die gevolgtrekking "$x \in B$" uit die bewerings "$x \in A$" en "$A \subseteq B$", is die geldigheid van hierdie stap. Dit volg uit die logiese beginsel modus ponens $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (afdeling 4.10 (1)).

As $x \in A$ waar is en $(\forall y)\ [(y \in A) \Rightarrow (y \in B)]$ is waar, waaruit afgelei mag word dat vir 'n gegewe x, $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ waar is, volg dat $(x \in A) \wedge ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$, en gevolglik, van modus ponens, die gevolgtrekking $x \in B$. □

In voorbeeld 7 is vir die eerste keer 'n stelling oor inklusie van versamelings bewys wat voorafgegaan is deur 'n hipotese, $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$. Om 'n bewys te beplan vir só 'n geval, is om te fokus op die verlangde gevolgtrekking, eerder as op die hipoteses. Daar is begin deur 'n willekeurige element x van A te kies en gepoog om aan te toon dat x ook 'n element van C is. Die hipoteses is slegs gedurende die bewys betrek. Hierdie beginsel sal later in meer besonderhede bespreek word.

6.3 Bewyse oor gelykheid van versamelings

Die basiese beginsel om $A = B$ te bewys is om $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ te bewys. Hierdie metode betrek twee verskillende bewyse, naamlik 'n bewys oor inklusie van versamelings in twee rigtings. Die volgende voorbeeld illustreer hierdie beginsel.

Voorbeeld 8

Beskou die volgende stelling: As $xy = 0$, dan is $x = 0$ óf $y = 0$, vir alle reële getalle x en y. Maak gebruik van hierdie stelling en bewys dat $A = B$,
waar $A = \{-2, 3\}$ en $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$, en $\mathbb{R}$ die versameling van reële getalle is.

Bewys

Om te bewys dat $A = B$, word bewys dat $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$.

(a) Om te bewys dat $A \subseteq B$, word veronderstel dat $a \in A$. Om te bewys dat $a \in B$, moet aangetoon word dat a 'n reële getal is wat $a^2 - a - 6 = 0$ bevredig.

Omdat $a \in A$, volg dat $a = -2$ of $a = 3$. As $a = -2$, dan is $a \in \mathbb{R}$ en $a^2 - a - 6 = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$.

Net so volg dat as $a = 3$, dan is $a \in \mathbb{R}$ en $a^2 - a - 6 = (3)^2 - (3) - 6 = 0$. In beide gevalle is $a \in B$.

(b) Omgekeerd, om te bewys dat $B \subseteq A$, veronderstel $x \in B$.
Dan is $x \in \mathbb{R}$ en $x^2 - x - 6 = 0$. Maar dan is $(x - 3)(x + 2) = 0$, sodat uit die stelling volg dat $x - 3 = 0$ óf $x + 2 = 0$.

Dus is $x = 3$ óf $x = -2$, wat beteken dat $x \in \{-2, 3\} = A$. □

Daar sal later na hierdie belangrike tegniek vir die uitskryf van 'n bewys teruggekeer word.

Voorbeeld 9

Gegee versamelings A en B, bewys dat $A \subseteq B$ as en slegs as $A \cap B = A$.

Deur die toutologie $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ (afdeling 4.10 (18)) te gebruik, gaan die bewys weer eens in twee aparte dele gedoen word. Daar gaan bewys word dat:

(a) As $A \subseteq B$, dan is $A \cap B = A$.
(b) As $A \cap B = A$, dan is $A \subseteq B$.

Bewys

(a) Om te bewys dat $A \cap B = A$, moet bewys word dat $A \cap B \subseteq A$ en $A \subseteq A \cap B$. Die eerste deel is reeds in voorbeeld 4 bewys. Derhalwe word slegs die tweede deel, naamlik $A \subseteq A \cap B$, uit die hipotese $A \subseteq B$, bewys.

Veronderstel $x \in A$. Daar moet nou aangetoon word dat $x \in A \cap B$, dit wil sê, $x \in A$ en $x \in B$. Maar uit die hipotese volg dat as $x \in A$, dan is $x \in B$. Gevolglik is $x \in A$ en $x \in B$.

(b) Omgekeerd, om $A \subseteq B$ te bewys, veronderstel $x \in A$. Daar moet aangetoon word dat $x \in B$. As $x \in A$ en $A \cap B = A$, dan is $x \in A \cap B$. Maar uit voorbeeld 4 volg dat $A \cap B \subseteq B$. Dus is $x \in B$. □

Voorbeeld 10

Bewys dat vir enige versamelings A, B en C, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bewys

In plaas daarvan om van inklusie in twee rigtings gebruik te maak, illustreer Engelbrecht et al. (1979 : 6) 'n ander benadering.

Vir enige element x geld die volgende:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$ □

In die derde stap word die toutologie $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (afdeling 4.10(14)), gebruik.

6.4 Bewyse en die leë versameling

Om te bewys dat $\emptyset \subseteq A$, is dit foutief om te begin deur te sê: "Veronderstel $x \in \emptyset$". In die volgende aangepaste voorbeeld beskou Morash (1987 : 121) probleme wat mag opduik wanneer bewys moet word dat 'n gegewe versameling die leë versameling is.

Voorbeeld 11

Bewys dat vir enige versameling B, $B \cap B' = \emptyset$.

Bewys

Op die oog af sal gepoog word om te bewys dat $B \cap B' \subseteq \emptyset$ en $\emptyset \subseteq B \cap B'$. Die tweede deel van die bewys is altyd waar, soos reeds in voorbeeld 1 gesien is. Om die eerste deel te bewys, is dit duidelik dat die volgende benadering nie sal werk nie: "Veronderstel $x \in B \cap B'$. Toon aan dat $x \in \emptyset$."

Dit sal nie moontlik wees om by die gevolgtrekking uit te kom nie, aangesien $\emptyset$ geen elemente besit nie. Die wiskundige word derhalwe gedwing om 'n ander benadering te volg. Hierdie spesiale metode van bewys staan bekend as: "Bewys deur teenstrydigheid" óf "Bewys deur ongerymdheid" óf "Bewys deur reductio ad absurdum". Om te bewys dat $B \cap B' = \emptyset$, word soos volg te werk gegaan:

Veronderstel $x \in B \cap B'$ dit wil sê, $B \cap B' \neq \emptyset$.
Dan is $x \in B$ en $x \in B'$.
Dus is $x \in B$ en $x \notin B$.
Die laaste bewering het die logiese vorm $p \wedge \sim p$ ('n teenstrydigheid). (Kyk afdeling 4.9.)

Die veronderstelling is gevolglik onwaar. Dus is die stelling wel waar. □

In die volgende voorbeeld word dieselfde bewystegniek as in voorbeeld 11 gebruik.

Voorbeeld 12

Bewys dat, vir enige versamelings A en B, as $A \subseteq B$, dan is $A \cap B' = \emptyset$.

Bewys

Veronderstel $x \in A \cap B'$.
Die doel is om 'n teenstrydigheid te bereik. Omdat $x \in A \cap B'$, is die bewering $(\exists x)\ [(x \in A) \wedge (x \in B')]$ waar.
Dus is die ekwivalente bewering $(\exists x)\ [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$ ook waar.
Hierdie laaste bewering is die logiese negering van:

$(\forall x)\ [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)]$, wat die definisie van $A \subseteq B$ is.
Die veronderstelling $x \in A \cap B'$ is dus teenstrydig met die hipotese $A \subseteq B$.
Dus volg dat $A \cap B' = \emptyset$. □

In die volgende voorbeeld word 'n welbekende identiteitswet bewys.

Voorbeeld 13

Bewys dat, vir enige versameling A, $A \cup \emptyset = A$.

Bewys

Daar sal aangetoon word dat $A \subseteq A \cup \emptyset$ en $A \cup \emptyset \subseteq A$. Dit is bekend dat $A \subseteq A \cup B$ waar is vir enige twee versamelings A en B. In besonder, as $B = \emptyset$, volg dat $A \subseteq A \cup \emptyset$. Verder, veronderstel $x \in A \cup \emptyset$. Daar moet aangetoon word dat $x \in A$.
As $x \in A \cup \emptyset$, dan is $x \in A$ óf $x \in \emptyset$.
Maar $x \in \emptyset$ is onwaar.
Dus is $x \in A$. □

In hierdie voorbeeld is implisiet van die toutologie $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ gebruik gemaak.

6.5 Opmerkings

1 Die toutologieë van die proposisielogika is van wesenlike belang met die uitskryf van wiskundige bewyse.

2 Die tegniek wat in die eerste deel van voorbeeld 13 gebruik is, om $B = \emptyset$ te stel in die bekende stelling $A \subseteq A \cup B$ om $A \subseteq A \cup \emptyset$ te kry, word *verbesondering* genoem.

3 In voorbeeld 4 is die bewys vir $A \cap B \subseteq A$, begin met die stap "Veronderstel $x \in A \cap B$." Wat gebeur egter as $A \cap B = \emptyset$?

Die benadering in voorbeelde 11-13 kan hier nie gevolg word nie, aangesien daar nie 'n element van $\emptyset$ gekies kan word nie. Oor die algemeen is dit só dat as gepoog word om $P \subseteq Q$ te bewys, en met die stap, "veronderstel $x \in P$", begin word, dan geld die argument slegs as P nie die leë versameling is nie. Maar wat gebeur as $P = \emptyset$?

Die antwoord is eenvoudig in dié sin dat twee aparte gevalle beskou moet word, naamlik
geval (1): $P \neq \emptyset$, en
geval (2): $P = \emptyset$.
In geval (1), sal die bewys soos in voorbeeld 4 lyk.
In geval (2), volg die verlangde resultaat uit voorbeeld 1.

Hierdie verdeling is gewoonlik "implisiet" in dié sin dat die geval $P = \emptyset$ triviaal is wanneer $P \subseteq Q$ bewys moet word. Gewoonlik word daar nie eksplisiet daarna verwys nie.

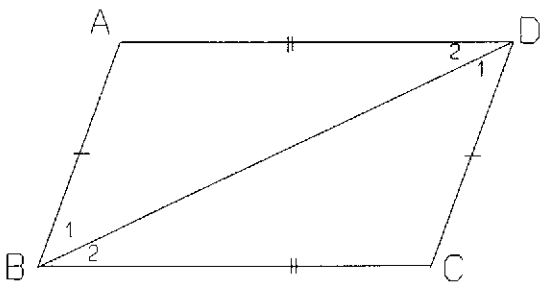
In afdelings 6.2, 6.3 en 6.4 is die keusemetode as 'n bewystegniek bespreek. Hierdie metode is veral handig vir bewyse in die versamelingsleer. Hierdie metode kan egter ook in samehang met ander bewystegnieke gebruik word. In hierdie verband word verwys na voorbeeld 11, waar onder andere van indirekte bewysmetodes gebruik gemaak is. So is ook in voorbeeld 13 van die verbesonderingstegniek gebruik gemaak. Hierdie tegniek sal later deegliker bespreek word.

6.6 Gevolgtrekkings wat ∀, maar nie ∃ of ⇒ bevat.

In hierdie afdeling word gefokus op bewyse wat hoogs elementêr is, gesien uit die oogpunt van 'n logiese of strukturele vorm. Stellings waarvan die gevolgtrekkings die eksistensiële kwantor of die implikasie konnektief bevat, word gewoonlik bewys deur studente met 'n sterk agtergrond in hoërskoolwiskunde. Die meeste studente in wiskunde se eerste kennismaking met die uitskryf van bewyse, is in die Euklidiese vlakmeetkunde, algebra, en trigonometrie op hoërskoolvlak. Daar word nou tipiese voorbeelde vir hierdie gevalle gegee.

Voorbeeld 14

In die figuur is ABCD 'n vierhoek met AB = CD en AD = BC. Bewys dat die gegewe vierhoek 'n parallelogram is.



Figuur 6.1

Bewys

BEWERINGS	REDES
1 Trek die hoeklyn BD	1 KONSTRUKSIE van 'n lynsegment
2 AB = CD	2 Hipotese
3 AD = BC	3 Hipotese
4 BD = BD	4 Gemeenskaplik
5 $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$	5 S, S, S.
6 $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$	6 Definisie van kongruente driehoeke
7 AB $\parallel$ CD	7 As die verwisselende binnehoeke gelyk is, dan is die lyne ewewydig.
8 $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$	8 Definisie van kongruente driehoeke.
9 AD $\parallel$ BC	9 As die verwisselende binnehoeke gelyk is, dan is die lyne ewewydig.
10 Vierhoek ABCD is 'n parallelogram.	10 Definisie van 'n parallelogram.

□

Die Euklidiese meetkunde is hoërskoolleerlinge se eerste werklike kennisname van deduktiewe stelsels. Dit is hier waar daar begin word met 'n versameling van aksiomas. Stellings word afgelei met behulp van bewyse waarvan die geldigheid gebaseer is op 'n aksioma of 'n reeds bewese stelling. In die konstruksie van bewyse in die Euklidiese meetkunde word die volgende vraag deurgaans gevra: "Watter feite mag gebruik word?"

Hierdie vraag is ook belangrik in die gevorderde wiskunde.

6.6.1 Spesifieke voorbeelde

Die volgende voorbeeld is nodig om 'n belangrike beginsel te illustreer.

Voorbeeld 15

Bewys dat die vierkant van 'n ewe heelgetal, 'n ewe heelgetal is.

Bewys:

Laat k 'n ewe heelgetal wees. Dan is $k = 2n$ vir een of ander heelgetal n.
Dan is $k^2 = (2n)^2 = 2(2n^2) = 2p$, waar $p = 2n^2$. Dus is k^2 'n ewe heelgetal.

□

In bewyse soos by voorbeeld 15 word studente blootgestel aan 'n baie basiese, maar uiters belangrike begrip:

'n Algemene stelling kan nie bewys word deur 'n spesifieke voorbeeld te gee nie.

Die struktuur van hierdie bewys is belangrik. Om te bewys dat A = X, sê, word 'n ketting van gelykhede verskaf:
$A = B = C = ... = X.$

Daar word by A begin en by X geëindig. Só 'n bewys, wat bekend is as 'n bewys deur *transitiwiteit*, is die mees elegantste vorm van bewyse wat $\forall$, maar nie $\exists$ of $\Rightarrow$, betrek.

Hierdie bewyse deur transitiwiteit word met die volgende voorbeeld geïllustreer:

Voorbeeld 16

Bewys die volgende identiteit:

$$\frac{\sin x \tan x}{1 - \cos x} - 1 = \sec x$$

vir alle reële getalle x, met $x = \frac{n\pi}{2}$ en $x = 2k\pi$ uitgesluit as n en k heelgetalle is,

en n onewe is.

Bewys

$$\frac{\sin x \tan x}{1 - \cos x} - 1 = \frac{\sin x.\sin x}{\cos x(1 - \cos x)} - 1$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos x(1 - \cos x)}{\cos x(1 - \cos x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\cos x(1 - \cos x)}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\cos x(1 - \cos x)}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sec x \qquad \square$$

Hierdie bewys word op 'n gevorderde vlak in die hoërskool bestudeer. Dit is nie nodig om elke stap met redes te regverdig nie. Dit is 'n algemene benadering vir die uitskryf van meer gevorderde bewyse.

Hierdie bewys is egter deeglik beplan en is duidelik verstaanbaar. As daar nie spesifieke redes by die verskillende stappe gegee word nie, moet die skrywer van die bewys goeie oordeel aan die dag lê deur genoeg besonderhede te verskaf. Met te min stappe mag dit dalk nie moontlik wees om die bewys te volg nie. Dit is ook algemeen om by 'n stap, wat moeilik is om te volg, 'n rede te verskaf.

Aan die ander kant kan te veel stappe die bewys vervelig maak. Daar is geen algemene korrekte aanbieding van 'n bewys nie. Wat belangrik is, is dat die bewys beide aangenaam, sowel as insiggewend moet wees om te volg. Sodanige bewyse is afhanklik van die individu en verbeter met ervaring.

Tot dusver is gefokus op die wyse waarop 'n bewys uitgeskryf word. Maar dit is van geen waarde as die skrywer nie weet *hoe* om 'n bewys te ontdek nie, of *hoe* om A met *X* te verbind nie. In die volgende voorbeeld uit Laridon et al. (1986 : 261) word hierdie saak van naderby beskou.

Voorbeeld 17

Bewys dat $(\sec x - \cos x)(\operatorname{cosec} x - \sin x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sec x + \operatorname{cosec} x}$ vir alle waardes van x waarvoor die identiteit gedefinieer is.

Daar word eerstens opgemerk dat die bewering wat bewys moet word, die universele kwantor ($\forall x$) betrek, maar nie die eksistensiële kwantor ($\exists x$) of die implikasiekonnektiewe nie. Gevolglik sal gepoog word om van transitiwiteit gebruik te maak by die uitskryf van die bewys. Aangesien beide uitdrukkings redelik kompleks is, sal dit waarskynlik nie maklik wees om 'n direkte pad van links na regs te kry nie. In só 'n geval sal die beste metode wees om beide uitdrukkings te reduseer (of uit te brei) na 'n gemeenskaplike derde uitdrukking. Deur hierdie benadering te volg, word die volgende verkry:

Bewys

$$(\sec x - \cos x)(\operatorname{cosec} x - \sin x) = \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)\left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)$$

$$= \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\right)\left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

$$= \sin x \cos x$$

Verder is $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sec x + \operatorname{cosec} x} = \dfrac{\sin x + \cos x}{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}}$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x \sin x}}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{1} \times \frac{\cos x \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \cos x \sin x$$

$$= \sin x \cos x$$

Op hierdie stadium is die probleem inderdaad opgelos, maar die vraag bly steeds hoe die bewys aangebied word. Die maklikste manier sal waarskynlik wees om die gevolge te gebruik om 'n skakeling te bewerkstellig. Die volgende word dan verkry:

$$(\sec x - \cos x)(\operatorname{cosec} x - \sin x) = \sin x \cos x$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\sec x + \operatorname{cosec} x}$$

Die beste manier is egter om die twee kettings van vergelykings te kombineer tot 'n enkele ry, met ander woorde, om van transitiwiteit gebruik te maak met die uitskryf van die bewys. Die bewys lyk dan soos volg:

$$(\sec x - \cos x)(\operatorname{cosec} x - \sin x) = \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)\left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)$$

$$= \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\right)\left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

$$= \sin x \cos x$$

$$= \cos x \sin x$$

$$= \left(\frac{\sin x + \cos x}{1}\right) \times \frac{\cos x \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x \sin x}}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\sec x + \operatorname{cosec} x}$$ □

Die volgende aanbieding van die vorige bewys is foutief.

$$(\sec x - \cos x)(\operatorname{cosec} x - \sin x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sec x + \operatorname{cosec} x}$$

$$\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)\left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}}$$

$$\left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\right)\left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x \sin x}}$$

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x + \cos x}{1} \times \frac{\cos x \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$\sin x \cos x = \cos x \sin x$$

$$\sin x \cos x = \sin x \cos x$$

Hier is begin met die vergelyking wat afgelei moet word en dus effektief veronderstel dit wat bewys moet word. Daar word dan geëindig met 'n toutologie, naamlik 'n bewering dat 'n uitdrukking gelyk aan homself is. Dit is logies nie reg om 'n bewys op hierdie wyse aan te bied nie, ten spyte van die feit dat al die trigonometriese relasies korrek is. Hierdie foutiewe aanbieding word algemeen deur leerlinge gelewer.

'n Bewys deur transitiwiteit kan ook geskik wees vir 'n stelling met 'n ongelykheidsteken tussen getalle of 'n deelversamelingrelasieteken tussen twee versamelings. Die driehoeksongelykheid word in die volgende voorbeeld gebruik.

Voorbeeld 18

Veronderstel dit is bekend dat $|x + y| \leq |x| + |y|$ vir alle reële getalle x en y. Bewys dat $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ vir alle reële getalle x, y en z.

Bewys

$$\begin{aligned} |x - z| &= |x + (-y + y) - z| \\ &= |(x - y) + (y - z)| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 19

Aanvaar die stelling dat vir enige versamelings A, X en Y, as $X \subseteq Y$, dan is $A \cap X \subseteq A \cap Y$. Gebruik hierdie feit en bewys dat $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$ vir enige versamelings A, B en C.

Bewys

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Die distributiewe eienskap)

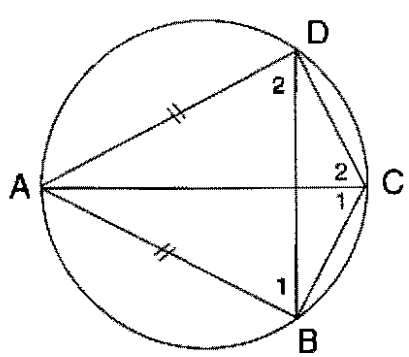
$\supseteq A \cap (B \cup C)$

Die laaste stap volg uit die gegewe stelling en die feit dat $A \subseteq A \cup C$. □

Bewysvoering deur transitiwiteit is veelal geskik vir toepassings in die Euklidiese meetkunde.

Voorbeeld 20

In die volgende figuur is AB = AD.



Figuur 6.2

Bewys vervolgens dat $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$.

Bewys: $\hat{C}_1 = \hat{D}_2$ (Omtrekshoeke onderspan deur koord AB)

$= \hat{B}_1$ (Hoeke teenoor gelyke sye)

$= \hat{C}_2$ (Omtrekshoeke onderspan deur koord AD) □

6.6.2 Teenvoorbeeld

In die bespreking wat na voorbeeld 15 gevolg het, is op 'n algemene fout gewys in 'n poging om 'n bewering oor die universele kwantor te bewys. Soos die geval met alle algemene reëls, kan die beginsel om 'n bewering met 'n deduktiewe argument te bewys, te ver gevoer word. Veronderstel daar moet byvoorbeeld bewys word dat aftrekking van reële getalle nie assosiatief is nie, met ander woorde, dat die bewering $a - (b - c) = (a - b) - c$, vir alle reële getalle a, b en c, weerlê moet word.

'n Algemene, maar logies nie korrekte argument is die volgende:

$$\begin{aligned} a - (b - c) &= (a - b) - (-c) \\ &= (a - b) + c \\ &\neq (a - b) - c \end{aligned}$$

Die negering van 'n bewering $(\forall x)\,(P(x))$ is $(\exists x)\,(\sim P(x))$. Met ander woorde, om 'n bewering met 'n universele kwantor te weerlê, moet bewys word dat die predikaat onder bespreking *onwaar is vir een of ander substitusie vir x*. Oor die algemeen word 'n spesifieke objek a uit U gekies waarvoor P(a) onwaar is. Só 'n spesifieke objek word 'n *teenvoorbeeld* vir die bewering $(\forall x)\,(P(x))$, genoem.

Dit is 'n geval waarin die bewys, of die weerlegging van 'n bewering, met 'n voorbeeld nie slegs toelaatbaar is nie, maar inderdaad die korrekte benadering is.

Om saam te vat:

Om 'n predikaat met 'n universele kwantor te weerlê, word van 'n teenvoorbeeld gebruik gemaak.

In die vorige voorbeeld kan die weerlegging van die bewering soos volg wees:

Veronderstel $a = 7$, $b = 6$ en $c = 3$

Dan is $a - (b - c) = 7 - (6 - 3)$

$= 7 - 3$

$= 4$

en $(a - b) - c = (7 - 6) - 3$

$= 1 - 3$

$= -2$

Maar $4 \neq -2$, wat bevestig dat die bewering nie waar is nie.

As die waarheid van 'n proposisie onder verdenking is, dan is een enkele teenvoorbeeld voldoende om hierdie feit te bevestig. Plumpton *et al.* (1984 : 47-48) merk die volgende op:

"... although (in general) checking of particular cases will not prove a proposition, nevertheless just one counter-example is sufficient to prove that a proposition is false. For example, the fact that the first four odd integers, namely, 1, 3, 5 and 7, are prime, does not prove that all odd numbers are prime! In fact, just one counter-example ($9 = 3 \times 3$) is sufficient to disprove this proposition."

Banks et al. (1972 : 140) onderskryf hierdie verduideliking met die volgende opmerking:

"Most of our conjectures apply to an infinite number of instances. Each instance must be true before we can say that the conjecture is true. If we can find one instance that is not true, then the conjecture cannot be true."

6.7 Gevolgtrekkings wat ∀ en ⇒, maar nie ∃ bevat.

In hierdie afdeling word bewyse van bewerings met die volgende logiese vorm as gevolgtrekking beskou:

$$(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

Sulke bewyse is algemeen. Talle definisies in wiskunde het onder andere hierdie logiese vorm. Morash (1987 : 160–161) verskaf die volgende aangepaste voorbeelde ter illustrasie.

Voorbeeld 21

'n Deelversameling C van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ word simmetries met betrekking tot die x-as genoem as en slegs as $(x, y) \in C \Rightarrow (x, -y) \in C$, vir alle reële getalle x en y.

Die logiese vorm van hierdie definisie is $(\forall x)\ (\forall y)\ (P(x, y) \Rightarrow Q(x, y))$, waar $P(x, y)$ die predikaat $(x, y) \in C$ is en $Q(x, y)$ vir $(x, -y) \in C$ voorstel.

Voorbeeld 22

'n Deelversameling I van die reële getalle $\mathbb{R}$ word 'n interval genoem as en slegs as $a \in I$, $c \in I$ en $a < b < c$, dan is $b \in I$, vir alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 23

'n Versameling A word 'n deelversameling van 'n versameling B genoem as en slegs as vir elke $x \in U$, $x \in A$ impliseer $x \in B$.

Voorbeeld 24

'n Reëelwaardige funksie $y = f(x)$ word stygend op 'n interval I genoem as en slegs as vir alle $x_1, x_2 \in I$, as $x_1 < x_2$, dan is $f(x_1) < f(x_2)$.

Vervolgens word geïllustreer hoe om stellings met gevolgtrekking van die logiese vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$, te bewys. Klem word gelê op die feit dat op die gevolgtrekking en nie die hipotese nie, gekonsentreer word.

Voorbeeld 25

Maak gebruik van die definisie in voorbeeld 22 om te bewys dat as I_1 en I_2 twee intervalle is, dan is $I_1 \cap I_2$ 'n interval.

Bewys

Fokus op die verlangde gevolgtrekking en nie op die hipotese nie. In die voorbeeld is die verlangde gevolgtrekking die bewering dat $I_1 \cap I_2$ 'n interval is. Die bewys sal streng op die definisie van "$I_1 \cap I_2$ is 'n interval" berus.

Die hipotese, dit is die veronderstelling dat I_1 en I_2 intervalle is, sal in die loop van die bewys betrek word. Die doel is om te bewys dat $I_1 \cap I_2$ 'n interval is. Uit die definisie in voorbeeld 22 moet derhalwe aangetoon word dat *as* a, b, en c reële getalle is met a, $c \in I_1 \cap I_2$ en $a < b < c$, *dan* is $b \in I_1 \cap I_2$.

Begin dus soos volg:

"Veronderstel a, b en c is reële getalle met $a < b < c$ en a en c beide elemente van $I_1 \cap I_2$." Daar moet bewys word dat $b \in I_1 \cap I_2$. Dit beteken dat aangetoon moet word dat $b \in I_1$ en $b \in I_2$.

Die redenasie is soos volg:

Omdat I_1 'n interval is en a en c beide in I_1 is, en $a < b < c$ volg dat $b \in I_1$.
Soortgelyk volg dat $b \in I_2$.
Dus is $b \in I_1 \cap I_2$, sodat $I_1 \cap I_2$ 'n interval is. □

Voorbeeld 26

Bewys dat as $m > 0$, dan is die lineêre funksie $y = f(x) = mx + c$ stygend op $\mathbb{R}$.

Bewys

Konsentreer weer op die verlangde gevolgtrekking naamlik dat f stygend op $\mathbb{R}$ is. Die hipotese $m > 0$ sal gedurende die bewys betrek word.

Om te bewys dat f stygend is, moet aangetoon word dat as x_1 en x_2 reële getalle is met $x_1 < x_2$, dan is $f(x_1) < f(x_2)$.

Begin dus soos volg:

"Veronderstel x_1 en x_2 is reële getalle met $x_1 < x_2$."
Om te bewys dat $f(x_1) < f(x_2)$, is dieselfde as om te bewys dat $m\,x_1 + c < m\,x_2 + c$.
Omdat $m > 0$ en $x_1 < x_2$, volg dat $m\,x_1 < m\,x_2$.
Gevolglik is $m\,x_1 + c < m\,x_2 + c$, sodat $f(x_1) < f(x_2)$. □

Die verduidelikende opmerkings maak die bewys lomp en omslagtig. In die praktyk sal die bewys naastenby soos volg aangebied word:

> "Veronderstel $x_1 < x_2$. Bewys nou dat $f(x_1) < f(x_2)$, dit is dat
> $m\,x_1 + c < m\,x_2 + c$.
> Omdat $x_1 < x_2$ en $m > 0$, volg dat $m\,x_1 < m\,x_2$.
> Dus is $m\,x_1 + c < m\,x_2 + c$."

6.7.1 Direkte bewyse

Alvorens nog 'n bewys beskou word, word die strategie van die bewyse van voorbeelde 25 en 26 weer eens in oënskou geneem. In beide gevalle het die verlangde gevolgtrekking die logiese vorm $(\forall x)\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$.

Die eerste stap in beide bewyse was om 'n gegewe waarde x te beskou wat *veronderstel* is om P(x) te bevredig. Hierdie x was willekeurig gekies as 'n vaste waarde waarmee daar deurgaans in die bewys gewerk is. Die doel was om aan te toon dat Q(x) geldig is, deur die gegewe hipotese te gebruik, sowel as die veronderstelling dat P(x) geldig is. 'n Bewys van 'n gevolgtrekking met die logiese vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$, aangebied deur die kies van 'n element x, is 'n voorbeeld van 'n *direkte bewys.*

Plumpton et al. (1984 : 29) beskryf 'n direkte bewys soos volg:

> "A string of implications $P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q$ are used to prove the direct theorem $P \Rightarrow Q$ ..."

Die volgende twee voorbeelde het as gevolgtrekking 'n bewering dat een versameling 'n deelversameling van 'n ander versameling is. Daar is reeds in Voorbeeld 23 gesien dat die definisie van "deelversameling" die logiese vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ het.

Voorbeeld 27

Bewys dat as A, X en Y enige versamelings is met $X \subseteq Y$, dan is $A \cap X \subseteq A \cap Y$.

Bewys

Veronderstel $x \in A \cap X$.
Daar moet aangetoon word dat $x \in A \cap Y$.
$x \in A \cap X \Rightarrow x \in A$ en $x \in X$.
Maar uit die hipotese is $X \subseteq Y$.
Dus $x \in X \Rightarrow x \in Y$.
Nou is $x \in A$ en $x \in Y$.
Gevolglik is $x \in A \cap Y$. □

Die volgende voorbeeld uit die versamelingsteorie is meer gekompliseerd.

Voorbeeld 28

Bewys dat as A, B en C versamelings is met $A \times B \subseteq A \times C$ en $A \neq \emptyset$, dan is $B \subseteq C$.

Bewys

Konsentreer weer eens op die verlangde gevolgtrekking. Veronderstel $x \in B$. Daar moet nou aangetoon word dat $x \in C$. Uit die hipotese is $A \neq \emptyset$. Die versameling A bevat dus minstens een element, sê a. As $a \in A$ en $x \in B$, dan is $(a, x) \in A \times B$. Omdat $A \times B \subseteq A \times C$, uit die hipotese, volg dit dat $(a, x) \in A \times C$. Gevolglik is $x \in C$, soos verlang is. □

Die volgende probleem wat in die seniorsertifikaat-eksamen van die voormalige Transvaalse Onderwysdepartement aangebied is, is 'n goeie voorbeeld van 'n direkte bewysvoering.

Voorbeeld 29

Los op vir x as $\dfrac{2x + 1}{x + 2} < 1$

Oplossing

$$\frac{2x + 1}{x + 2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 1}{x + 2} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 1 - x - 2}{x + 2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x - 1}{x + 2} < 0$$

$$\Rightarrow -2 < x < 1$$

Bewyse word in die praktyk op 'n kompakte en elegante wyse aangebied. Hierdie bewyse daarenteen bevat in die meeste gevalle baie verduidelikings om slaggate uit te wys.

6.7.2 Weerlegging van gevolgtrekkings van die vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$

Veronderstel 'n bewering met logiese vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ moet weerlê word. Uit afdeling 6.6.2 sal die verwagting wees om so 'n bewering aan die hand van 'n teenvoorbeeld te doen.

Daar moet egter omsigtig met die logika gewerk word. Daar moet presies vasgestel word wat 'n teenvoorbeeld behels. Die negering van $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ is die logiese vorm $(\exists x)\ (\sim (P(x) \Rightarrow Q(x))$. Uit afdeling 4.10 (17) volg ook dat $\sim (p \Rightarrow q)$ logies ekwivalent is aan $p \wedge \sim q$.
Dus is $\sim ((\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ logies ekwivalent aan $(\exists x)\ (P(x) \wedge \sim Q(x))$.

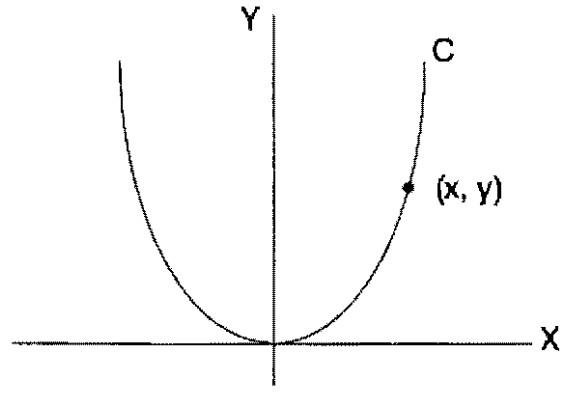
Om dus 'n bewering van die vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ te weerlê, moet aangetoon word dat daar 'n waarde van x bestaan só dat P(x) waar en Q(x) onwaar is. In die meeste elementêre gevalle word dit gedoen deur spesifiek só 'n x te vind. Hierdie beginsel word aan die hand van die volgende voorbeeld geïllustreer:

Voorbeeld 30

Bewys dat die versameling $C = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ simmetries met betrekking tot die y-as is, maar nie met betrekking tot die x-as nie.

Bewys

Merk eerstens op dat die geordende paar (x, y) 'n punt op die kromme C is as en slegs as $y = x^2$. Die grafiek van C is eenvoudig die parabool van die kwadratiese funksie $y = f(x) = x^2$, soos geïllustreer in die figuur.



Figuur 6.3

Uit die skets lyk dit asof die bewering waar kan wees, maar dit moet formeel bewys word. Om aan te toon dat C simmetries met betrekking tot die y-as is, word soos volg te werk gegaan.

Veronderstel (x, y) is enige element van C. Daar moet aangetoon word dat (-x, y) $\in$ C. Uit die definisie van C sal (-x, y) $\in$ C as en slegs as $y = (-x)^2$. Omdat (x, y) $\in$ C, volg dit dat $y = x^2$. Omdat $x^2 = (-x)^2$, volg dit dat $y = (-x)^2$, soos verlang is. Dus is C simmetries met betrekking tot die y–as.

Om aan te toon dat C nie simmetries met betrekking tot die x-as is nie, word opgemerk dat (2, 4) $\in$ C, omdat $4 = 2^2$, maar (2, -4) $\notin$ C, omdat $-4 \neq 2^2$. Dit is 'n spesifieke teenvoorbeeld vir die bewering $(\forall x)\ (\forall y)\ [(x, y) \in C \Rightarrow (x, -y) \in C]$. Dit voltooi die bewys. □

6.7.3 Bewyse van die bewerings $(\forall x)\ (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$

Die verwantskap tussen bewerings van die vorm $(\forall x)\ (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$ en $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ is dieselfde as die verwantskap tussen A = B en A $\subseteq$ B onderskeidelik, waar A en B versamelings is.

A = B as en slegs as A $\subseteq$ B en B $\subseteq$ A. Om dus A = B te bewys, behels twee bewyse, een in elke rigting.

Die logiese basis vir hierdie benadering tot versamelings, sowel as die benadering vir meer algemene gevalle, is

$$(\forall x)\ (P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\ [(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow P(x))]$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)\ (Q(x) \Rightarrow P(x))$$

Die eerste ekwivalensie volg uit die toutologie $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ (afdeling 4.10 (18)) terwyl die tweede volg uit die ekwivalensie

$$(\forall x)\ [P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x)\ (P(x)) \wedge (\forall x)\ (Q(x)).$$

'n Bewys van ekwivalensie mag dus deur twee bewyse van implikasie aangebied word, een in elke rigting. (Kyk ook afdeling 5.57)

Voorbeeld 31

Stel f is 'n reëelwaardige funksie met definisiegebied $\mathbb{R}$. Bewys dat f 'n ewe funksie is, dit wil sê, $f(-x)=f(x)$ vir alle $x \in \mathbb{R}$, as en slegs as die versameling van punte in die xy-vlak $C = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ simmetries met betrekking tot die y-as is.

Bewys

Daar moet in twee rigtings geredeneer word. Sulke bewyse word gewoonlik in die volgende formaat aangebied:

$\Rightarrow$ (Dit beteken, bewys dat as f ewe is, dan is C simmetries met betrekking tot die y-as.) Veronderstel f is ewe, en $(x, y) \in C$.

Dan is $y = f(x) = f(-x)$.

$\Leftarrow$ Omgekeerd, veronderstel dat C simmetries met betrekking tot die y-as is. Om te bewys dat f ewe is, stel $x \in \mathbb{R}$. Uit die definisie van C, is die punt $(x, f(x)) \in C$. Dus is $(-x,f(x)) \in C$. Dus volg uit die definisie van C dat $(-x,f(-x)) \in C$.

Omdat C die grafiek van 'n funksie is, volg dit dat $f(x) = f(-x)$. □

Soms is 'n resultaat so triviaal dat nagelaat word om op te merk dat die betrokke definisies verskillend is en dat daar inderdaad iets is om te bewys. 'n Formele bewys in so 'n geval is slegs 'n strenge verduideliking hoekom die resultaat voor-die-hand-liggend is.

Omdat intuïsie misleidend kan wees, is dit belangrik om op alle vlakke van wiskunde 'n formele bewys te kan aanbied, al gebeur dit dikwels in die praktyk dat die bewyse nie so streng uitgeskryf word nie.

Vir die meeste bewyse is die opstel van die argument die grootste stryd. Daar is talle gekompliseerde bewyse wat meer vereis as net 'n tegniese benadering.

In voorbeeld 31 word staat gemaak op die kennis van 'n funksie. Daar is ook opgemerk dat die geordende paar $(-x, f(-x)) \in C$, en is implisiet gebruik gemaak van 'n bewystegniek wat bekend staan as *verbesondering*. Hierdie tegniek word vervolgens in die volgende afdeling bespreek.

6.8 Bewys met verbesondering en verdeling in gevalle

Bewyse van stellings waarvan die gevolgtrekking die vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ het, varieer en is afhanklik van die aanpassing dat die veronderstelling $P(x)$ geldig is, tesame met een of ander gegewe hipotese, met betrekking tot die gevolgtrekking. Volgens Solow (1981 : 59) kom in hierdie geval 'n metode van bewysvoering, genoem *verbesondering* op 'n natuurlike wyse na vore. Die volgende twee voorbeelde illustreer hierdie geval.

Voorbeeld 32

Bewys dat as 'n deelversameling C van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ simmetries met betrekking tot beide die x-as en die oorsprong is, dan is C simmetries met betrekking tot die y-as.

Voorbeeld 33

Bewys dat as $A \cap X \subseteq B \cap X$ en $A \cap X' \subseteq B \cap X'$, dan is $A \subseteq B$, vir enige gegewe versamelings A, B en X.

Beide hierdie bewerings het as gevolgtrekking, dit is, "C is simmetries met betrekking tot die y-as" en "A is 'n deelversameling van B", 'n logiese vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$. Daar moet dus in beide gevalle op die gevolgtrekking gefokus en die bewys in terme van die logiese vorm uiteengesit word. Alhoewel daar alternatiewe bewysmetodes bestaan, word spesiale bewystegnieke aan die hand van hierdie twee bewyse geïllustreer. Hierdie twee metodes sal in hierdie afdeling deurgaans na vore kom.

Ongeag die logiese vorm van die verlangde gevolgtrekking van 'n stelling, is hierdie twee metodes die basiese gereedskap van die wiskundige om gegewe hipoteses aan te pas in ooreenstemming met die gevolgtrekking.

6.8.1 Verbesondering

Daar is reeds beklemtoon dat die algemene bewering $(\forall x)\ (P(x))$ nie bewys kan word deur 'n besondere instansie P(a) te verifieer nie, waar a 'n element van die gebied is.

Maar in die proses om 'n gevolgtrekking af te lei uit 'n veronderstelling óf hipotese $(\forall x)\ (P(x))$, kan volgens Solow (1981 : 59) in 'n besondere geval presies dit wees wat verlang word. In sulke gevalle kan die spesiale geval 'n substitusie van 'n spesifieke konstante a vir x wees, soos in voorbeeld 34, of die vervanging van x met 'n uitdrukking wat 'n willekeurige hoeveelheid y met 'n vaste waarde is, soos in voorbeeld 35.

Die eerste blootstelling vir die meeste studente aan bewyse met die metode van verbesondering, is in bewyse van sekere stellings in trigonometrie. Die volgende aangepaste probleem uit Laridon et al. (1986 : 280) illustreer hierdie metode:

Voorbeeld 34

Veronderstel dit is reeds bekend as aksioma of 'n stelling dat
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, vir alle reële getalle x en y. Bewys dat
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, vir alle reële getalle x.

Bewys

Beskou die spesiale geval $y = \frac{\pi}{2}$ van die gegewe identiteit.

Dan is

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2}$$
$$= (\sin x)(0) + (\cos x)(1)$$
$$= \cos x$$

□

Voorbeeld 35

Veronderstel dit is bekend dat $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ vir alle reële getalle x. Gebruik

hierdie resultaat en bewys dat $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ vir alle reële getalle x.

Bewys

Vervanging van x met $(\frac{\pi}{2} - x)$ in die gegewe identiteit, lewer die volgende resultaat:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)\right)$$

$$= \cos x, \text{ wat presies dit is wat bewys moes word.} \quad \square$$

In voorbeeld 34 was die vervanging direk, terwyl die vervanging in voorbeeld 35 'n redelik vindingryke vervanging was. Van die mees vernuftigste bewyse in wiskunde behels verbesondering, in besonder die tipes soos in voorbeeld 35.

Beskou vervolgens die bewys van voorbeeld 32.

Bewys

Daar moet bewys word dat C simmetries met betrekking tot die y-as is, gegee dat dit simmetries met betrekking tot die x-as en die oorsprong is. Om dit te doen, word begin deur te veronderstel dat (x, y) 'n willekeurige element van C is. Daar moet bewys word dat $(-x,y) \in C$. Die vraag is hoe om voordeel te trek uit die twee hipoteses.

Omdat C volgens hipotese, simmetries met betrekking tot die x-as is, en $(x, y) \in C$ volgens die veronderstelling, volg dit dat $(x, -y) \in C$. Nou kom die vernuftige deel. Daar is aangetoon dat $(x, -y) \in C$, terwyl die hipotese dat C simmetries met betrekking tot die oorsprong is, nog nie gebruik is nie. Hierdie hipotese sê dat $(-x,-y) \in C$ as $(x, y) \in C$. In besonder, omdat $(x, -y) \in C$, volg dan dat $(-x,-(-y)) \in C$. Dus $(-x,y) \in C$, soos verlang is. $\square$

Hierdie bewys illustreer die krag van die universele kwantor. As 'n bewering van die vorm, sê, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ waar is vir alle x, dan is $P(a) \Rightarrow Q(a)$ waar vir 'n spesifieke waarde van a. As P(a) dan bewys kan word, dan kan die gevolgtrekking Q(a) afgelei word deur *modus ponens*. Hierdie beskrywing is van toepassing in die vorige bewys deur P(x, y) as "$(-x, -y) \in C$" te beskou, terwyl a as die geordende paar (x, −y) beskou kan word.

6.8.2 Verdeling in gevalle

Dit gebeur dikwels in die opstel van 'n bewys, dat 'n punt bereik word waar daar 'n natuurlike verdeling van die argument in 'n eindige aantal gevalle is. Hierdie gevalle moet altyd *uitputtend* wees en is dikwels *onderling uitsluitend*.

Veronderstel byvoorbeeld iets oor 'n heelgetal m moet bewys word. In so 'n geval is daar die voordeel om m as 'n ewe of as 'n onewe getal te beskou. Dit staan bekend as *digotomie* en verskaf twee gevalle om te ondersoek. 'n Ander voorbeeld is die geval waar x 'n reële getal is. In hierdie geval kan drie gevalle ondersoek word naamlik $x < 0$, $x = 0$ en $x > 0$. Hierdie moontlikheid staan bekend as *trigotomie*. As dit bekend is dat 'n objek x in die vereniging van twee versamelings A en B is, en daar word gepoog om 'n gevolgtrekking in so 'n geval af te lei, kan die twee gevalle $x \in A$ en $x \in B$ dalk werk. Hierdie geval mag dalk faal om onderling uitsluitend te wees.

Twee belangrike punte moet in gedagte gehou word by die verdeling in gevalle. Die eerste punt behels die begrippe "onderling uitsluitend" en "uitputtend". Onderling uitsluitend beteken dat kategorieë nie oorvleuel nie, met ander woorde, geen spesifieke voorbeeld kom in meer as een kategorie voor nie. Uitputtend beteken dat kategorieë alle moontlikhede insluit. Elke spesifieke voorbeeld val in ten minste een kategorie. Die gevalle in 'n argument waar die tegniek onder bespreking van toepassing is, *moet uitputtend wees*. Dikwels is die gevalle ook onderling uitsluitend. Dus, in die geval van die reële getalle, is die verdeling in rasionale en irrasionale getalle 'n geldige benadering, maar verdeling in positiewe en negatiewe getalle is onvoldoende aangesien die geval nie uitputtend is nie. Die rede is dat 0 uitgesluit is. 'n Verdeling in nie-positiewe en nie-negatiewe getalle, wat oorvleuel en nie onderling uitsluitend is nie aangesien 0 twee keer voorkom, mag tot probleme lei.

Die tweede belangrike punt is dat as 'n argument in verskillende gevalle opgedeel word, iets in die bewys na so 'n verdeling bereik moet word. In besonder moet die argument in elke geval na verdeling bewerings bevat wat geldig is vir daardie geval alleen. Enige twee gevalle waarvoor die argumente identies is, moet na 'n enkele geval gekombineer word.

Sommige van hierdie begrippe word met die bewys van voorbeeld 33 geïllustreer.

Bewys

Die kruks van die probleem is die feit dat $X \cup X' = U$ en $X \cap X' = \emptyset$.
Daar moet bewys word dat $A \subseteq B$.
Veronderstel $x \in A$. Dan is $x \in X$ óf $x \in X'$, maar nie in beide die versamelings X en X′ nie. Beskou dus die gevalle $x \in X$ en $x \in X'$, en hoop dat die verlangde gevolgtrekking in elke geval verkry sal word.

Geval 1

As $x \in X$, en $x \in A$, dan is $x \in A \cap X$.
Maar $A \cap X \subseteq B \cap X$.
Dus is $x \in B \cap X$.
Maar $B \cap X \subseteq B$, en dus volg dat $x \in B$.

Geval 2

As $x \in X'$, en $x \in A$, dan is $x \in A \cap X'$.
Maar $A \cap X' \subseteq B \cap X'$.
Dus is $x \in B \cap X'$.
Ook is $B \cap X' \subseteq B$, en dus volg weer eens dat $x \in B$. □

In beide gevalle is die verlangde gevolgtrekking bereik. Die argumente in die twee gevalle verskil wesenlik. In geval 1 is een hipotese uitsluitend gebruik terwyl in geval twee die ander hipotese uitsluitend gebruik is.

Talle definisies in die wiskunde is so gestruktureerd dat hulle hulself daartoe leen om bewyse wat in gevalle verdeel, uit te voer.

Voorbeeld 36

Die absolute waarde |x| van 'n reële getal x word gedefinieer deur

$$|x| = \begin{cases} x \text{ as } x \geq 0 \\ -x \text{ as } x < 0. \end{cases}$$

Bewys dat $|xy| = |x||y|$ waar x en y reële getalle is.

Bewys

Geval 1

As $x \geq 0$ en $y \geq 0$ dan is $xy \geq 0$ en $|xy| = xy = |x||y|$

Geval 2

As $x \geq 0$ en $y < 0$, dan is $xy \leq 0$ en $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x||y|$

Geval 3

As $x < 0$ en $y \geq 0$ dan is $xy \leq 0$ en $|xy| = -(xy) = (-x)y = |x||y|$

Geval 4

As $x < 0$ en $y < 0$, dan is $xy > 0$ en $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$ □

In al vier die gevalle was dit moontlik om 'n bewys deur transitiwiteit te lewer. Soms lei die argument uit die hipotese na die volgende bewering:

"P_1 of P_2 of ⋯ of P_n", waar die P_i's uitputtend is, maar nie onderling uitsluitend nie. In so 'n geval mag dit dalk werk indien die argument op daardie stadium in n gevalle verdeel word en daarna probeer word om die verlangde gevolgtrekking in elke geval te bereik.

6.9 Bewyse deur wiskundige induksie

Plumpton et al. (1984: 40) maak die volgende opmerking oor induksie:

> "Almost all scientific advances are based on *induction*, which the dictionary defines as 'the inference of a general law from knowledge of particular instances'. The inference is frequently based on intuitive inspiration or guessing. But this must not be confused with *mathematical induction* which is a property of Z^+."

Bewys deur wiskundige induksie is 'n spesiale metode van bewys in toepaslike gevalle. In hierdie afdeling word die belangrikheid van hierdie beginsel in die bewyse van stellings bespreek.

Stellings waar die kwantor $(\forall b \in \mathbb{N})$, waar $\mathbb{N}$ die versameling natuurlike getalle is, in daardie stellings voorkom, óf die frase "vir alle positiewe heelgetalle n", is stellings wat geskik is om deur induksie bewys te word.

Voorbeelde van sodanige stellings of bewerings is die volgende:

(i) $(5^n - 1)$ is deelbaar deur 4 vir alle positiewe heelgetalle n.

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ vir alle heelgetalle $n \geq 1$.

(iii) $1(1!) + 2(2!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$ vir alle heelgetalle $n \geq 1$.

Die volgende bewering verskil effens van bogenoemde drie bewerings in dié sin dat die bewering nie vir alle positiewe heelgetalle gemaak word nie:

(iv) $4^n \geq n^4$ vir alle $n \in \mathbb{N}$ en $n \geq 4$.

As 'n bewering $(\forall n)$ (P(n)) bewys moet word, waar $\mathbb{N}$ die gebied vir die predikaat P(n) is, is die volgende agtergrond nodig. Laat S die deelversameling van $\mathbb{N}$ wees wat al die positiewe heelgetalle bevat waarvoor P(n) waar is. S word die oplossingsversameling van P(n) genoem. Per definisie is S 'n deelversameling van $\mathbb{N}$. Om 'n stelling te bewys, moet bewys word dat $S = \mathbb{N}$. Vervolgens word die beginsel van wiskundige induksie gegee.

6.9.1 Stelling (Die beginsel van wiskundige induksie)

Laat S 'n deelversameling van die versameling $\mathbb{N}$ van alle positiewe heelgetalle wees wat die volgende eienskappe bevredig:

(i) $1 \in S$.

(ii) As $n \in S$, dan is $(n+1) \in S$ vir alle $n \in \mathbb{N}$.

Dan is $S = \mathbb{N}$.

Dit is intuïtief duidelik dat $\mathbb{N}$ voorwaardes (i) en (ii) bevredig.

Hierdie stelling kan volgens Eves (1965 : 216) bewys word met behulp van aksiomas wat gebaseer is op vyf postulate van Guiseppe Peano. Die bewys sal egter nie hier gegee word nie. Vervolgens word 'n paar toepassings van stelling 6.9.1 beskou. Die volgende aangepaste voorbeeld word deur Soifer (1987 : 16) aangebied:

Voorbeeld 37

Bewys dat $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ vir alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewys

Stel S is die deelversameling van $\mathbb{N}$ wat uit al daardie positiewe heelgetalle m bestaan waarvoor die bewering waar is. Daar moet bewys word dat $S = \mathbb{N}$. Volgens stelling 6.9.1 is dit voldoende om te bewys dat

(i) $1 \in S$ en

(ii) vir elke $m \in \mathbb{N}$, as $m \in S$, dan is $(m + 1) \in S$.

(i) $1 \in S$ omdat $1 = 1^2$

(ii) Veronderstel $m \in S$

Dan is $1 + 3 + \cdots + (2m-1) = m^2$.

(Hierdie veronderstelling word dikwels die induksiehipotese genoem).

Vervolgens word bewys dat $(m+1) \in S$, met ander woorde, dat

$$1 + 3 + \cdots + (2m-1) + [2(m+1)-1] = (m+1)^2.$$

$$\begin{aligned}[1 + 3 + \cdots + (2m-1)] + [2(m+1)-1] &= m^2 + (2m+1) \\ &= m^2 + 2m + 1 \\ &= (m+1)^2\end{aligned}$$

Dit volg dus dat $(m+1) \in S$, sodat voorwaarde (ii) ook geverifieer is. □

'n Bewys deur induksie bestaan uit twee stappe.

In die eerste stap word elke n eenvoudig met 1 vervang. Dit behels gewoonlik min uitskryfwerk.

Die tweede stap is baie meer uitdagend. Daar word begin deur die bewering P(n+1) uit te skryf. Aangesien dit toelaatbaar is om te veronderstel dat P(n) waar is, en daar aangetoon moet word dat P(n+1) waar is, moet gepoog word om P(n+1) in terme van P(n) uit te druk. Deur P(n+1) dan as waar te bevestig, is die bewys voltooi.

6.9.2 Motivering vir die noodsaaklikheid van induksiestappe

Morash (1987 : 181) beklemtoon die noodsaaklikheid van induksiestappe.

(i) Die eerste deel van die induksiestappe is in die meeste gevalle so triviaal dat die versoeking soms groot is om dit uit te laat. Die gevaar vir hierdie praktyk kan gesien word in die volgende geval waar die voorwaarde $(\forall n)\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))$ waar is, terwyl die predikaat P(n) oor $\mathbb{N}$ onwaar is vir alle $n \in \mathbb{N}$. P(n): $n = n + 1$.

(ii) Dit mag voorkom of die veronderstelling presies dit is wat veronderstel is om bewys te word, byvoorbeeld, daar word in voorbeeld 37

P(n): $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ bewys.

Die vraag is of nie presies juis daardie vergelyking as waar veronderstel is nie? Die antwoord lê daarin dat van kwantore gebruik gemaak word. Die verlangde resultaat is $(\forall n)$ (P(n)). Die veronderstelling is eenvoudig P(m), waar m 'n vaste positiewe heelgetal is, en die verlangde doel is om P(m+1) vir *daardie spesifieke m* af te lei.

6.9.3 Kategorieë van induksiebewyse

Solow (1981 : 50−56) onderskei drie kategorieë van induksiebewyse. Hierdie drie gevalle is geensins uitputtend nie.

6.9.3.1 Sommasieformules

Voorbeeld 37 is 'n eenvoudige geval van 'n groot klas van stellings wat met behulp van die induksietegniek bewys word. So 'n stelling staan bekend as 'n *sommasieformule*. Sommasieformules word gewoonlik uitgedruk met behulp van die "Σ-notasie". Deur hierdie notasie te gebruik, kan voorbeeld 37 in die volgende vorm geskryf word:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Die veranderlike k word in hierdie geval 'n skynveranderlike ("dummy variable") genoem.

Die volgende voorbeeld van 'n induksiebewys verifieer 'n basiese eienskap van sommasienotasies.

Voorbeeld 38

Veronderstel n is 'n positiewe heelgetal en $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ is (2n) reële getalle.

Bewys dat $\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$

Bewys

Stel S is die oplossingsversameling van

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Daar moet bewys word dat $S = \mathbb{N}$.

(i) $1 \in S$ omdat

$$\sum_{k=1}^{1} (x_k + y_k) = x_1 + y_1 = \sum_{k=1}^{1} x_k + \sum_{k=1}^{1} y_k$$

(ii) Veronderstel $m \in S$. Om te bewys dat $(m+1) \in S$, moet aangetoon word dat

$$\sum_{k=1}^{m+1} (x_y + y_k) = \sum_{k=1}^{m+1} x_k + \sum_{k=1}^{m+1} y_k$$

Dit volg uit 'n ry van gelykhede:

$$\sum_{k=1}^{m+1} (x_y + y_k) = \left[\sum_{k=1}^{m} (x_k + y_k)\right] + (x_{m+1} + y_{m+1})$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m} x_k + \sum_{k=1}^{m} y_k\right] + (x_{m+1} + y_{m+1}) \quad \text{(Uit die induksiehipotese)}$$

$$= \left[(\sum_{k=1}^{m} x_k) + x_{m+1}\right] + \left[(\sum_{k=1}^{m} x_k) + y_{m+1}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} x_k + \sum_{k=1}^{m+1} y_k \qquad \square$$

6.9.3.2 Veralgemening

Volgens Mason (1988 : 9–19) is veralgemening nou verwant aan verbesondering. Veralgemening behels koppelings, waarna 'n beknopte weergawe van 'n bewering dit moontlik maak om besondere instansies deur verbesondering af te lei. Mason (1988 : 19) maak die volgende opmerking oor veralgemening:

> "Strictly speaking, a generalization of some examples is a statement that can be specialized to yield the examples again, but it is useful to carry with generalization the feeling of a 'theme with variations'. The technique of stressing-in-order-to-question is particularly useful. By changing conditions, both explicit ones and implicit ones, and by permitting constants to vary, a statement or question can be placed in a more general context, and interesting questions are likely to emerge. The person who has done the generalizing is the one who will most enjoy pursuing them!"

'n Voorbeeld van veralgemening wat spesifieke instansies verteenwoordig is die kwadratiese formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Hierdie formule verskaf die wortels van die kwadratiese vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$.

Die formule is 'n algemene bewering wat verkry kan word deur die proses van vierkantsvoltooiing te veralgemeen.

Talle stellings of aksiomas waarvan die algemene bewering iets sê oor twee objekte word veralgemeen na "enige eindige aantal" deur 'n induksiebewys.

Voorbeeld 39

Gebruik induksie en die distributiewe aksioma om die wet van veralgemeende distributiwiteit van vermenigvuldiging oor optelling te bewys, dit is, $a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n$ vir enige positiewe heelgetal n, en a, b_1, b_2, $\cdots$, b_n reële getalle.

Bewys

Die bekende distributiewe wet is eenvoudig die geval waar n = 2. Laat S die versameling van daardie positiewe heelgetalle m wees só dat "distributiwiteit oor m reële getalle" geldig is.

Voorwaarde (i) van die induksiebeginsel sê dat $ab_1 = ab_1$, wat waar is. Vir voorwaarde (ii), veronderstel $m \in S$. Dit beteken dat $a(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_m$ vir enige reële getal a en vir enige m reële getalle $b_1, b_2, \cdots, b_m$. Om aan te toon dat $(m+1) \in S$, laat $a \in \mathbb{R}$ en laat $c_1, c_2, \cdots, c_m, c_{m+1}$ enige $(m+1)$ reële getalle wees. Dan is

$$
\begin{aligned}
& a\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_m + c_{m+1}) \\
=& a\,[(c_1 + c_2 + \cdots + c_m) + c_{m+1}] \\
=& a\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_m) + ac_{m+1} \\
=& (ac_1 + ac_2 + \cdots + ac_m) + ac_{m+1} \\
=& ac_1 + ac_2 + \cdots + ac_m + ac_{m+1}, \text{soos verlang is.}
\end{aligned}
$$

□

Veralgemeende distributiwiteit kan met Σ-notasie soos volg geskryf word:

$$\sum_{k=1}^{n} (ab_k) = a \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Stap 2 na stap 3, met verwysing na die gelykhede teen die einde van die bewys, was gebaseer op die gewone distributiewe wet (dit is, die geval n =2), terwyl stap 3 na stap 4 deur die induksiehipotese gemotiveer word. Hierdie patroon is wesenlik en word algemeen gebruik wanneer induksie gebruik word om bewerings te veralgemeen soos in hierdie geval.

6.9.3.3 Deelbaarheid

Daar is talle eienskappe oor deelbaarheid wat geldig is "vir alle positiewe heelgetalle n", en leen hulle daartoe om deur induksie bewys te word.

Die volgende voorbeeld uit Engelbrecht et al. (1979 : 13) illustreer hierdie geval.

Voorbeeld 40

Bewys dat $2^{3n} - 1$ deelbaar deur 7 is vir alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewys

Stel S is die oplossingsversameling van P(n): $2^{3n} - 1$ is deelbaar deur 7.
Daar moet bewys word dat $S = \mathbb{N}$.

(i) $1 \in S$ omdat
$2^{3(1)} - 1 = 2^3 - 1 = 7$, wat deelbaar deur 7 is.

(ii) Veronderstel $m \in S$. Om te bewys dat $(m+1) \in S$, moet daar aangetoon word dat $2^{3(m+1)} - 1$ deelbaar deur 7 is.
Maar $2^{3(m+1)} - 1 = 2^{3m+3} - 1$
$= 2^{3m}.8 - 1$
$= 8(2^{3m} - 1) + 7$, wat
deelbaar deur 7 is, aangesien die faktor $(2^{3m} - 1)$ volgens die induksiehipotese deelbaar deur 7 is. □

6.9.4 Induktiewe versamelings

Beskou die volgende stelling uit Engelbrecht et al. (1979 : 14):

$$2n + 1 < 2^n \text{ vir alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Hierdie stelling is nie vir alle positiewe heelgetalle waar nie, maar wel vir alle heelgetalle groter of gelyk aan 'n sekere positiewe heelgetal n_0, in hierdie geval $n_0 = 3$. 'n Klein verandering in die induksiebeginsel kan gebruik word om hierdie tipe stellings te bewys.

6.9.4.1 Definisie

'n Deelversameling S van die versameling $\mathbb{N}$ van alle positiewe heelgetalle word induktief genoem as en slegs as $m \in S$ impliseer $(m+1) \in S$ vir alle positiewe heelgetalle m.

Dit is duidelik dat $\mathbb{N}$ self induktief is aangesien die voorwaarde van hierdie definisie eenvoudig voorwaarde (ii) van stelling 6.9.1 is.

Die volgende is 'n stelling oor induktiewe deelversamelings.

6.9.4.2 Stelling

Veronderstel S is 'n induktiewe deelversameling van $\mathbb{N}$ en $m_0 \in S$. Dan bevat S vir m waar m enige positiewe heelgetal groter as m_0 is, dit wil sê, $\{m_0, m_0 + 1, m_0 + 2, \cdots\} \subseteq S$.

Bewys

Beskou die versameling $T = S \cup \{1, 2, \cdots, m_0 - 1\}$. Dan is $1 \in T$ en T is induktief. Dus volg uit stelling 6.9.1 dat $T = \mathbb{N}$. Kies $m \in \mathbb{N}$ só dat $m > m_0$. Omdat $T = \mathbb{N}$, volg dat $m \in \mathbb{N} = T = S \cup \{1, 2, \cdots, m_0 - 1\}$. Daar moet nou aangetoon word dat $m \in S$. Omdat $m > m_0$, is $m \notin \{1, 2, \cdots, m_0 - 1\}$. Dus is $m \in S$. □

Die bykomende voordeel van hierdie stelling is dat bewerings van die vorm $(\forall n \geq n_0)(P(n))$ bewys kan word deur aan te toon dat die oplossingsversameling S van P(n) vir

(i) $n_0 \in S$ en
(ii) S is induktief

bevredig.

Deel (ii) kan inderdaad met die ietwat swakker voorwaarde, naamlik
"Vir alle $m \in \mathbb{N}$, $m \in S$ en $m \geq n_0$ impliseer $(m+1) \in S$", vervang word.

Voorbeeld 41

Bewys dat $2n + 1 < 2^n$ vir alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Bewys

Veronderstel S is die oplossingsversameling van $P(n) : 2n + 1 < 2^n$.
Dan is $\{3, 4, 5, \cdots\} \subseteq S$, aangesien

(i) $3 \in S$ omdat
$2(3) + 1 = 7 < 2^3 = 8$

(ii) Veronderstel $m \geq 3$ en $m \in S$, sodat $2m + 1 < 2^m$

Bewys vervolgens dat
$2(m+1) + 1 < 2^{m+1}$
Maar $2(m+1) + 1 = (2m+1) + 2$
$< 2^m + 2$
$< 2^m + 2^m$
$= 2.2^m$
$= 2^{m+1}$ □

Die induksiehipotese is in die stap $(2m+1) + 2 < 2^m + 2$ gebruik. Die vermoede mag bestaan dat elke induktiewe deelversameling van $\mathbb{N}$ die vorm $\{m, m+1, m+2, \cdots\}$ vir 'n positiewe heelgetal m besit. Die vermoede is byna waar. Om dit waar te maak, moet slegs die woord "nie-leë" voor "induktiewe" bygevoeg word. Die rede daarvoor is dat die leë versameling induktief is.

6.10 Gevolgtrekkings wat ∀, gevolg deur ∃, bevat

Talle definisies in wiskunde bevat die eksistensiële kwantor ∃. Sulke definisies kom selde in die calculus voor. Tog wemel sulke definisies in die voorgraadse vlak, met die gevolg dat die voorgraadse student met talle bewyse kennis maak waarvan die gevolgtrekkings die universele kwantor ∀, gevolg deur die eksistensiële kwantor ∃ bevat. Hierdie tipe bewyse sal in hierdie afdeling bestudeer word. Solow (1981 : 24) gee 'n paar belangrike definisies wat die kwantor ∃ bevat.

Voorbeeld 42 (Elementêre algebra)

'n Reële getal r word rasionaal genoem as en slegs as daar heelgetalle p en q($q \neq 0$) bestaan só dat $r = \frac{p}{q}$.

Voorbeeld 43 (Elementêre algebra)

'n Heelgetal n word ewe genoem as en slegs as daar 'n heelgetal k bestaan só dat $n = 2k$.

Voorbeeld 44 (Elementêre topologie)

Laat S 'n deelversameling van die reële getalle $\mathbb{R}$ wees. 'n Element $x \in S$ word 'n binnepunt van S genoem as en slegs as daar 'n reële getal $\delta > 0$ bestaan só dat $N(x, \delta) \subseteq S$, waar $N(x, \delta)$ die oop interval $(x - \delta, x + \delta)$ is, dit wil sê, $N(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \delta\}$. S word 'n oop deelversameling van $\mathbb{R}$ genoem as en slegs as elkeen van sy punte binnepunte is.

Voorbeeld 45 (Gevorderde calculus)

'n Oneindige ry $\{x_n\}$ van reële getalle konvergeer na 'n reële getal x, aangedui met $x_n \rightarrow x$ of $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, as en slegs as vir elke positiewe reële getal ϵ, daar 'n ooreenstemmende positiewe heelgetal N bestaan só dat $|x_n - x| < \epsilon$ as $n \geq N$. In simbole lyk dit soos volg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ [(n \geq N) \Rightarrow (|x_n - x| < \epsilon)]$$

Voorbeeld 46

Bewys dat as m, n en p heelgetalle is só dat $m|n$ en $m|p$, dan $m|(n + p)$.

Bewys

Veronderstel m, n en p is heelgetalle wat die hipotese bevredig. Per definisie van "deling" moet 'n heelgetal q gevind word só dat $(n + p) = mq$. Die keuse van q lê in die hipotese. Omdat $m|n$, bestaan daar 'n heelgetal q_1 só dat $n = mq_1$. Omdat $m|p$, bestaan daar 'n heelgetal q_2 só dat $p = mq_2$. Die vraag is nou hoe sal die verlangde q verkry word só dat $(n + p)$ en q in relasie tot mekaar staan?

Omdat $n + p = mq_1 + mq_2 = m(q_1 + q_2)$, is die keuse duidelik. Stel $q = q_1 + q_2$. Omdat q_1 en q_2 heelgetalle is, is $q_1 + q_2$ 'n heelgetal.
Verder is $mq = m(q_1 + q_2) = mq_1 + mq_2 = n + p$, soos verlang is. □

Die verwagting was om q te definieer in terme van m, n en p. Daarenteen is q gedefinieer in terme van q_1 en q_2. Daar is egter geen teenstrydigheid hier nie, aangesien q_1 van n en m afhanklik is terwyl q_2 van p en m afhanklik is, sodat q inderdaad van m, n en p afhanklik is.

In 'n afgeronde vorm, sonder verduidelikings tussenin, lyk die bewys soos volg:

Veronderstel m, n en p is heelgetalle só dat $m|n$ en $m|p$. Daar moet 'n heelgetal q gevind word só dat $n + p = mq$. Omdat $m|n$ en $m|p$, bestaan daar heelgetalle q_1 en q_2 só dat $n = mq_1$ en $p = mq_2$. Stel $q = q_1 + q_2$. Dan is q 'n heelgetal en $mq = m(q_1 + q_2) = mq_1 + mq_2 = n + p$, soos verlang is.

Voorbeeld 47

Laat A en B inverteerbare $n \times n$ matrikse wees. Bewys dat die produk AB ook inverteerbaar is. ('n Vierkantige matriks A is inverteerbaar as en slegs as daar 'n matriks B bestaan só dat $AB = BA = I$, waar I die identiteitsmatriks is.)

Bewys

Dit is gegee dat A en B $n \times n$ inverteerbare matrikse is. Daar moet 'n $n \times n$ matriks X bepaal word só dat $(AB)X = X(AB) = I$.

Omdat A inverteerbaar is, bestaan daar 'n $n \times n$ matriks C só dat $AC = CA = I$.

Omdat B inverteerbaar is, bestaan daar 'n $n \times n$ matriks D só dat $BD = DB = I$. Die verlangde X word uit C en D verkry deur $X = DC$ te stel.

Dan is $(AB)X = (AB)(DC) = A(BD)C = A(I)C = AC = I$
en $X(AB) = (DC)(AB) = D(CA)B = D(I)B = DB = I$. □

Die sleutel tot die oplossing na die beplanning van die bewys, is die keuse van $X = DC$, waar X in terme van D en C geskryf is.

In die volgende voorbeeld word 'n meetkundige motivering vir die keuse van die eksistensiële gekwantifiseerde onbekende gebruik.

Voorbeeld 48

Veronderstel S en T is beide oop deelversamelings van $\mathbb{R}$. Bewys dat $S \cap T$ en $S \cup T$ beide oop versamelings is. (In voorbeeld 44 is die nodige begrippe gedefinieer.)

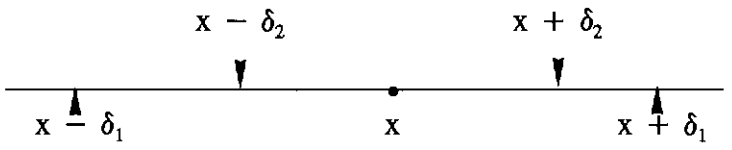
Bewys

Bewys eerstens dat $S \cap T$ 'n oop versameling is. Daar moet aangetoon word dat elke punt van $S \cap T$ 'n binnepunt is.
Veronderstel $x \in S \cap T$. Daar word weer eens op die verlangde gevolgtrekking gefokus, en nie die hipotese nie. Om aan te toon dat x 'n binnepunt van $S \cap T$ is, moet daar 'n positiewe reële getal δ gevind word só dat $N(x, \delta)$, dit is 'n δ-omgewing van x, 'n deelversameling van $S \cap T$ is. Die keuse van δ is die sleutel tot die oplossing. Daar kan niks gevorder word alvorens daar 'n δ gekies is nie.

Omdat $x \in S$, en S 'n oop versameling is, volg dat x 'n binnepunt van S is. Net so is x 'n binnepunt van T.

Deur die definisie van 'n binnepunt twee keer te gebruik, is dit duidelik dat daar reële getalle δ_1 en δ_2 bestaan só dat $N(x, \delta_1) \subseteq S$ en $N(x, \delta_2) \subseteq T$. Definieer nou die verlangde δ in terme van δ_1 en δ_2. Die vraag is hoe word dit gedoen? Figuur 6.4 illustreer die twee waardes van δ_1 en δ_2. Elke punt op 'n afstand kleiner as δ_1 vanaf x is 'n punt in S, en elke punt op 'n afstand kleiner as δ_2 vanaf x is 'n punt in T. Kies $\delta > 0$, klein genoeg, só dat enige punt op 'n afstand kleiner as δ, binne S sowel as T sal lê. Kies dus δ gelyk aan die kleinste waarde van δ_1 en δ_2. Dit word geskryf $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Daar moet vervolgens bevestig word dat $N(x, \delta) \subseteq S \cap T$.

Veronderstel dus $y \in N(x, \delta)$. Daar moet dus aangetoon word dat $y \in S \cap T$. Maar $|x-y| < \delta \leq \delta_1$ sodat $y \in N(x, \delta_1) \subseteq S$. Dus is $y \in S$. Ook is $|x-y| < \delta \leq \delta_2$, sodat $y \in N(x, \delta_2) \subseteq T$. Dus is $y \in T$. Gevolglik is $y \in S \cap T$, sodat $N(x, \delta) \subseteq S \cap T$.



Figuur 6.4

Vervolgens word bewys dat $S \cup T$ 'n oop versameling is.

Veronderstel $x \in S \cup T$. Om aan te toon dat x 'n binnepunt van $S \cup T$ is, moet 'n reële getal $\delta > 0$ gevind word só dat $N(x, \delta) \subseteq S \cup T$. Omdat x in óf S, óf T is, is hierdie 'n geval wat in twee gevalle verdeel kan word. Die strategie sal wees om twee gevalle te beskou, naamlik $x \in S$ en $x \in T$. Dan moet gepoog word om die verlangde resultaat in albei gevalle te bereik. As $x \in S$, en S 'n oop versameling is, bestaan daar 'n positiewe reële getal δ_1 só dat $N(x, \delta_1) \subseteq S$. Omdat $S \subseteq S \cup T$, kies $\delta = \delta_1$, sodat $N(x, \delta) = N(x, \delta_1) \subseteq S \subseteq S \cup T$. Dus is x inderdaad 'n binnepunt van $S \cup T$. Net so, as $x \in T$, dan bestaan daar 'n reële getal $\delta_2 > 0$ só dat $N(x, \delta_2) \subseteq T$. Deur $\delta = \delta_2$ in hierdie geval te kies, volg dit dat $N(x, \delta) = N(x, \delta_2) \subseteq T \subseteq S \cup T$ □

Die stelling dat die vereniging en snyding van twee oop versamelings, weer 'n oop versameling is, kom algemeen voor in gevorderde calculus of elementêre topologie. Hierdie bewyse se kompleksiteit is redelik algemeen verteenwoordigend van talle bewyse op daardie vlak. 'n Belangrike aspek met die uitskryf van hierdie soort bewyse is 'n versigtige interpretasie van die definisies.

6.11 Epsilon-Delta bewyse

Studente vind bewyse van hierdie aard oor die algemeen moeilik. Sulke bewyse kom in die volgende gevalle na vore:

(i) $\lim\limits_{x\to 4} x^2 = 4$ óf $\lim\limits_{x\to a} (mx + c) = ma + c$, waar spesifieke funksies gebruik word.

(ii) As

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1, \text{ en } \lim_{x\to a} g(x) = \ell_2 \text{ , dan is } \lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2,$$

waar daar byvoorbeeld 'n algemene stelling bewys word.

Beskou vervolgens reëlwaardige funksies $f : A \to \mathbb{R}$, waar A 'n deelversameling van $\mathbb{R}$ is. Alvorens die limietbegrip gedefinieer word, is twee voorafgaande definisies nodig.

6.11.1 Definisie

As $a \in \mathbb{R}$ en δ enige positiewe reële getal is, dan word die interval

$$\begin{aligned}(a - \delta, a + \delta) &= \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} \\ &= \{x \mid |x-a| < \delta\}\end{aligned}$$

'n δ-omgewing van a genoem.

6.11.2 Definisie

As $a \in \mathbb{R}$ en δ enige positiewe reële getal is, dan word die versameling $\{x \mid a - \delta < x < a + \delta, x \neq a\} = \{ x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 'n *gereduseerde* δ-*omgewing* van a genoem.

In die geval waar die funksie f in 'n gereduseerde omgewing van a (maar nie noodwendig in a self nie) gedefinieer is, word die limietbegrip gedefinieer.

6.11.3 Definisie

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ beteken die volgende:

vir elke $\epsilon > 0$ (hoe klein ook al) bestaan 'n $\delta > 0$ (wat gewoonlik afhanklik van ϵ is) só dat $|f(x)-\ell| < \epsilon$ vir alle x met $0 < |x-a| < \delta$.

Voorbeeld 49

Bewys dat $\lim\limits_{x \to 1} (2x+1) = 3$.

Bewys

Laat $f(x) = 2x + 1$ vir alle x, $a = 1$ en $\ell = 3$. Laat $\epsilon > 0$ (hoe klein ook al) gegee wees. Nou is $|f(x) -3| = |(2x+1)-3| = 2|x-1|$. Om te sorg dat $|f(x)-3|$ kleiner is as ϵ, moet dus $|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}$. Deur $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ te kies, volg:
vir elke x met $0 < |x - 1| < \delta$ is $|f(x) - 3| < \epsilon$.

Beskou vervolgens 'n voorbeeld van 'n funksie wat nie lineêr is nie.

Voorbeeld 50

Bewys dat $\lim\limits_{x \to 4} x^3 = 64$.

Bewys

Veronderstel $\epsilon > 0$ is enige voorgeskrewe reële getal. Die doel is om 'n reële getal $\delta > 0$ te vind só dat as $0 < |x-4| < \delta$, dan bevredig f(x) die voorwaarde $|f(x)-64| < \epsilon$, met ander woorde, $|x^3-64| = |x-4|\,|x^2+4x+16| < \epsilon$. Die definisie van 'n limiet bevat 'n ry van kwantore, naamlik $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)$ en *nie* $(\forall\epsilon > 0)(\forall x)(\exists\delta > 0)$ nie. Met ander woorde, die reële getal δ wat gesoek word kan dalk van ϵ alleen afhanklik wees en nie van ϵ en x nie. Dus moet die benadering in voorbeeld 49 gevolg word, en dit is om te ondersoek of daar 'n omgewing $N(4, \delta_1)$ van 4 en 'n positiewe konstante M is só dat $|x^2+4x+16| \leq M$ as $0 < |x-4| < \delta_1$. Probeer $\delta_1 = 1$, met ander woorde, veronderstel dat $0 < |x-4| \leq 1$. Dan is $-1 \leq x-4 \leq 1$ en $x \neq 4$, sodat $3 \leq x \leq 5$ en $x \neq 4$. Omdat $x \leq 5$, mag afgelei word dat $|x^2+4x+16| \leq 25 + 20 + 16 = 61$. Dus is $|x^2+4x+16| \leq 61$. Stel $\delta = \min\{1, \epsilon/61\}$. As nou $0 < |x-4| < \delta$, dan is $0 < |x-4| < 1$, sodat $|x^2+4x+16| \leq 61$, en $0 < |x-4| < \epsilon/61$. Dus is

$$|f(x)-64| = |x^2-64|$$
$$= |x-4|\,|x^2+4x+16| \leq 61\ |x-4| < 61\ (\epsilon/61) = \epsilon$$

□

'n Netjieser weergawe van die bewys lyk soos volg:

Veronderstel $\epsilon > 0$ is enige voorgeskrewe reële getal. Dan moet 'n reële getal $\delta > 0$ gevind word só dat as $0 < |x-4| < \delta$, dan is $|x^3-64| < \epsilon$.
As $0 < |x-4| \leq 1$, dan is $|x^2+4x+16| \leq 61$. Stel $\delta = \min\{1, \epsilon/61\}$.

Die res van die bewys volg nou soos hierbo.

Voorbeeld 51

Veronderstel dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1$ en $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell_2$.

Bewys dat $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$.

Bewys

Veronderstel $\epsilon > 0$ is enige voorgeskrewe reële getal. Dan moet 'n reële getal $\delta > 0$ gevind word só dat as x 'n reële getal is met $0 < |x-a| < \delta$, dan is $|(f+g)(x) - (\ell_1 + \ell_2)| < \epsilon$.

Maar $|(f+g)(x) - (\ell_1 + \ell_2)| = |(f(x)-\ell_1) + (g(x) - \ell_2)| \leq |f(x)-\ell_1| + |g(x)-\ell_2|$.

Omdat $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$, bestaan daar 'n reële getal $\delta_1 > 0$ só dat as $0 < |x-a| < \delta_1$, dan is $|f(x)-\ell_1| < \epsilon/2$. Net so bestaan daar 'n reële getal $\delta_2 > 0$ só dat as $0 < |x-a| < \delta_2$, dan is $|g(x)-\ell_2| < \epsilon/2$.

Hoe word δ gekies?
Stel $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$.
As x nou die ongelykhede $0 < |x-a| < \delta$ bevredig dan sal x ook beide die ongelykhede
$0 < |x-a| < \delta_1$ en $0 < |x-a| < \delta_2$ bevredig. Dus

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (\ell_1 + \ell_2)| &= |(f(x)-\ell_1) + (g(x) - \ell_2)| \\ &\leq |f(x)-\ell_1| + |g(x)-\ell_2| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon, \text{ soos verlang is.} \end{aligned}$$

□

Studente kan tereg vra hoekom $\epsilon/2$ in die bewys gebruik is, en hoe dit van hulle verwag kan word om aan so 'n kunsgreep te dink met die uitskryf van hulle eie bewyse. Studente ondervind baie probleme met die uitskryf van epsilon-delta bewyse, hoofsaaklik as gevolg van 'n gebrek in logiese agtergrond en ondervinding met die uitskryf van enige soort bewys. Hierdie probleem kan in 'n groot mate uitgeskakel word deur ondervinding en 'n studie van die logika.

6.12 Indirekte bewyse

'n Indirekte bewys is 'n bewys waar die waarheid van 'n bewering wat verskil van die verlangde resultaat, maar logies ekwivalent aan die verlangde resultaat is, bevestig word.

Hierdie bewysmetode volg uit die wet van die uitgeslote derde, waarvolgens 'n bewering óf waar, óf onwaar is. Banks et al. (1972 : 137) stel dit soos volg:

> "From this we can conclude: when q is true, then ~q is false.
> When ~q is true, then q is false."

Banks et al. gaan voort en skryf:

> "Sometimes when we are interested in proving that q is true, the use of direct proof is impractical. When this happens, we usually try using indirect proof." (op. cit.).

Freudenthal (1973 : 628) skryf dat dit moeilik is om te beskryf wat 'n *indirekte bewys* presies is:

> "To tell what is an indirect proof, one had better follow one's own intuition in this respect, at the same time being careful. Case distinctions can conceal an indirect proof. Pure existence proofs are genuinely indirect; to prove the existence of an x with the property $F(x)$, it is supposed there were no such x, $\neg \vee_x F(x)$, in other words $\wedge_x \neg F(x)$ and a contradiction is derived from $F(x)$ being false for every x."

Volgens Morash (1987 : 204–210) kan die meeste van die indirekte bewyse op voorgraadse vlak, in een van drie kategorieë geplaas word. Elke kategorie stem ooreen met 'n belangrike toutologie uit die proposisielogika. Die drie kategorieë is die volgende:

(1) *Afleiding van 'n gevolgtrekking uit die disjunksie van twee bewerings.*

Na aanleiding van die toutologie $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Rightarrow r]$ in afdeling 4.10 (23), mag 'n gevolgtrekking van die vorm $q \vee r$ van 'n hipotese p afgelei word deur die negering van een deel van die gevolgtrekking as waar te aanvaar, met ander woorde, deur ~q by die lys

van hipoteses te voeg, en op daardie wyse poog om die waarheid van die ander deel te bevestig, of anders gestel, om r te bewys.

(2) *Bewys deur die kontrapositief*

Na aanleiding van die toutologie $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ in afdeling 4.10 (20), mag 'n gevolgtrekking q uit 'n hipotese p bewys word deur aan te toon dat die waarheid van die negering van q impliseer dat die hipotese p onwaar is, met ander woorde, dat $\sim p$ waar is.

(3) *Bewys deur teenstrydigheid (Reductio ad absurdum)*

Na aanleiding van die toutologie $(\sim p \Rightarrow (q \wedge \sim q)) \Rightarrow p$ in afdeling 4.10 (9) mag p bevestig word deur die aanname dat die negering van p tot 'n logiese absurditeit lei, dit is, 'n teenstrydigheid.

Dit is belangrik om die logiese basis van hierdie benaderings te verstaan en te weet hoe om bewyse in hierdie vorms uit te skryf. Net so belangrik is die vermoë om te weet wanneer 'n indirekte bewys van toepassing is as alternatief vir 'n direkte bewys. 'n Indirekte bewys is nie 'n substituut nie, maar wel 'n supplement vir 'n bewys van 'n stelling. Direkte bewyse is altyd verkieslik bo indirekte bewyse, indien albei bewyse maklik uitvoerbaar is. Die student of voornemende wiskundige behoort nooit opgelei te word om 'n gewoonte te ontwikkel om bewyse van stellings op 'n indirekte wyse te benader nie, of anders gestel, die indirekte bewyse behoort nie oordryf te word nie.

Vervolgens word die onderskeie drie kategorieë van indirekte bewyse bespreek.

6.12.1 Afleiding van 'n gevolgtrekking uit die disjunksie van twee bewerings

'n Hipotese wat 'n disjunktiewe vorm $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$ van bewerings het, kan met vrug in gevalle verdeel word wanneer 'n bewys vir 'n stelling beplan word. Beskou as voorbeeld die geval waar die verlangde gevolgtrekking 'n disjunksie is. Dit kan probleme meebring aangesien die meeste argumente in wiskunde gerig is op 'n enkele

gevolgtrekking op 'n keer. Daarom word die bewys dikwels in n dele opgebreek as die gevolgtrekking 'n konjunksie $q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n$ is. In elke deel word dan een van die komponente q_i, bevestig, met ander woorde, elkeen van die komponente word apart afgelei. So 'n gerief is oor die algemeen nie beskikbaar wanneer disjunksie in die gevolgtrekking betrokke is nie. 'n Eenvoudige voorbeeld ter illustrasie van hierdie probleme kom in die volgende stelling oor reële getalle voor.

Voorbeeld 52

Veronderstel dit is bekend dat vermenigvuldiging van reële getalle assosiatief is, dat nie-nul reële getalle multiplikatiewe inverses het, en dat $a.0 = 0$ vir enige reële getal a. Bewys dat as x en y reële getale is met $xy = 0$, dan is $x = 0$ of $y = 0$.

Die probleem word eers bespreek en ontleed.

Die stelling het een eenvoudige hipotese en 'n gevolgtrekking wat 'n disjunksie van twee bewerings is. Deur die probleem direk te benader, is daar klaarblyklik geen manier om die verlangde gevolgtrekking te bereik nie. Die twee metodes wat reeds behandel is, naamlik verbesondering en verdeling in gevalle lyk nie toepaslik hier nie. 'n Beter, maar minder bekende benadering tot probleme van hierdie aard, is om gebruik te maak van 'n veralgemening van die toutologie wat in afdeling 4.10 (23) genoem is, naamlik $[p \Rightarrow (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q_1 \wedge \sim q_2 \wedge \cdots \wedge \sim q_{n-1}) \Rightarrow q_n]$.

Die afleiding $q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n$ kan uit p benader word deur die negering van al die komponente op een na van die gevolgtrekking, as waar te aanvaar, en dan op die basis van hierdie addisionele veronderstellings, poog om te bewys dat die oorblywende komponent waar is. Hierdie benadering het 'n duale voordeel:

(i) 'n logies gekompliseerde verlangde gevolgtrekking word deur 'n relatief eenvoudige een vervang, en

(ii) daar is een bykomende hipotese. Vervolgens word voorbeeld 52 bewys.

Bewys

Om die gevolgtrekking "$x = 0$ of $y = 0$" uit die hipotese "$xy = 0$" af te lei, word begin deur te veronderstel $x \neq 0$. Daar sal gepoog word om die hipotese $xy = 0$ en die veronderstelling $x \neq 0$ te gebruik om te bewys dat $y = 0$. As dit moontlik is, dan is die bewys, na aanleiding van die toutologie wat reeds gemeld is, voltooi. Die betekenis van 'n nie-nul waarde vir x is die feit dat 'n multiplikatiewe inverse x^{-1} bestaan.

Enersyds is $x^{-1}(xy) = x^{-1}(0) = 0$.
Andersyds is $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1.y = y$.

Uit transitiwiteit volg nou dat $y = 1.y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}(0) = 0$, wat die verlangde gevolgtrekking is. □

Dit is nie nodig om die argument te herhaal met die rolle van x en y omgekeerd nie, met ander woorde, dit is nie nodig om te bewys dat as $xy = 0$ en $y \neq 0$, dan is $x = 0$. Om die gevolgtrekking $q \vee r$ uit p af te lei, mag die negering van *enigeen* van die komponente q of r beskou word om die oorblywende een af te lei. Deur dit in beide gevalle te doen, is oorbodig.

Die voorafgaande metode is gerieflik in die geval van bewyse oor inklusie van versamelings, waar probeer word om 'n versameling A as 'n deelversameling van die vereniging van twee versamelings X en Y te bewys. In só 'n geval is die verlangde gevolgtrekking van die vorm "$x \in X$ óf $x \in Y$".

Voorbeeld 53

Bewys dat $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$, waar A, B en C willekeurige versamelings is.

Bewys

Veronderstel $x \in (A \cup B) \cap C$. Om aan te toon dat $x \in A \cup (B \cap C)$, moet aangetoon word dat $x \in A$ óf $x \in B \cap C$. Veronderstel $x \notin A$. Die stelling sal bewys wees as aangetoon is dat $x \in B \cap C$, met ander woorde, as $x \in B$ en $x \in C$. Omdat die "nuwe" gevolgtrekking slegs konjunksie behels, mag dit afgelei word deur die twee komponentstellings apart te bewys. Om aan te toon dat $x \in C$, word eenvoudig opgemerk dat aangesien $x \in (A \cup B) \cap C$, volg dit dat $x \in C$. Die eintlike probleem, en die plek waar die veronderstelling $x \notin A$ gebruik moet word, lê in die feit om te bewys dat $x \in B$.

Omdat $x \in (A \cup B) \cap C$, volg in besonder dat $x \in A \cup B$, met ander woorde, $x \in A$ óf $x \in B$. Maar aangesien $x \notin A$, volg dit dat $x \in B$, soos verlang is. □

Die toutologie, modus tollendo ponens, afdeling 4.10 (3), was implisiet in die tweede laaste sin van die bewys gebruik.

6.12.2 Bewys deur die kontrapositief

Daar is reeds probleme beskou deur 'n gevolgtrekking van die vorm $(\forall x)\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$ af te lei uit 'n gegewe versameling van hipoteses. Met die beplanning van die bewys, is gefokus op die gevolgtrekking, en 'n willekeurige element x gekies só dat P(x) waar is. Die doel was om te bewys dat Q(x) ook vir hierdie x waar is, deur gebruik te maak van die hipotese.

Bewys deur die kontrapositief is 'n "spieëlbeeld" van die bewys wat so pas beskryf is. Veronderstel die *hipotese* het die vorm $(\forall x)\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Veronderstel verder dat die verlangde gevolgtrekking 'n eenvoudige bewering is. Hierdie geval kan baie moeilik, indien nie onmoontlik nie, wees, indien direkte metodes in die aanbieding van 'n bewys gebruik word.

Banks et al. (1972 : 138) skryf dat bewys deur die kontrapositief 'n vorm van indirekte bewys is.

> "We deny q and reach the denial of p, but we know p is true. The process used in this method of proof is similar to that used in direct proof, but instead of starting with the hypothesis and proceeding directly to the conclusion, we attempt to prove the contrapositive of the original statement."

Solow (1981 : 72–73) beweer dat die kontrapositiewe metode van bewysvoering die voordeel het om die bewys na 'n spesifieke tipe van teenstrydigheid te rig.

Voorbeeld 54

Bewys dat as 'n lineêre funksie $f(x) = mx + c$ stygend op $\mathbb{R}$ is, dan is $m > 0$.
Analiseer eers hierdie probleem. Die hipotese het die vorm $(\forall x_1)\ (\forall x_2)\ [(x_1 < x_2) \Rightarrow (mx_1 + c < mx_2 + c)]$, terwyl die gevolgtrekking die eenvoudige bewering $m > 0$ is. Aangesien die gevolgtrekking 'n eenvoudige bewering is wat geen kwantore of konnektiewe bevat nie, is die enigste direkte metode van bewys, een deur transitiwiteit.

Aangesien die hipotese egter 'n "as – dan" bewering is, en gevolglik 'n veronderstelling $x_1 < x_2$ vereis om die gevolgtrekking te aktiveer, is dit nie duidelik hoe om die hipotese in so 'n argument te inkorporeer nie. As gevolg hiervan sal die bewys gedoen word deur die kontrapositiewe metode te gebruik.

Bewys

Veronderstel $m \leq 0$. Stel $x_1 = 2$ en $x_2 = 4$. Dan is $x_1 < x_2$.
Omdat $m \leq 0$, volg dat $mx_1 = 2m \geq 4m = mx_2$. Dus is $2m + c \geq 4m + c$, en gevolglik is $f(2) \geq f(4)$.

Daar is dus bewys dat daar reële getalle x_1 en x_2 bestaan, met $x_1 < x_2$, maar $f(x_1) \geq f(x_2)$, wat die negering van die oorspronklike hipotese is. □

Voorbeeld 55

Veronderstel dat 'n versameling A die eienskap het dat $A \subseteq B$ vir alle $B \subseteq U$, waar U die universele versameling is. Bewys dat $A = \emptyset$.

Bewys

Weer eens is die hipotese taamlik gekompliseerd in vergelyking met die gevolgtrekking in dié sin dat die hipotese die universele kwantor $\forall$ en konnektief $\Rightarrow$ bevat, laasgenoemde as deel van die definisie van 'n "deelversameling".

Begin nou soos volg: veronderstel $A \neq \emptyset$. Daar moet bewys word dat daar 'n versameling $B \in P(U)$ bestaan só dat $A \not\subseteq B$. Stel $B = \emptyset$. Omdat $A \neq \emptyset$, bestaan daar 'n element $x \in A$. Omdat $B = \emptyset$ is $x \notin B$. Dan is $A \not\subseteq B$, soos verlang is. □

Volgens Morash (1987 : 207–208) kan bewyse deur die kontrapositief handig wees in gevalle waar die hipotese nie noodwendig van die vorm $(\forall x)\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$ is nie, maar nogtans in logiese vorm meer gekompliseerd as die gevolgtrekking is.

Voorbeeld 56

Veronderstel dat a 'n reële getal is só dat $(\forall \mu > 0)(|a| < \mu)$. Bewys dat $a = 0$.

Bewys

Veronderstel $a \neq 0$. Dan is $\frac{1}{2}|a| > 0$. Stel $\mu = \frac{1}{2}|a|$. Dan is $\mu > 0$, en omdat $1 > \frac{1}{2}$, volg dat $|a| = (1)(|a|) > \frac{1}{2}|a| = \mu$. Dus, $(\exists \mu > 0)(|a| > \mu)$, sodat $(\exists \mu > 0)\,(|a| \geq \mu)$, wat die logiese negering van die hipotese is. □

Hierdie voorbeeld is belangrik in die reg omdat dit 'n belangrike rol speel in die bewys van uniekheid in die geval van limiete.

In sommige gevalle waar die verlangde gevolgtrekking van die vorm $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ is, mag die verband tussen die hipotese en die gevolgtrekking sodanig wees dat dit voordelig is om die logies ekwivalente vorm $(\forall x)\ (\sim Q(x) \Rightarrow \sim P(x))$ van die gevolgtrekking te bewys. Dit word met die volgende voorbeeld geïllustreer.

Voorbeeld 57

Bewys dat as f stygend op 'n interval I is, dan is f 'n een-tot-eenafbeelding op I.

Bewys

Volgens die definisie van een-tot-eenafbeeldings moet aangetoon word dat as x_1 en x_2 reële getalle is met $f(x_1) = f(x_2)$, dan is $x_1 = x_2$. Die hipotese dat f stygend is het daarenteen 'n ander formaat, naamlik, as $x_1 < x_2$, dan is $f(x_1) < f(x_2)$. Dit is derhalwe makliker om die gevolgtrekking af te lei deur te veronderstel dat $x_1 \neq x_2$, en te probeer om aan te toon dat $f(x_1) \neq f(x_2)$. 'n Verdeling in gevalle lyk vanselfsprekend. As $x_1 \neq x_2$, dan is $x_1 < x_2$ of $x_1 > x_2$. As $x_1 < x_2$, dan is $f(x_1) < f(x_2)$, sodat $f(x_1) \neq f(x_2)$. As $x_1 > x_2$, dan is $f(x_1) > f(x_2)$, sodat weer eens $f(x_1) \neq f(x_2)$, soos verlang is. □

Die resultaat in voorbeeld 57 kan ook afgelei word deur te veronderstel dat f nie 'n een-tot-eenafbeelding is nie, en dan te bewys dat f nie 'n stygende funksie is nie. 'n Baie algemene toepassing van bewyse deur die kontrapositiewe metode kom volgens Solow (1981 : 72−73) na vore wanneer 'n stelling van die vorm $(p \wedge q) \Rightarrow r$ bekend is, en die ooreenstemmende vorm $(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q$ bewys moet word. Dit kan maklik bewys word dat hierdie twee bewerings inderdaad ekwivalent is, sodat die tweede bewering altyd bewys kan word. In spesifieke toepassings is 'n kort roetine argument deur die kontrapositief die beste benadering, soos die volgende voorbeeld illustreer.

Voorbeeld 58

Veronderstel dat 'n deelversameling C van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ simmetries met betrekking tot die y-as is, maar nie met betrekking tot die oorsprong nie. Neem verder aan dat as C simmetries met betrekking tot beide die x-as en die y-as is, dan is dit simmetries met betrekking tot die oorsprong. Bewys nou dat C nie simmetries met betrekking tot die x-as is nie.

Bewys

Veronderstel C is simmetries met betrekking tot die x-as. As C simmetries met betrekking tot beide die x-as en die y-as is, dan is C simmetries met betrekking tot die oorsprong. Dit bevestig die negering van die hipotese "maar nie met betrekking tot die oorsprong nie", en bewys die stelling. □

Leerlinge maak dikwels van die volgende stelling in die Euklidiese meetkunde op skool gebruik.

Banks et al. (1972 : 138) byvoorbeeld, bewys die stelling met die kontrapositiewe metode.

Voorbeeld 59

Bewys in Δ ABC, as $\hat{B} \neq \hat{C}$, dan is AB $\neq$ AC.

Interpreteer die bewys eers in terme van die kontrapositief. Assosieer p met die bewering "$\hat{B} \neq \hat{C}$", en q met die bewering "AB $\neq$ AC". Dan is $\sim$p die bewering

" $\hat{B} = \hat{C}$ " en $\sim$q die bewering "AB =AC". Die kontrapositief van p $\Rightarrow$ q is $\sim$q $\Rightarrow$

$\sim$p (kyk afdeling 4.10 (20)), met ander woorde, "in Δ ABC, as AB =AC, dan is $\hat{B} = \hat{C}$". Dit kan maklik bewys word.

Bewys

	BEWERINGS		REDES
1	In Δ ABC, as AB = AC, dan is $\hat{B} = \hat{C}$.	1	Die basishoeke van 'n gelykbenige driehoek is gelyk.
2	In Δ ABC, as $\hat{B} \neq \hat{C}$, dan is AB $\neq$ AC.	2	'n Bewering en sy kontrapositief is ekwivalent.

□

Dit word weer eens beklemtoon dat indirekte metodes vir bewyse nie oordryf moet word nie. Bewyse deur die kontrapositief is onderhewig aan oorgebruik. Die rede kan wees dat die begin van 'n bewys, dikwels moeilik is en die benadering van "veronderstel die gevolgtrekking is onwaar" is 'n maklike manier om weg te spring met 'n bewys. Hierdie benadering kan egter soms tot moeilike argumente lei, of bewyse wat nie so goed aangebied is nie indien 'n direkte argument geredelik beskikbaar is.

Daar word weer eens gewys op die feit dat bewyse deur die kontrapositief aangepak word deur die veronderstelling van die negering van die *gevolgtrekking*, en *nooit* die negering van een of meer van die *hipoteses* nie.

6.12.3 Bewys deur teenstrydigheid

Hierdie bewysvoering berus op die wet van die uitgeslote derde. Hierdie metode van bewys is gebaseer op die volgende beginsel: "as die negering van 'n bewering tot 'n logiese absurditeit lei, moet die bewering waar wees." In hierdie verband word ook na afdelings 4.10 (9) en 6.12 verwys.

Bewyse deur die kontrapositief te gebruik, is eintlik spesiale gevalle van bewyse deur teenstrydigheid. In die bewys deur die kontrapositief dat p impliseer q, is p die hipotese en q die gevolgtrekking. As nou $\sim p$ uit $\sim q$ afgelei kon word, dan volg $p \wedge \sim p$, wat 'n teenstrydigheid is.

Nog 'n manier om 'n teenstrydigheid te beskou, is om te verwys na afdeling 4.3.4. Daar is gesien dat 'n voorwaardelike bewering $A \Rightarrow B$ onwaar is as en slegs as A waar en B onwaar is. In 'n bewys deur teenstrydigheid, word hierdie ongunstige geval uitgesonder deur te veronderstel dat dit wel waar is, en word 'n teenstrydigheid dan so bereik.

Volgens Solow (1981 : 65) kom op hierdie stadium verskeie vrae na vore.

(i) Na watter teenstrydigheid moet gesoek word?

(ii) Hoe word die veronderstelling dat A waar en B onwaar is, gebruik om 'n teenstrydigheid te bereik?

(iii) Waar en wanneer behoort hierdie benadering gebruik te word?

Volgens Solow (1981 : 65) is die eerste vraag by verre die moeilikste om te beantwoord. Daar is nie spesifieke riglyne nie. Elke probleem is uniek ten opsigte van sy teenstrydigheid, en dit verg gewoonlik kreatiwiteit, insig en geluk om 'n teenstrydigheid te bereik.

Op die tweede vraag is die antwoord dat 'n algemene benadering om 'n teenstrydigheid te bereik, is om vorentoe te werk vanaf die veronderstelling dat A en $\sim$B waar is.

Die antwoord op die derde vraag is om die metode van teenstrydigheid te gebruik wanneer die bewering "nie B" handige inligting gee. Daar is ten minste twee herkenbare gevalle waar die metode van teenstrydigheid gebruik kan word. Beskou die volgende stelling:

"As n 'n heelgetal is en n^2 is ewe, dan is n ewe."

'n Heelgetal kan duidelik net ewe of onewe wees. Assosieer B met die bewering: "n is 'n ewe getal."

As veronderstel word dat B nie waar is nie, met ander woorde, dat n nie 'n ewe getal is nie, dan moet n 'n onewe getal wees. Hier het die bewering "nie B" handige inligting gegee. Oor die algemeen, as 'n bewering B een van twee moontlikhede is, word die metode van teenstrydigheid aanbeveel.

'n Tweede geval waar die metode van teenstrydigheid aanbeveel word, is in gevalle waar die bewering B die woord "nie" bevat. Daar is twee klassieke bewyse deur teenstrydigheid wat algemeen bekend is. Die een is die bewys dat $\sqrt{2}$ nie 'n rasionale getal is nie, terwyl die ander bewys is dat daar oneindig veel priemgetalle bestaan.

Die eerste stelling sal weldra bewys word. Eers is die volgende resultaat nodig.

Voorbeeld 60

As n 'n heelgetal is en n^2 is 'n ewe getal, dan is n 'n ewe getal.

Analiseer die probleem eers.

Assosieer A met die bewering "n is 'n heelgetal en n^2 is 'n ewe getal" en B met die bewering "n is 'n ewe getal".

Bewys

Veronderstel dat B nie waar is nie. Dan is n 'n onewe getal. Dus bestaan daar 'n heelgetal k só dat $n = 2k - 1$. Dus is $n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$. Maar $(2k^2 - 2k)$ is 'n heelgetal, sê p. Dus is $n^2 = 2p + 1$, wat 'n onewe heelgetal is. Dit is teenstrydig met A. Gevolglik moet B waar wees. □

Vervolgens word bewys dat $\sqrt{2}$ nie 'n rasionale getal is nie.

Voorbeeld 61

Bewys dat $\sqrt{2}$ nie 'n rasionale getal is nie, met ander woorde, bewys dat daar nie heelgetalle p en q bestaan, met p en q onderling priem, só dat $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ nie.

Bewys

Veronderstel $\sqrt{2}$ is 'n rasionale getal, met ander woorde $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, met p en q heelgetalle, $q \neq 0$, p en q onderling priem. Dan is $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Dus is $p^2 = 2q^2$.

Gevolglik is p^2 'n ewe heelgetal, en dus volg uit voorbeeld 60 dat p 'n ewe heelgetal is. Skryf dus $p = 2n$, waar n 'n heelgetal is. Dus is $2q^2 = p^2 = (2n)^2 = 4n^2$, sodat $q^2 = 2n^2$. Dit beteken dat q^2 'n ewe heelgetal is, sodat q 'n ewe heelgetal is. Dit volg dus dat beide p en q ewe heelgetalle is. Maar dit is teenstrydig met die feit dat p en q onderling priem is. Dus volg dat $\sqrt{2}$ nie 'n rasionale getal is nie. □

Hierdie bewys dateer uit die antieke tydperk en is ontdek deur 'n volgeling van Pythagoras.

In die sillabus vir wiskunde, graad 10, van die voormalige Transvaalse Onderwys-departement, wat in 1968 geïmplementeer is, was die bewys dat $\sqrt{2}$ nie 'n rasionale getal is nie, voorgeskryf. Hierdie bewys is in daaropvolgende sillabusse uitgelaat.

Die volgende stelling is tans vir leerlinge in graad 11 voorgeskryf:

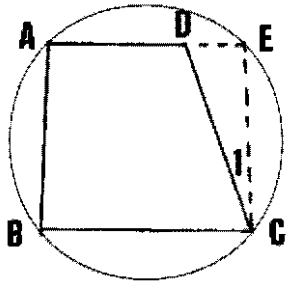
"Die oorstaande hoeke van 'n koordevierhoek is supplementêr, en omgekeerd, as 'n paar oorstaande hoeke van 'n vierhoek supplementêr is, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek."

Dit word van die kandidaat verwag om die bewys in albei rigtings vir die eksamen te kan doen. In voorbeeld 62 word die bewys slegs in een rigting aangebied.

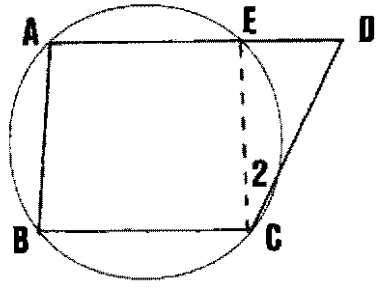
Voorbeeld 62

As 'n paar oorstaande hoeke van 'n vierhoek supplementêr is, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek.

Bewys



(a)



(b)

Figuur 6.5

BEWERING	REDE
1 Deur die drie punte, A, B en C kan 'n sirkel, getrek word. Veronderstel die sirkel gaan nie deur die punt D nie. Dan sny AD of AD se verlengde, die sirkel in sê, die punt E. Trek EC.	
2 $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$	2 gegee
3 Maar $\hat{B} + \hat{E} = 180^\circ$	3 Die teenoorstaande hoeke van koordevierhoek ABCE is supplementêr.
4 Dus $\hat{D} = \hat{E}$	4 Uit 2 en 3 links volg dat $\hat{D} = 180^\circ - \hat{B}$ en $\hat{E} = 180^\circ - \hat{B}$
5 Maar dit is absurd, aangesien $A\hat{D}C = \hat{E} + \hat{C}_1$ (figuur6.5(a)) óf $A\hat{E}C = \hat{D} + \hat{C}_2$ (figuur6.5(b))	5 Die buitehoek van 'n driehoek is gelyk aan die som van die teenoorstaande binnehoeke.
6 Dus die sirkel gaan deur die punt D.	
7 Dus is vierhoek ABCD 'n koordevierhoek.	7 Definisie van 'n koordevierhoek.

□

Die volgende probleem het in die seniorsertifikaat-eksamen van November 1990 van die voormalige Transvaalse Onderwysdepartement verskyn. Alhoewel daar 'n kort direkte bewys is, is 'n indirekte bewys in die memorandum aangebied.

Voorbeeld 63

Dit word gegee dat $a + b < c + d$ vir die positiewe getalle a, b, c en d.

Bewys dat $ac + bd > ab$.

Bewys

(i) *Indirekte bewys*

Veronderstel $ac + bd \leq ab$. Dan is $ac < ab$ en $bd < ab$. Dus is $c < b$ en $d < a$. Gevolglik is $c + d < a + b$, wat teenstrydig met die hipotese is. Dus is $ac + bd > ab$.

(ii) *Direkte bewys*

Veronderstel $a \geq b$. Uit die hipotese $a + b < c + d$ volg dat $a < c + d$. Dus is $ab < bc + bd$. Dan volg uit die veronderstelling dat $ab < ac + bd$.

6.13 Eksistensie en eenduidigheid

Daar bestaan verskeie ander gevestigde bewystegnieke wat suksesvol aangewend kan word. Twee van hierdie tegnieke, naamlik eksistensie en eenduidigheid, word in hierdie afdeling bespreek. Die volgende probleme kom dikwels na vore in bewyse van stellings:

- Bewys dat daar ten minste een objek bestaan wat 'n gegewe wiskundige eienskap bevredig (eksistensie).

- Bewys dat daar slegs een objek bestaan wat 'n gegewe wiskundige eienskap bevredig (eenduidigheid).

Hierdie tipe probleme oor eksistensie en eenduidigheid kom in 'n verskeidenheid van probleme in die wiskunde voor, soos die volgende voorbeeld aantoon.

Voorbeeld 64

(a) Toon aan dat daar 'n eenduidige reële oplossing vir die vergelyking $\sqrt{3x + 13} = x + 1$ is. (Eksistensie en eenduidigheid.)

(b) Toon aan dat daar 'n bogrens vir die versameling $A = \{ x \mid x = \frac{n-1}{n}, n \in Z^+ \}$ bestaan. (Slegs eksistensie).

(c) Toon aan dat as f 'n funksie is wat op 'n oop interval wat 'n punt a bevat, gedefinieer is, dan is $\lim_{x \to a} f(x)$, as dit bestaan, eenduidig. (Slegs eenduidigheid.)

(d) Toon aan dat as p en q heelgetalle is, nie albei gelyk aan nul nie, dan het hulle 'n eenduidige GGD. (Eksistensie en eenduidigheid.)

(e) Toon aan dat daar oneindig veel priemgetalle is. (Slegs eksistensie).

Bewystegnieke met betrekking tot hierdie twee begrippe verskil. Nogtans word hierdie bewystegnieke in dieselfde afdeling bespreek, aangesien die twee begrippe dikwels na vore kom in dieselfde probleem, met die een begrip 'n "duaal" van die ander begrip. Hierdie dualiteit van eksistensie en eenduidigheid kom op alle vlakke van die wiskunde voor, en begin reeds op hoërskool. Nog 'n rede om hulle saam te bespreek is dat die bewys vir eenduidigheid soms die sleutel verskaf vir die bewys van eksistensie, soos die volgende voorbeeld illlustreer.

Voorbeeld 65

Toon aan dat die vergelyking $\sqrt{1-x} = 2x - 1$ 'n eenduidige reële oplossing het.

Bewys

$$\sqrt{1-x} = 2x - 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 - x = (2x-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 - x = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(4x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \text{ óf } x = \frac{3}{4}$$

Op die oog af lyk dit asof daar twee oplossings bestaan, maar die reële getal 0 bevredig nie die vergelyking nie, aangesien $\sqrt{1} \neq -1$. Hierdie voorbeeld illustreer die algemene feit dat die algebraïese proses van oplos van 'n vergelyking nooit bewys dat die reële getalle wat aan die einde van die proses verkry word, die oplossings van die vergelyking is nie, en dus *nooit* die bestaan van 'n oplossing bewys nie. Die twee reële getalle, 0 en $\frac{3}{4}$, wat verkry is, is slegs moontlike oplossings vir die vergelyking. Die bestaan van 'n oplossing word slegs bewys nadat deur substitusie die waarheid van die sin geverifieer is. Vir $\frac{3}{4}$ word die vergelyking wel bevredig, en aangesien dit die enigste reële oplossing vir die vergelyking is, word gesê die oplossing is eenduidig. □

Hierdie tipe vergelykings is in die tussentydse kernsillabus vir wiskunde, Hoër Graad van die Departement van Onderwys, vir graad 11 leerlinge voorgeskryf. □

6.13.1 Eenduidigheid

In meer abstrakte probleme is daar volgens Morash (1987 : 214) drie moontlike benaderings om eenduidigheid te bewys.

(i) Veronderstel x_1 en x_2 is albei objekte wat 'n sekere eienskap P(x) bevredig. Bewys dan dat $x_1 = x_2$.
Dit is verreweg die mees algemeenste benadering.

(ii) Veronderstel dit word gegee dat P(a) waar is vir 'n spesifieke waarde van a, en daar word gevra om te bewys dat a die enigste sodanige objek is. In só 'n geval word x beskou as enige ander objek wat P(x) bevredig, en word gepoog om x = a te bewys.

(iii) Nog 'n benadering is om uniekheid deur 'n teenstrydige argument te bewys.

Solow (1981 : 84–85) stem in beginsel met Morash saam, hoewel hy (i) en (ii) saamvat as een enkele benadering.

Morash (1987 : 214–216) illustreer elk van hierdie drie benaderings met behulp van die volgende aangepaste voorbeelde.

Voorbeeld 66

'n Versameling B word 'n komplement van 'n versameling A genoem as en slegs as $A \cup B = U$ en $A \cap B = \emptyset$. Bewys dat elke versameling hoogstens een komplement het.

Deur die woorde "hoogstens een komplement" in plaas van "het 'n eenduidige komplement" te gebruik, word die *bestaan* van 'n komplement geheel en al vermy.

Bewys

Veronderstel versamelings B_1 en B_2 is albei komplemente van 'n versameling A. Daar gaan aangetoon word dat $B_1 = B_2$.

Uit die veronderstelling volg dat $A \cup B_1 = A \cup B_2 = U$ en $A \cap B_1 = A \cap B_2 = \emptyset$. Die keusemetode kan gebruik word om te bewys dat $B_1 \subseteq B_2$ en $B_2 \subseteq B_1$.

Die volgende benadering word egter gevolg:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_1 \cap U = B_1 \cap (A \cup B_2) \\ &= (B_1 \cap A) \cup (B_1 \cap B_2) \\ &= \emptyset \cup (B_1 \cap B_2) \\ &= B_1 \cap B_2 \end{aligned}$$

Dus $B_1 \subseteq B_2$

Deur die rolle van B_1 en B_2 in die argument hierbo om te ruil, volg dat $B_2 \subseteq B_1$, sodat $B_1 = B_2$. □

Voorbeeld 67

'n Reële getal μ word die kleinste bogrens van 'n versameling $S \subseteq \mathbb{R}$ genoem as en slegs as

(i) $x \leq \mu$ vir alle $x \in S$ en

(ii) vir elke $\beta > 0$ bestaan daar 'n $y \in S$ só dat $y > \mu - \beta$. Bewys dat S hoogstens een kleinste bogrens het.

Bewys

Veronderstel μ_1 en μ_2 is albei bogrense van S. Daar gaan gepoog word om aan te toon dat $\mu_1 = \mu_2$ deur 'n kontrapositiewe argument te gebruik.

As $\mu_1 \neq \mu_2$, mag, sonder verlies aan algemeenheid, veronderstel word dat $\mu_1 < \mu_2$. Die tegniek van verbesondering word op deel (ii) van die definisie toegepas, deur $\beta = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$ te stel. Dan bestaan volgens (ii) 'n $y \in S$ só dat

$$\begin{aligned} y > \mu_2 - \beta &= \mu_2 - \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) \\ &= \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \\ &> \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_1) \\ &= \mu_1 \end{aligned}$$

Maar $y > \mu_1$ en $y \in S$ is teenstrydig met eienskap (i) vir μ_1. Dus $\mu_1 = \mu_2$, soos verlang is.

□

Voorbeeld 68

Bewys dat as k en ℓ reële getalle is, met $\lim_{x \to a} f(x) = k$ en $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, waar f gedefinieer is op 'n oop interval wat a bevat, dan is $k = \ell$.

Bewys

Veronderstel $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ en $\lim_{x \to a} f(x) = k$

Dan moet bewys word dat $k = \ell$. Dit word gedoen deur te bewys dat $|k - \ell| < \epsilon$ vir elke voorgeskrewe $\epsilon > 0$. Stel dus $\epsilon > 0$.

Aangesien $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, bestaan daar 'n reële getal $\delta_1 > 0$ só dat $|f(x) - \ell| < \epsilon/2$

vir alle x met $0 < |x - a| < \delta_1$. Aangesien $\lim_{x \to a} f(x) = k$, bestaan daar 'n reële getal

$\delta_2 > 0$ só dat $|f(x) - k| < \epsilon/2$ vir alle x met $0 < |x - a| < \delta_2$.

Stel $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$.
Dan is $|f(x) - \ell| < \epsilon/2$ en $|f(x) - k| < \epsilon/2$ vir alle x met $0 < |x - a| < \delta$.

Vir só 'n x geld dan

$$\begin{aligned} |\ell - k| &= |[\ell - f(x)] + [f(x) - k]| \\ &\leq |\ell - f(x)| + |f(x) - k| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Omdat ℓ en k konstantes is, volg hieruit dat $\ell = k$. □

In die volgende voorbeeld word eenduidigheid geïllustreer deur te bewys dat 'n spesifieke objek a die enigste objek is wat 'n gegewe eienskap P(x) bevredig.

Voorbeeld 69

Toon aan dat die leë versameling $\emptyset$ die enigste versameling S is wat die eienskap besit dat daar twee verskillende versamelings A en B bestaan só dat $A \times S = B \times S$. Aanvaar die stelling dat as P, Q en R versamelings is met $P \times Q \subseteq P \times R$ en $P \neq \emptyset$, dan is $Q \subseteq R$.

Bewys

As $A \times S = B \times S$, word beweer dat $S = \emptyset$, want as $S \neq \emptyset$ en $A \times S = B \times S$, dan volg uit die gegewe stelling dat $A = B$, wat teenstrydig met die veronderstelling is.
Dus is $S = \emptyset$. □

6.13.2 Eksistensie

Volgens Morash (1987 : 216–217) is daar in wese twee elementêre benaderings om die bestaan van 'n objek te bewys wat gegewe eienskappe bevredig.

(i) By die direkte benadering word die bestaan bewys deur 'n objek van die verlangde soort te *vind*. Hierdie tipe bewyse is gewoonlik van die makliker soort.

(ii) By die indirekte benadering word die bestaan met 'n metode bewys wat gebaseer is op die metode van teenstrydigheid. Hier word begin met 'n veronderstelling van nie-bestaan en probeer om 'n teenstrydigheid af te lei.

Die volgende drie aangepaste voorbeelde word ter illustrasie aangebied.

Voorbeeld 70

'n Deelversameling S van $\mathbb{R}$ word begrens van bo genoem as en slegs as daar 'n reële getal μ bestaan só dat $x \leq \mu$ vir alle $x \in S$. 'n Getal μ met hierdie eienskap word 'n *bogrens* vir S genoem. Bewys dat die interval [0,2] van bo begrens is in $\mathbb{R}$.

Bewys

Die getal 3 het die eienskap dat $x \leq 3$ vir alle $x \in [0,2]$. Enige reële getal ϵ nie kleiner as 2 kan die verlangde getal μ wees. □

Dit is duidelik dat μ in hierdie geval nie eenduidig is nie.

Voorbeeld 71

Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'n funksie wees en laat A 'n deelversameling van die definisiegebied van f wees.
Bewys dat $8 \in f(A)$ as $f(x) = x^3$ en $A = [0, 3]$.

Bewys

Om te bewys dat $8 \in f(A)$, moet 'n $x \in [0, 3]$ gevind word só dat $8 = f(x) = x^3$. Omdat $2^3 = 8$ en $2 \in [0, 3]$, word $x = 2$ gestel. Hierdie waarde vir x wat die bestaan bevestig, is ook eenduidig.

□

Die volgende voorbeeld wat 'n indirekte bewys vir eksistensie is, is welbekend.

Voorbeeld 72

Bewys dat daar oneindig veel priemgetalle is.

Bewys

As die verlangde resultaat onwaar is, kan al die priemgetalle neergeskryf word, sê p_1, p_2, ···, p_n.

'n Teenstrydigheid word verkry indien daar 'n priemgetal bestaan wat nie in die lys voorkom nie. Stel $p = (p_1\ p_2 \cdots p_n) + 1$. Die produk $(p_1\ p_2 \cdots p_n)$ is deelbaar deur elke p_i. Dus is p nie deelbaar deur enige van die p_i's nie, want as p en $(p_1\ p_2 \cdots p_n)$ deur 'n sekere p_i deelbaar is, dan sal daardie spesifieke p_i ook in die verskil $p - (p_1\ p_2 \cdots p_n) = 1$ deel.

In só 'n geval sal daardie p_i dan 1 moet wees, wat nie 'n priemgetal is nie. Omdat p dus nie deelbaar is deur enige priemgetal nie, moet p self 'n priemgetal wees, wat teenstrydig met die veronderstelling is dat daar net eindig veel priemgetalle is. □

Talle van die meer ingewikkelde en gesofistikeerde direkte bewyse van eksistensie is gebaseer op fundamentele aksiomas wat bestaan aanvaar as deel van die grondslae van wiskunde. Een so 'n aksioma is die kleinste bogrens aksioma vir $\mathbb{R}$. Nog so 'n aksioma is die welordeningsbeginsel vir die versameling $\mathbb{N}$ van alle positiewe heelgetalle. Hierdie aksioma beweer dat elke nie-leë deelversameling van $\mathbb{N}$ 'n kleinste element het. 'n Interessante en nie-triviale toepassing van die welordeningsbeginsel, is die bewys dat enige paar van heelgetalle m en n, nie albei nul nie, 'n GGD het.

Voorbeeld 73

'n Heelgetal d word 'n GGD van heelgetalle m en n genoem as en slegs as (i) $d \geq 0$, (ii) $d|m$ en $d|n$, en (iii) vir alle $c \in Z$, as $c|m$ en $c|n$, dan $c|d$. Bewys dat as m en n heelgetalle is, nie albei nul nie, dan bestaan daar 'n grootste gemene deler van m en n.

Bewys

Beskou die versameling S van alle heelgetalle van die vorm $mx + ny$, waar x en y heelgetalle is. Dit is duidelik dat S ook positiewe heelgetalle bevat, en dus, volgens die welordeningsbeginsel, 'n kleinste positiewe heelgetal, sê d bevat. Omdat $d \in S$, volg dat $d = mx_1 + ny_1$ vir sekere heelgetalle x_1 en y_1. Die bewering is dat d voorwaardes (i), (ii) en (iii) van die definisie vir 'n grootste gemene deler van m en n bevredig.

Voorwaarde (i) is waar volgens die definisie van d, en (iii) word maklik soos volg bewys. As $c|m$ en $c|n$, dan $c|mx_1$ en $c|ny_1$ sodat $c|(mx_1 + ny_1) = d$. Dus $c|d$. Voorwaarde (ii) is die moeilikste om te bewys, aangesien die bewys berus op die welbekende delingsalgoritme vir die versameling Z van heelgetalle. Hierdie algoritme lui soos volg: vir enige gegewe heelgetalle m en d met $d > 0$, bestaan daar eenduidige heelgetalle q en r só dat $m = dq + r$, met $0 \leq r < d$.

Om te bewys dat $d|m$, word hierdie stelling toegepas op die heelgetalle m en d om heelgetalle q en r te kry só dat $m = dq + r$, $0 \leq r < d$.

Maar dan is $m = (mx_1 + ny_1)q + r$, sodat $r = m(1 - x_1q) + n(-qy_1)$. Dus is $r \in S$. Maar $0 \leq r < d$ en d is die kleinste positiewe element van S, sodat $r = 0$. Gevolglik is $m = dq$, en dus $d|m$ soos verlang. 'n Soortgelyke argument bevestig $d|n$. Gevolglik is hierdie d, wat met behulp van die welordeningsbeginsel uit die versameling S gekonstrueer is, die grootste gemene deler van m en n. □

In voorbeelde 72 en 73 word die bestaan van 'n objek bewys, maar geen reël in die bewys vertel hoe om die objek in spesifieke gevalle te vind nie.

In voorbeelde 70 en 71 kan met behulp van 'n reël 'n spesifieke objek gevind word. Die verskil tussen voorbeelde 71 en 72 en voorbeelde 70 en 71 is die basis van geskil tussen die verskillende denkskole in die wiskunde wat in hoofstuk 2 bespreek is. Die eksistensiebewyse waar 'n gevraagde objek eksplisiet gevind word, word 'n *konstruktiewe bewys* genoem.

Die intuïsioniste, met Brouwer as grondlegger, glo dat die enigste toelaatbare bewyse vir eksistensie, konstruktiewe bewyse is. In besonder behoort bewyse deur teenstrydigheid en bewyse wat op aksiomas soos die welordeningsbeginsel berus, volgens die intuïsioniste nie as geldige bewyse erken te word nie.

Die formaliste onder leiding van die Duitse wiskundige, Hilbert, se siening het egter groter invloed, en die program wat hulle ontwikkel het, verskaf die raamwerk waarin die meeste van die moderne wiskunde ontwikkel is.

6.14 Samevatting

Die onvermoë om bewyse bevredigend te hanteer, was nog altyd 'n probleem vir leerlinge en studente. Daar kan verskeie redes hiervoor wees. Een van die redes is sekerlik 'n gebrekkige agtergrond in logika.

In hierdie hoofstuk is, teen die agtergrond van logika, sekere bewystegnieke verduidelik. Dit is duidelik dat leerlinge, sowel as studente, in hierdie bewystegnieke effektief onderrig moet word. Die bemeestering van hierdie bewystegnieke verskaf weer die agtergrond van kreatiwiteit. Verder stel dit die leerling en student in staat om bewyse, soos hulle in tydskrifartikels en handboeke verskyn, te verstaan.

HOOFSTUK 7: 'N ELEMENTêRE BENADERING TOT LOGIKA EN BEWYSTEGNIEKE

7.1 Inleiding

Daar is verskeie kere in die loop van hierdie studie konsepte en bewyse geanaliseer om logiese strukture, onderliggende patrone en bewystegnieke teen die agtergrond van die formele logika te beklemtoon. In hierdie hoofstuk gaan eerstens die sillabusse van twee wiskundekurrikula ontleed word om te bepaal tot welke mate die onderskeie sillabusse die formele aspek van wiskunde reflekteer. Daarna sal 'n implementeringsmodel vir logika en bewystegnieke op sekondêre vlak bespreek word.

Die sillabusse wat ontleed sal word, is die tussentydse kernsillabus vir wiskunde, Hoër Graad, grade 10-12, van die Departement van Onderwys, hierna genoem die tussentydse kernsillabus, en die wiskundesillabus van die South African College for Teacher Education (SACTE).

7.2 Ontleding van die tussentydse kernsillabus

In hierdie ontleding sal gefokus word op logiese begrippe en bewystegnieke. Om die verwywings te vergemaklik, is die sillabus as bylaag A bygevoeg. Die voorbeelde wat in hoofstuk 6 verduidelik is, sal as verwysingsraamwerk dien.

7.2.1 Nodige en voldoende voorwaardes

Van die voorbeelde wat in hoofstuk 6 verduidelik is, is die volgende vir die onderskeie grade voorgeskryf:

- Graad 10
  Voorbeelde 14 en 15.

- Graad 11
  Voorbeelde 16, 17, 18, 20, 29, 34, 35, 62 en 65.

- Graad 12

  Voorbeelde 16, 17, 18, 20, 29, 34, 35, 63 en 65.

Opmerking: In voorbeelde 34 en 35 moet die radiaalmaat na grade omgesit word.

7.2.2 Kwantore

Die volgende voorbeelde wat kwantore betrek, en in hoofstuk 6 bespreek is, is vir die onderskeie grade voorgeskryf:

- Graad 10

  Voorbeelde 14 en 15.

- Graad 11

  Voorbeelde 16, 17, 18, 20, 29, 34, 35, 62 en 65.

- Graad 12

  Voorbeelde 16, 17, 18, 20, 29, 34, 35, 63 en 65.

7.2.3 Bewyse deur transitiwiteit

Die beginsel van transitiwiteit kom in die volgende voorbeelde van hoofstuk 6 na vore:

- Graad 10

  Voorbeeld 15.

- Graad 11

  Voorbeelde 16, 17, 18, 20, 29, 34, 35, 62 en 65.

- Graad 12

  Voorbeelde 16, 17, 18, 20, 29, 34, 35 en 65.

7.2.4 Teenvoorbeeld

Alhoewel geen voorgeskrewe probleem in hoofstuk 6 vir Grade 10-12 behandel is nie, word hierdie konsep tog van tyd tot tyd gebruik. (Kyk afdeling 6.6.2 in hierdie verband.)

7.2.5 Direkte bewyse

Hierdie bewystegniek kom bykans in alle bewyse voor wat in grade 10-12 uitgevoer word. In besonder is die volgende voorbeelde van direkte bewystegnieke in die onderskeie grade:

- Graad 10
  Voorbeelde 14 en 15.

- Graad 11
  Voorbeelde 16, 17, 18, 20, 29, 34, 35 en 65.

- Graad 12
  Voorbeelde 16, 17, 18, 20, 29, 34, 35, 63 en 65.

7.2.6 Verbesondering

Die enigste voorbeelde wat in hoofstuk 6 oor verbesondering bespreek is, is die volgende:

- Graad 11
  Voorbeelde 34 en 35.

- Graad 12
  Voorbeelde 34 en 35.

7.2.7 Veralgemening

'n Tipiese voorbeeld oor veralgemening wat in hoofstuk 6 bespreek is, en in die sillabusse van grade 10-12 voorkom, is die afleiding van die kwadratiese formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(Kyk afdeling 6.9.3.2.)

7.2.8 Indirekte bewyse

Indirekte bewysvoering kom heel dikwels in probleme na vore. Voorbeelde hiervan wat in hoofstuk 6 vir die verskillende grade behandel is, is die volgende:

- Graad 11
  Voorbeeld 62.

- Graad 12
  Voorbeeld 63

7.2.9 Eksistensie en eenduidigheid

Voorbeelde wat in hoofstuk 6 oor eksistensie en eenduidigheid bespreek is, is die volgende:

- Graad 11
  Voorbeeld 65.

- Graad 12
  Voorbeeld 65.

7.3 Ontleding van die wiskundesillabusse van SACTE

Die akademiese opleiding geskied oor twee jaar en bestaan uit die kursusse wiskunde I en wiskunde II. Beide die kursusse bestaan uit drie modules, terwyl studente oor elke module 'n twee-uur vraestel skryf.

7.3.1 Nodige en voldoende voorwaardes

Hierdie voorwaardes kom algemeen in al ses die modules voor.

7.3.2 Kwantore

Kwantore, soos in hoofstuk 5 bespreek is, kom algemeen in alle modules van die sillabusse voor.

7.3.3 Die keusemetode

Die keusemetode, soos in afdeling 6.2 bespreek is, is 'n bewystegniek wat nie vreemd in die MATIII module is nie. Voorbeelde van die keusemetode wat in hoofstuk 6 aangebied is, en in die wiskunde I sillabus voorkom, is die volgende:

- MATIII

  Voorbeelde 1-13, 25, 27 en 33.

7.3.4 Bewyse deur transitiwiteit

Bewysvoering deur transitiwiteit, soos bespreek in afdeling 6.6, kom deurgaans in die kursusse van die sillabusse voor. Transitiwiteit speel ook 'n belangrike rol by induksiebewyse (kyk afdeling 6.9) en die Epsilon-Delta bewyse soos dit behandel is in afdeling 6.11.

7.3.5 Teenvoorbeeld

Die gebruik van 'n teenvoorbeeld om 'n bewering te weerlê, soos dit in afdeling 6.6.2 bespreek is, is 'n bewystegniek wat in al die modules gebruik kan word.

7.3.6 Direkte bewyse

Hierdie bewystegniek (kyk afdeling 6.7.1) kom algemeen in die kursusse vir wiskunde I en wiskunde II voor.

7.3.7 Verbesondering

Hierdie bewystegniek (kyk afdeling 6.8.1) word dikwels gebruik as 'n bewystegniek in beide die wiskunde I en II kursusse.

7.3.8 Bewyse deur wiskundige induksie

Hierdie bewystegniek, soos dit in afdeling 6.9 bespreek is, is voorgeskryf in die MAT 112 kursus.

7.3.9 Veralgemening

Veralgemening, soos bespreek in afdeling 6.9.3.2, kom dikwels in die wiskunde I en II kursusse voor.

7.3.10 Epsilon-Delta bewyse

Hierdie streng formele bewyse is in afdeling 6.11 bespreek en word reeds in die wiskunde I kursus behandel.

7.3.11 Indirekte bewyse

'n Indirekte bewystegniek, soos bespreek in afdeling 6.12, word dikwels as bewysvoering in beide die wiskunde I en II kursusse aangebied.

7.3.12 Eksistensie en eenduidigheid

Eksistensie en eenduidigheid is in afdeling 6.13 bespreek, en uit die sillabus is dit duidelik dat van die student verwag word om bevoeg te wees om hierdie tipe probleme te kan hanteer.

7.4 'n Elementêre benadering tot logiese begrippe en bewystegnieke.

Uit afdelings 7.2 en 7.3 is dit duidelik dat die leerling en student vertroud moet wees met logiese begrippe en bewystegnieke. Hulle behoort die betekenis van logika, wiskundige bewyse en aksiomatiese strukture te verstaan. Die implementering van 'n elementêre kursus in logika en bewystegnieke is derhalwe reeds op sekondêre skoolvlak essensieel. Die leerling behoort doelgerig gelei te word om vertroud te raak met toutologiese implikasies en ekwivalensies, wat die basis van wiskundige bewyse vorm.

Alhoewel die klem op formele bewyse op sekondêre vlak nie oorheersend moet wees nie, moet leerlinge tog 'n goeie idee hê oor die betekenis van 'n wiskundige bewys. Die leerling behoort te weet hoe 'n gevolgtrekking uit sekere premisse volg. Daarvoor is 'n basiese onderliggende kennis van sekere logiese begrippe belangrik vir die uitskryf van 'n wiskundige bewys.

In die res van hierdie hoofstuk sal riglyne vir die onderrig van bewystegnieke verskaf word wat geskik behoort te wees vir die implementering in graad 11.

7.5 Bewerings of proposisies

'n *Bewering* of *proposisie* is 'n sin wat óf waar, óf onwaar, maar nie beide waar en onwaar is nie.

Voorbeeld 1

Die volgende sinne is bewerings:

(a) Die maan is vierkantig.
(b) $1 + 6 = 7$
(c) 8 is 'n priemgetal.

Bewerings (a) en (c) is duidelik onwaar, terwyl bewering (b) waar is.

Voorbeeld 2

Die volgende sinne is nie bewerings nie:

(a) Is x groter as y?
(b) Roomys is lekker.
(c) Gaan weg!
(d) $x > 5$.

Sin (d) is belangrik. Dit is nie 'n bewering nie, maar eerder 'n *oop sin* of *predikaat*. Dit is nog waar, nog onwaar, aangesien dit 'n veranderlike bevat. 'n Predikaat is waar of onwaar, afhangende van die objek wat in die plek van x gestel word.

7.6 Saamgestelde bewerings en konnektiewe

Die volgende simbole is voorbeelde van logiese konnektiewe wat bewerings kan kombineer om *saamgestelde bewerings* te vorm:

$\vee$, $\wedge$ en $\Rightarrow$. As dus p en q twee bewerings is, dan sal $p \vee q$, $p \wedge q$ en $p \Rightarrow q$ ook bewerings wees, genoem saamgestelde bewerings. Dit is belangrik om te weet dat die waarheidswaarde, waar (W) of onwaar (V), van 'n saamgestelde bewering, afhang van die waarheidswaardes van die komponente.

Vervolgens word die vyf belangrikste logiese konnektiewe, "en", "of", "nie", "as ... dan" en "as en slegs as" behandel.

7.7 Negering, konjunksie en disjunksie

7.7.1 Definisie

Veronderstel p en q is twee bewerings. Dan word die volgende soos volg gedefinieer:

(a) Die *negering (ontkenning)* van p, aangedui met ~ p, en gelees as "nie p", is waar as p onwaar is.

(b) Die *konjunksie* van p en q, aangedui met p ∧ q, en gelees as "p en q", is waar as p en q beide waar is.

(c) Die *disjunksie* van p en q, aangedui met p ∨ q, en gelees as "p of q", is waar as een van p of q, of beide p en q waar is.

Alhoewel die definisie van "en" ooreenstem met die alledaagse gebruik in die gewone taal, is dieselfde nie waar ten opsigte van "of" nie. Die alledaagse gebruik van of in die gewone taal is "die een of die ander", maar nie beide nie. Die logiese "of" soos gedefinieer in (c), stem ooreen met "en/of" in die alledaagse gebruik van die taal.

7.7.2 Waar- onwaartabelle

Uitdrukkings soos ~ p, p ∧ q en p ∨ q se waarheidswaardes kan maklik met waar-onwaartabelle geïllustreer word. Hierdie tabelle kan ook gesien word as die definisies van "nie", "en" en "of". Die onderskeie waar- onwaartabelle lyk soos volg:

p	~p
W	V
V	W

p	q	p ∧ q
W	W	W
W	V	V
V	W	V
V	V	V

p	q	p ∨ q
W	W	W
W	V	W
V	W	W
V	V	V

Voorbeeld 3

Bepaal of die volgende bewering waar of onwaar is: $x^2 \geq 0$ en $\sin x = 2$.

Oplossing

Stel p is die bewering "$x^2 \geq 0$", en q is die bewering "$\sin x = 2$".
Dan lyk die bewering in simbole soos volg: $p \wedge q$.
Maar p is waar, terwyl q onwaar is. Dus volg uit die waar- onwaartabel dat $p \wedge q$ onwaar is.

7.8 Toutologie, ekwivalensie, die voorwaardelike en bivoorwaardelike

Saamgestelde bewerings wat altyd waar of altyd onwaar is, is besonder belangrik.

7.8.1 Definisie

'n Saamgestelde bewering wat altyd waar is vir alle moontlike waarheidswaardes van die komponente, word 'n *toutologie* genoem.

'n Saamgestelde bewering wat onwaar is vir alle moontlike waarheidswaardes van die komponente, word 'n *teenstrydigheid* genoem.

Voorbeeld 4

Toon aan dat $p \vee \sim p$ en $p \wedge \sim p$ onderskeidelik 'n toutologie en 'n teenstrydigheid is.

Oplossing

Die oplossing word met waar- onwaartabelle bevestig. Vir kompaktheid sal 'n enkele tabel gekonstrueer word.

p	~ p	p ∧ ~ p	p ∨ ~ p
W	V	V	W
V	W	V	W

Die bewering p ∧ ~ p is altyd onwaar, terwyl die bewering p ∨ ~ p altyd waar is. Dit is belangrik om te weet dat 'n teenstrydigheid altyd uit 'n toutologie gekonstrueer kan word, en omgekeerd.

7.8.2 Definisie

Twee saamgestelde bewerings wat altyd dieselfde waarheidswaardes het, word *logies ekwivalent* genoem.

Voorbeeld 5

Toon aan, deur 'n waar- onwaartabel te gebruik, dat ~ (p ∨ q) en ~ p ∧ ~ q, logies ekwivalent is.

p	q	p ∨ q	~ p	~ q	~ p ∧ ~ q	~ (p ∨ q)
W	W	W	V	V	V	V
W	V	W	V	W	V	V
V	W	W	W	V	V	V
V	V	V	W	W	W	W

Die voordeel van logiese ekwivalensies is dat dit soms makliker in wiskunde is om die ekwivalente bewering van 'n gegewe bewering te bewys.

7.8.3 Die voorwaardelike en bivoorwaardelike

Die meeste stellings in wiskunde het die "as ... dan" of "as en slegs as" vorm, terwyl alle definisies 'n "as en slegs as" formulering het.

7.8.3.1 Definisie

Veronderstel p en q is twee bewerings.

(a) Die bewering *p impliseer q*, aangedui met $p \Rightarrow q$, en gelees as "as p dan q", is waar, behalwe in die geval waar p waar en q onwaar is.

Só 'n bewering word 'n voorwaardelike bewering genoem. Die komponente p en q word onderskeidelik die *premis* en *gevolgtrekking* genoem.

(b) Die bewering *p as en slegs as q*, aangedui met $p \Leftrightarrow q$, is waar vir die gevalle waar beide p en q waar, of beide p en q onwaar is. Só 'n bewering word 'n bivoorwaardelike bewering genoem.

Die waar- onwaartabelle vir hierdie twee konnektiewe lyk soos volg:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
W	W	W	W
W	V	V	V
V	W	W	V
V	V	W	W

Voorbeeld 6

(i) As 2 + 2 = 4, dan is 5 nie 'n priemgetal nie.

(ii) 3 is 'n onewe getal as en slegs as 4 'n ewe getal is.

(iii) As n 'n onewe getal is, dan is n + 1 'n ewe getal.

(iv) $x^2 - 5x + 6 = 0$ as en slegs as x = 2 of x = 3.
Let op dat die laaste twee gevalle oop sinne betrek.

7.9 Stellings

Vervolgens sal belangrike ekwivalensies bestudeer word. Beskou die volgende waar-onwaartabel:

p	q	~p	~q	p ⇒ q	q ⇒ p	~p ⇒ ~q	~q ⇒ ~p
W	W	V	V	W	W	W	W
W	V	V	W	V	W	W	V
V	W	W	V	W	V	V	W
V	V	W	W	W	W	W	W

Uit die tabel volg dat p ⇒ q en ~q ⇒ ~p logies ekwivalent is. So ook is q ⇒ p en ~p ⇒ ~q logies ekwivalent.

7.9.1 Definisie

As p ⇒ q 'n voorwaardelike bewering is, dan word die ooreenstemmende bewering ~q ⇒ ~p die *kontrapositiewe* van p ⇒ q genoem, terwyl q ⇒ p die *omgekeerde*, en ~p ⇒ ~q die *inverse* van p ⇒ q genoem word.

Die kontrapositiewe ~q ⇒ ~p is altyd ekwivalent aan die voorwaardelike bewering p ⇒ q. Daarenteen is die omgekeerde en die inverse van p ⇒ q, nie ekwivalent aan p ⇒ q nie. Nietemin is die omgekeerde en die inverse ekwivalent aan mekaar.

Voorbeeld 7

Dit kan maklik met waar- onwaartabelle aangetoon word dat p ⇔ q ekwivalent is aan (p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p), en dat p ⇒ (q ∨ r) ekwivalent is aan (p ∧ ~q) ⇒ r.

7.10 Nodige en voldoende voorwaardes

As p ⇒ q waar is, beteken dit nie noodwendig dat die omgekeerde q ⇒ p ook waar is nie.

Voorbeeld 8

p : n is 'n veelvoud van 6.
q : n is 'n veelvoud van 3.

Dit is duidelik dat $p \Rightarrow q$, want enige veelvoud van 6 het 3 as 'n faktor, en is dus 'n veelvoud van 3. Maar $q \Rightarrow p$ is nie waar nie, want 9 is 'n veelvoud van 3, maar is nie 'n veelvoud van 6 nie.

Tog is daar talle voorbeelde in wiskunde só dat $p \Rightarrow q$ en $q \Rightarrow p$. Dit beteken dat die bewering $p \Rightarrow q$ en sy omgekeerde $q \Rightarrow p$ beide waar is. In so 'n geval word geskryf $p \Leftrightarrow q$.

Voorbeeld 9

p : n is 'n ewe heelgetal.
q : $(n + 1)$ is 'n onewe heelgetal.
$p \Rightarrow q$, want as n ewe is, dan is $n + 1$ onewe.
$q \Rightarrow p$, want as $n + 1$ onewe is, dan is n ewe.
Dus $p \Leftrightarrow q$.

Voorbeeld 10

(In ΔABC, $AB = AC$) $\Leftrightarrow$ (In ΔABC, $\hat{B} = \hat{C}$). Dit is die stelling oor gelykbenige driehoeke.

Stelling

As twee sye van 'n driehoek gelyk is, dan is die hoeke teenoor die gelyke sye gelyk.

Omgekeerd

As twee hoeke van 'n driehoek gelyk is, dan is die sye teenoor die gelyke hoeke gelyk. Beide die stelling en sy omgekeerde is waar, en dus word die simbool $\Leftrightarrow$ gebruik.

As $p \Leftrightarrow q$, word gesê:

"p is waar as en slegs as q waar is", of
"p as en slegs as q", of selfs
"p ass q", of
"p is nodig en voldoende vir q".

Die volgende konvensie sal aanvaar word:

$p \Rightarrow q \Rightarrow r$ sal beteken $p \Rightarrow q$ en $q \Rightarrow r$.

Soortgelyke konvensies sal geld vir $p \Leftarrow q \Leftarrow r$ en $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$.

7.11 Opsomming

- $p \Rightarrow q$ beteken "as p, dan q".
- $p \Leftrightarrow q$ beteken "p as en slegs as q".
- $\sim p$ beteken "nie p".
- $q \Rightarrow p$ is die omgekeerde van $p \Rightarrow q$.
- $\sim q \Rightarrow \sim p$ is ekwivalent aan $p \Rightarrow q$.
- $\sim p \Rightarrow \sim q$ is die inverse van $p \Rightarrow q$.
- $q \Rightarrow p$ is ekwivalent aan $\sim p \Rightarrow \sim q$.

Die gebruik van hierdie simbole word met die volgende voorbeelde geïllustreer:

Voorbeeld 11

Veronderstel $x, y \in N$.

(i) (Die produk xy is onewe) $\Leftrightarrow$ (x is onewe en y is onewe), óf (die produk xy is onewe ass x onewe en y onewe is), óf (vir die produk xy om onewe te wees, is nodige en voldoende voorwaardes dat x onewe en y onewe is).

Dit kan ook uitgedruk word deur 'n bewering en sy omgekeerde, waarvan beide waar is.

Bewering: As die produk xy onewe is, dan is beide x en y onewe.
Omgekeerde: As beide x en y onewe is, dan is die produk xy onewe.

Dit kan ook soos volg gestel word:

Bewering: x en y beide onewe is 'n nodige voorwaarde vir xy om onewe te wees.
Omgekeerde: x en y beide onewe is 'n voldoende voorwaarde vir xy om onewe te wees.

(ii) (x en y beide ewe) ⇒ (die produk xy is ewe).

Bewering: As x en y beide ewe is, dan is die produk xy ewe.

Anders gestel: x en y beide ewe is 'n *voldoende voorwaarde* vir xy om ewe te wees.

Die omgekeerde van hierdie bewering is onwaar. 'n Teenvoorbeeld met x = 2 en y = 3 kan gebruik word om dit te bevestig. Dit is nie *nodig* vir beide x en y om ewe te wees om te verseker dat xy ewe sal wees nie.

(iii) (Die produk xy is ewe) ⇔ (ten minste een van x of y is ewe).

Anders gestel: Die produk xy is ewe ass ten minste een van x en y ewe is, óf vir xy om ewe te wees, is 'n nodige en voldoende voorwaarde dat ten minste een van x en y ewe moet wees.

Implikasie ⇒ en ekwivalensie ⇔ se betekenis en gebruik word in die volgende twee voorbeelde geïllustreer.

Voorbeeld 12

Los op vir x as $\sqrt{3x + 13} = x + 1$.

Oplossing

$$\sqrt{3x + 13} = x + 1.$$

$\Rightarrow 3x + 13 = (x + 1)^2$

$\Leftrightarrow 3x + 13 = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 4 = 0$ óf $x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$ óf $x = -3$.

Voorbeeld 13

$x = 4 \Rightarrow x^2 = 16$, maar
$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ óf $x = -4$.

7.12 Kwantore

Die meeste definisies en stellings in wiskunde betrek terme soos "vir alle" en "daar bestaan", tesame met die konnektiewe "en", "of" en "as ... dan".

In besonder word hier verwys na "oop sinne".

Voorbeeld 14

(i) $(x - y)^2 > 0$ *vir alle* $x, y \in R$.

(ii) 2k is 'n ewe getal *vir alle* $k \in N$.

(iii) Bewys dat die wortels van $(a - 2)x^2 + (a - 3)x - 5 = 0$ reëel is *vir alle* reële waardes van a.

(iv) *Elke* vierkant is 'n reghoek.

(v) *Daar bestaan* 'n waarde van x só dat $x^2 = 4$.

Die eerste vier voorbeelde betrek die *universele kwantor* "vir alle" of "elke", aangedui met die simbool $\forall$. In voorbeeld (v) word die *eksistensiële kwantor* gebruik om die "bestaan" van 'n element te beskryf. Laasgenoemde kwantor word met die simbool $\exists$ aangedui.

In simbole lyk voorbeeld 14 soos volg:

Voorbeeld 15

(i) $(x - y)^2 \geq 0 \; \forall \; x, y \in R$.

(ii) 2k is 'n ewe getal $\forall \; k \in N$.

(iii) Bewys dat die wortels van $(a - 2)\, x^2 + (a - 3)\, x - 5 = 0$ reëel is $\forall \; a \in R$.

(iv) Stel U is die versameling van alle vierhoeke in die vlak. Dan volg dat $\forall x \; (p(x) \Rightarrow q(x))$, waar p(x) beteken "x is 'n vierkant" en q(x) beteken "x is 'n reghoek".

7.13 Samevatting

Die onvermoë van studente om wiskundige aktiwiteite te bemeester, kan fundamenteel toegeskryf word aan hoofsaaklik twee redes. Die eerste moontlike rede is 'n gebrek aan basiese logiese begrippe om in 'n objektaal te kan kommunikeer. 'n Tweede moontlike rede is die feit dat die leerlinge onbewus is van die onderskeie bewystegnieke wat bestaan om besondere stellings te bewys.

As die leerlinge eers die bewystegnieke verstaan, sal dit moontlik wees om stappe in sekere bewyse te verduidelik. Leerlinge kan dan aktief betrek word om sekere bewystegnieke te kies vir die toepassing van 'n bewys.

In die res van hierdie hoofstuk sal bewyse en bewystegnieke bestudeer word wat geskik behoort te wees vir leerlinge in grade 11 en 12.

7.14 Die betekenis van 'n bewys

Wiskundige aktiwiteite is hoofsaaklik gemoeid met bewyse. 'n Wiskundige bewys berus fundamenteel op logiese argumente. Dit beteken dat uit 'n hipotese "p is waar", 'n gevolgtrekking "q is waar" afgelei word.

7.14.1 **Direkte bewyse** (Bewyse deur deduksie)

'n Ketting van implikasies $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ word hier gebruik om die gevolgtrekking q uit p af te lei. As die omgekeerde implikasies $p \Leftarrow p_1 \Leftarrow p_2 \Leftarrow \ldots \Leftarrow q$ geldig is, dan geld die omgekeerde bewering ook. In so 'n geval kan die implikasies eenvoudig gekombineer word deur te skryf:

$p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow q.$

Die volgende is voorbeelde van direkte bewystegnieke:

Voorbeeld 16

Bepaal die waardes van x waarvoor $\frac{x^2 - 3}{x} > 2.$

Oplossing

$$\frac{x^2 - 3}{x} > 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3}{x} - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3 - 2x}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 3)(x + 1)}{x} > 0$$

$\Leftrightarrow -1 < x < 0$ óf $x > 3$.

Voorbeeld 17

Bepaal die waardes van x wat die volgende vergelyking bevredig:

$3 - 3\cos x = 2\sin^2 x,\ 0° < x < 360°$.

Oplossing

$3 - 3\cos x = 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 3 - 3\cos x = 2(1 - \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 3 - 3\cos x = 2 - 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0$ óf $\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0{,}5$ óf $\cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = 60°$ óf $x = 360° - 60°$

$= 300°$

7.14.2 Die teenvoorbeeld

Om te bewys dat 'n bewering onwaar is, is gewoonlik makliker as om te bewys dat 'n bewering altyd waar is. Al wat nodig is om te bewys dat 'n bewering onwaar is, is om slegs een geval te demonstreer waarvoor die bewering onwaar is. Hierdie tegniek staan bekend as die gebruik van 'n *teenvoorbeeld*.

Voorbeeld 18

Gee 'n teenvoorbeeld om aan te toon dat die volgende bewerings onwaar is:

(a) $(x^2 = y^2) \Rightarrow x = y$.

(b) $(a - b > 0) \Rightarrow (a^2 - b^2 > 0)$.

(c) Alle onewe getalle is priemgetalle.

Oplossing

(a) $x = 3$ en $y = -3$ bevredig $x^2 = y^2$, maar nie $x = y$ nie.
Die bewering is dus onwaar.

(b) As $a = 1$ en $b = -2$, dan is $a - b > 0$, maar $a^2 - b^2 < 0$.
Die bewering is dus onwaar.

(c) 9 is 'n onewe getal, maar is nie 'n priemgetal nie.

7.14.3 Bewys deur uitputting

Hierdie tegniek kom nie dikwels na vore nie, en is beperk tot gevalle waar daar slegs 'n eindige aantal moontlikhede is wat ondersoek kan word.

Voorbeeld 19

Bewys dat daar geen heeltallige waardes is wat die vergelyking $x^2 + y^2 = 7$ sal bevredig nie.

Oplossing

As x = 1 en y = 1, dan is $x^2 + y^2 = 2$.

As x = 1 en y = 2, dan is $x^2 + y^2 = 5$.

As x = 1 en y = 3, dan is $x^2 + y^2 > 7$.

As x = 2 en y = 1, dan is $x^2 + y^2 = 5$.

As x = 2 en y = 2, dan is $x^2 + y^2 > 7$.

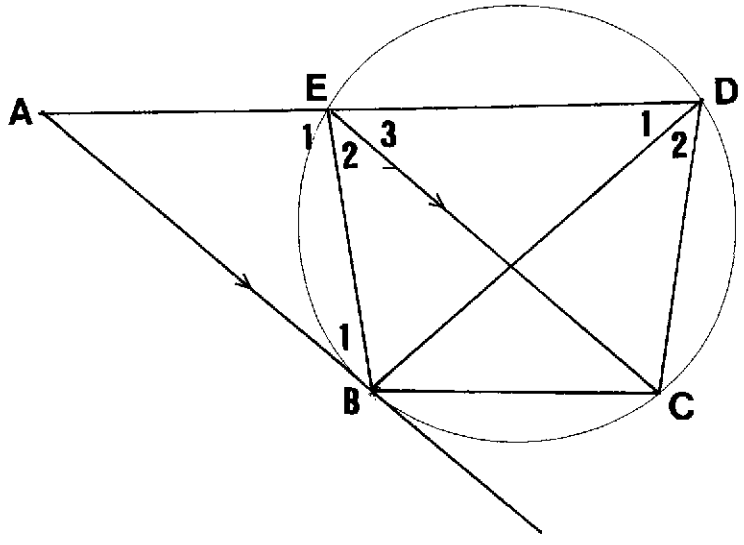
As x = 3 en y = 1, dan is $x^2 + y^2 > 7$. Dus is alle moontlikhede uitgeput.

Dit is duidelik dat dit nie nodig is om negatiewe getalle te beskou nie. Dit is ook duidelik dat tyd gespaar kan word as gevolg van die feit dat $x^2 + y^2 = 7$ simmetries met betrekking tot x en y is, en derhalwe hoef slegs gevalle waar $y \geq x$ ondersoek te word.

7.14.4 Bewyse deur transitiwiteit

Hierdie bewystegniek is die mees algemeenste van die bewystegnieke.

Voorbeeld 20



In die figuur is AB 'n raaklyn aan die sirkel en EC $\|$ AB. Bewys dat $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$

Bewys $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$ (Hoek tussen die raaklyn en die koord)

$= \hat{E}_2$ (Verwisselende hoeke, EC $\|$ AB)

$= \hat{D}_2$ (Omtrekshoeke in dieselfde sirkelsegment).

Die meeste van die meetkundeprobleme in graad 11 – 12 kan met hierdie tegniek bewys word.

Voorbeeld 21

Bewys die volgende identiteit:

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \text{ cosec } x.$$

Bewys

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{1 + 2\cos x + 1}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{2 + 2\cos x}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{2(1 + \cos x)}{\sin x\,(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{2}{\sin x}$$

$$= 2 \text{ cosec } x.$$

7.14.5 Bewyse deur teenstydigheid

Hierdie is 'n kragtige bewystegniek wat heel dikwels gebruik word. In baie gevalle is dit moontlik om die resultaat $p \Rightarrow q$ te bewys deur (p en ~ q) te veronderstel. 'n Teenstrydigheid word verkry, waaruit volg dat die veronderstelling (p en ~ q) onmoontlik is. Dus moet die hipotese p vir q impliseer.

Voorbeeld 22

Bewys deur 'n teenstrydigheid dat as n 'n heelgetal is só dat n^2 onewe is, dan is n 'n onewe heelgetal.

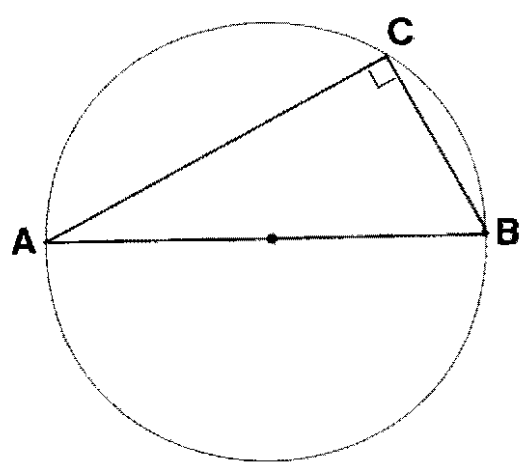
Bewys

Veronderstel dat n ewe en n^2 onewe is. Dan bestaan daar 'n heelgetal k só dat $n = 2k$. Dus is $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Gevolglik is n^2 'n ewe heelgetal, wat teenstrydig met die veronderstelling is. Dus is n 'n onewe heelgetal.

Voorbeeld 23

Bewys deur 'n teenstrydigheid dat geen koord van 'n sirkel langer as 'n middellyn is nie.

Bewys



Veronderstel daar bestaan 'n koord, sê AC, van 'n sirkel wat langer as 'n middellyn is. Trek 'n middellyn AB van die sirkel. Trek vervolgens BC. Nou volg dat $\hat{C} = 90°$. Dus is AB die skuinssy van 'n reghoekige driehoek ABC. Gevolglik is AB langer as AC. Dit is teenstrydig met die veronderstelling. Dus bestaan daar nie 'n koord van 'n sirkel wat langer as 'n middellyn is nie.

Hierdie bewystegniek word onder andere gebruik om die volgende meetkundestellings in graad 11 te bewys:

- As 'n lynstuk wat twee punte A en B verbind, gelyke hoeke by twee punte C en D onderspan, met C en D aan dieselfde kant van AB, dan lê die vier punte op die omtrek van dieselfde sirkel.

- As een paar teenoorstaande hoeke van 'n vierhoek supplementêr is, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek. (Kyk hoofstuk 6, voorbeeld 62).

- As 'n lyn deur die endpunt van 'n koord van 'n sirkel getrek word só dat die hoek tussen die lyn en die koord gelyk aan die omtrekshoek in die teenoorstaande sirkelsegment is, dan is die lyn 'n raaklyn aan die sirkel.

7.15 Samevatting

In hierdie hoofstuk is die tussentydse kernsillabus vir wiskunde, Hoër Graad, grade 10−12, van die Departement van Onderwys, en die wiskundesillabus van die South African College for Teacher Education gebruik om te illustreer tot welke mate die formele aspek van wiskunde gereflekteer word. Hieruit was dit duidelik dat die leerling en student deeglik vertroud moet wees met logiese begrippe en bewystegnieke om wiskundige aktiwiteite te beoefen. In afdelings 7.4 −7.14 is 'n elementêre kursus in logika en bewystegnieke gekonstrueer wat geskik behoort te wees vir implementering op graad 11 vlak. Die bewystegnieke wat bespreek is, is by verre nie die enigstes nie. Die leerling sal sonder twyfel ook met ander tegnieke in sy sekondêre opleiding kennis maak, soos byvoorbeeld in gevalle van *verbesondering*.

Nogtans behoort die voorgestelde kursus die leerling voor te berei om wiskundige bewyse met selfvertroue aan te pak. Hierdie vertroue sal versterk word met die aanvul van verskeie oefeninge om die verskillende tegnieke te bemeester.

HOOFSTUK 8: SAMEVATTING, GEVOLGTREKKINGS EN AANBEVELINGS

8.1 Samevatting

Die doel met hierdie studie was om bewyse in wiskunde uit die eersteordepredikaatlogika te formaliseer. Hierdie teoretiese studie was daarop gerig om te bepaal tot welke mate die huidige tussentydse kernsillabus vir wiskunde, Hoër Graad, van die Departement van Onderwys, leerlinge op skool in die logika toerus om vereiste bewystegnieke te gebruik. Die studie het ook ten doel gehad om te bepaal of die opleiding van onderwysstudente in wiskunde aan SACTE, voldoende is om formele bewyse bevredigend te kan hanteer.

In hoofstuk 2 is die invloed van die verskillende denkskole op bewystegnieke in oënskou geneem. Hierdie sterk historiese studie was nodig vir 'n fundamentele ondersoek van wiskundige idees. 'n Werklike begrip hiervan is nie moontlik sonder 'n grondige ondersoek van die oorsprong nie. In hierdie hoofstuk is die ontwikkeling van die basiese konsepte geskets. Die betekenis van wiskunde en wiskundige skepping is hier uitgelig. In hierdie hoofstuk is ook aandag geskenk aan die rol van die aksiomatiese stelsel. Dit is nie bekend waar en wanneer die aksiomatiese metode ontstaan het nie. Euklides se *Elemente* is die eerste werklike voorbeeld van 'n aksiomatiese stelsel wat sinvol veralgemeen is tot 'n meer abstrakte vorm. Hierdie stelsel staan bekend as 'n formele aksiomatiese stelsel. Die vyfde postulaat van Euklides se *Elemente* word deur sommige navorsers as waarskynlik die beroemdste enkele uitspraak in die geskiedenis van wiskunde beskou. Hierdie postulaat het 'n belangrike rol gespeel tot die stimulus vir die ontwikkeling van 'n groot deel van die moderne wiskunde.

Die "krisis" in die grondslae van die wiskunde wat aan die einde van die negentiende eeu ontstaan het, is nog nie bevredigend opgelos nie. Die drie prinsipiële filosofieë van wiskunde, te wete die logisistiese skool, met Russell en Whitehead as die belangrikste eksponente, die intuïsionistiese skool, met Brouwer en Heyting as die voorlopers, en die formalistiese skool met Hilbert as grondlegger, het elkeen sy aanhangers. Uit hierdie skole het ander filosofiese idees ontwikkel, terwyl daar ook sommige onafhanklike

filosofieë ontstaan het. Gödel het met onweerlegbare metodes aangetoon dat die drie prinsipiële denkskole nie een 'n voldoende geformaliseerde deduktiewe konsistente stelsel ontwikkel het nie. Nogtans stem al drie hierdie denkskole ooreen dat 'n bewys binne 'n bepaalde verwysingsraamwerk moet geskied, alhoewel hulle nie dieselfde verwysingsraamwerk deel nie.

In hoofstuk 3 is bewys as 'n wiskundige aktiwiteit beskou. Daar is algemene konsensus tussen wiskundiges dat 'n bewys in enige wiskundige stelsel, 'n soort skema sal hê. Die aksiomatiese metode het 'n betekenisvolle bydrae gelewer tot die ontwikkeling van wiskunde, alhoewel hierdie metode nie sal help om 'n bewys vir 'n stelling te kry nie. Formele logika speel nie 'n groot rol in die vind van 'n bewys nie. In hierdie hoofstuk is ook faktore bespreek wat 'n bewys in die wiskundige gemeenskap aanvaarbaar maak.

Terwyl huidiglik wiskundiges nog steeds verskil oor die kriteria van geldige bewyse, is daar min wat die skep van 'n formele bewys as die sentrale kern van wiskundige praktyk sien. Daar is, soos gesien is, goeie rede hiervoor, afgesien van die "krisis" in die wiskunde.

Belangrike wiskundige idees word deur 'n daad van skepping ontdek waarin formele logika nie betrokke is nie. Dit word nie afgelei nie, maar ontwikkel deur 'n proses waarin betekenis vir die bestaande wiskundige liggaam herken word deur informele intuïsie. Terwyl 'n bewys as noodsaaklik vir 'n stelling beskou word, hoef dit nóg streng, nóg volledig te wees. Die ondersoeking van 'n bewys is baie belangriker as formele bevestiging. Aangesien 'n streng deduktiewe ketting vir bewyse in meeste gevalle onprakties is, en kontrole moeilik raak as bewyse te lank word, is bewyse konvensioneel kort. Baie word aan die leser se oordeel oorgelaat. Betekenisvolle stellings is al sonder formele bewyse aanvaar, terwyl foute in formele bewyse algemeen is. Waar 'n gedagte min aftrek kry, gaan foute dikwels ongemerk deur. Waar 'n fout in 'n belangrike stelling se bewys uitgewys word, is dit dikwels die bewys wat verander word, terwyl die stelling onveranderd bly.

Tog, ten spyte van die sekondêre aard van 'n bewys, is dit maklik om te sien hoe wanopvattings oor die aard van wiskunde na vore kom. Wiskundige resultate word deurgaans in die vorm van stellings en bewyse verskaf. Hulle behou hierdie vorms, en

reflekteer die aard van wiskunde as 'n hoogs gestruktureerde liggaam van kennis wat bymekaar gehou word deur die begrip van logiese voorkeur.

Om 'n student in bewystegnieke te onderrig word veronderstel die onderrig van die grondslae van bewyse. So 'n klem ignoreer die kritieke element. As 'n wiskundige 'n bewys lees, dan is dit nie die deduktiewe skema wat die meeste aandag vereis nie. Dit is inderdaad die wiskundige idees, waar die verwantskappe deur die bewys op 'n nuwe wyse opgehelder word. Dit is die intuïtiewe oorbrugging van die gapings in logika wat die essensiële komponent van die begrip is.

Rekenaarondersteunde bewyse kom hedendaags al sterker op die voorgrond en word geredelik deur die wiskundige gemeenskap aanvaar. Met die implementering van die rekenaar in bewysvoering, het die vraag oor beslisbaarheid nuwe betekenis gekry. Om die probleem van lang bewyse te oorkom, het waarskynlikheidsbewyse resultate met 'n sekere graad van betroubaarheid opgelewer. Hierdie benadering tot bewyse is dieselfde as die erkenning dat wiskunde sekere aspekte met die empiriese wetenskappe deel.

In hoofstuk 4 is die probleme oor die "krisis" in die wiskunde waarna in hoofstuk 2 verwys is, aangespreek. Om seker te maak dat steeds aanvaarbare wiskunde beoefen word, moet die argumente geformaliseer word. Om 'n teorie te formaliseer, is dit nodig om te let op die gebrek aan beheer in die ontwikkeling van taal, waar woorde meer as een betekenis het. Wanneer oor wiskunde gepraat word, moet die interpretasie van elke uitdrukking eenduidig wees. Dit is slegs moontlik indien 'n kunsmatige taal gebruik word. 'n Tweede gebrek wat uitgeskakel moet word, is die moontlikheid van foutiewe redenering. Om hierdie foute te voorkom, moet uitdruklik gemeld word volgens watter logiese wette geredeneer moet word. Daar moet ook besluit word presies wat beskou sal word as "'n bewys". Die logiese wette word, net soos ander wetenskaplike wette, gevorm deur abstrahering vanuit die werklikheid. Gevolglik kan hulle nie as volmaak beskou word nie, en dit is waarskynlik dat hulle altyd verbeter sal kan word. Daar is dus 'n mate van vryheid wat die keuse van wette betref.

Nog 'n verskynsel wat vermy moet word, is dat dieselfde argument totaal verskillende gevolgtrekkings het. Die proposisielogika is 'n kunsmatige taal wat daardie deel van die

logika formaliseer waar die geldigheid van 'n argument slegs afhang van die wyse waarop die sinne met mekaar verbind is, en nie hulle interne struktuur nie. Die geldigheid van die redenasies is slegs van die logiese konnektiewe "en" asook "of" afhanklik, en nie van die interne struktuur van die proposisies nie. Logika was tradisioneel die kuns van sillogismes. Sillogistiese logika word gebruik om deduktiewe redenering van probleme te bestudeer. Die gebruik van waar-onwaartabelle word ingespan om abstrakte sintaktiese kombinasies van proposisies te vergelyk, asook onderlinge verwantskappe tussen spesiale proposisies te ondersoek.

Die proposisielogika is egter nie ryk genoeg om die wiskunde te akkommodeer nie. Die sinne en konnektiewe alleen is nie voldoende om uitdrukkings wat kwantore en predikate bevat, in te sluit nie.

In hoofstuk 5 word die tekortkominge van die proposisielogika aangespreek met die uitbreiding na die eersteordepredikaatlogika. Binne die konteks van hierdie kunsmatige taal kan wiskundige teorieë geformaliseer word. Hierdie kunsmatige taal is ontwikkel sodat die semantiese en sintaktiese idees van waarheid onder andere lei tot ekwivalente resultate, en hierdie eienskap word die adekwaatheid van die kunsmatige taal genoem. Die eienskappe van eersteordeteorieë is ook uitgewys. Sodanige teorieë is altyd aksiomaties, beslisbaar, onafhanklik en volledig.

Die rasionaal van die logika is om die onderwerpe en metodes van moderne wiskunde te reflekteer. 'n Ander aspek van hierdie rasionaal, is die besondere siening van wiskunde wat deur die teoretici gehuldig word. 'n Wiskundige stelsel ontstaan as gevolg van die wisselwerking tussen twee faktore, 'n versameling van postulate en 'n logika. Die versameling postulate vorm die basis van die stelsel, en die logika vorm die reëls waarvolgens 'n liggaam van stellings ontstaan. Die wiskundige teorie of stelsel, bestaan uit die totaliteit van bewerings wat saamgestel is uit beide die postulate en die stellings.

In hoofstukke 4 en 5 is die logika wat nodig is om stellings uit 'n postulate basis af te lei, bestudeer. Dit is feitlik 'n onmoontlike taak om 'n gewone taal te gebruik om logika te bestudeer. 'n Simboliese taal is nodig vir 'n wetenskaplike benadering tot die

vak. As gevolg van die simbole, staan só 'n benadering bekend as 'n simboliese of wiskundige logika. In 'n simboliese logika word die relasies tussen die verskillende proposisies, klasse, ensovoorts, voorgestel deur formules waarvan die betekenis ondubbelsinnig is. Wat betref kompaktheid en begrip, het die simboliese logika 'n groot voordeel bo 'n gewone taal.

In hoofstuk 6 is die verskillende bewystegnieke wat in hoofstukke 4 en 5 ontwikkel is, aangewend om stellings op 'n formele wyse te bewys. Die verskillende tegnieke wat in bykans alle bewyse gebruik word, word hier geïdentifiseer, gekategoriseer en op 'n redelik eenvoudige wyse verduidelik. Dit is bykans onmoontlik om wiskundige aktiwiteite te beoefen sonder 'n kennis van die verskillende bewystegnieke. Hierdie hoofstuk wys op die verskillende wiskundige denkprosesse, en het onderliggend ook ten doel om kreatiewe denke te illustreer. Ten einde meer informele voorstellings van bewyse te verstaan, moet die student en leerling in staat wees om die formele struktuur van 'n bewys te analiseer en te verstaan.

In hoofstuk 7 is twee wiskundesillabusse ontleed ten opsigte van logiese begrippe en bewystegnieke. Die eerste hiervan is die tussentydse kernsillabus vir wiskunde, Hoër Graad, grade 10–12, van die Departement van Onderwys. Die tweede een is die wiskundesillabus van SACTE, 'n nasionale onderwysersopleidingsinstansie. Die doel van hierdie ontleding is om die rol van die logika in bewysvoering te reflekteer. 'n Konsep kursus in logika en bewystegnieke word ook in hierdie hoofstuk behandel wat leerlinge op sekondêre vlak die nodige agtergrond in logika en bewyse sal gee. Hierdie elementêre logiese beginsels is onderliggend tot wiskundige bewyse, en behoort die leerling 'n beter begrip oor die betekenis van logika, bewyse en wiskundige stelsels te gee.

8.2 Gevolgtrekkings

Uit hierdie studie is dit duidelik dat leerlinge op skool, asook die onderwysstudent in wiskunde, onvermydelik in aanraking kom met hipotetiese argumente soos byvoorbeeld die volgende:

"*As* 'n driehoek reghoekig is, *dan* is die som van die vierkante op die reghoeksye gelyk aan die vierkant op die skuinssy." Die leerling en student leer ook van stellings en hulle omgekeerdes. Nodige en voldoende voorwaardes kan ook in verband gebring word met stellings en hulle omgekeerdes.

Die leerling, sowel as die student maak ook van indirekte bewysvoering gebruik. In hierdie verband word gedink aan die kontrapositiewe bewystegniek. Ook kom die leerling en student in aanraking met bewyse uit die ongerymde, terwyl studente ook met volledige induksie kennis maak.

Beide die leerling en student is egter glad nie vertroud met logiese argumente nie. Daar word naamlik weinig in die sillabusse oor bewysvoering en logiese argumente genoem. Sonder 'n voldoende agtergrond, is dit nie vir die leerling of student moontlik om 'n volledige begrip oor bewysvoering te hê nie. Beide ontwikkel dus 'n gebrekkige insig oor wat wiskunde presies behels.

Die sleutel tot die begrip van nuwe konsepte of stellings is die vermoë om te onderskei tussen patrone en konneksies, die vermoë om voorafgaande stellings te gebruik en nuwes te ontwikkel. Dit is wiskundige insig. Dit is die produk tussen kreatiwiteit aan die een kant en wiskundige kennis aan die ander kant. Met 'n gebrekkige kennis van logika, word leerling en student slegs manipuleerders van wiskundige simbole.

8.3 Aanbevelings

- Op grond van hierdie studie word aanbeveel dat die samestellers van die tussentydse kernsillabus vir wiskunde, grade 10–12, Hoër Graad, van die Departement van Onderwys, die leemtes daarin onverwyld sal aanspreek. In hierdie verband word verwys na bewysvoering ten opsigte van die kontrapositief, ongerymdheid, nodige en voldoende voorwaardes, en ander logiese begrippe. Dit word aanbeveel dat daar dringend aandag gegee sal word aan die invoer van logika om hierdie probleem te oorkom. Die voorgestelde kursus oor elementêre logika en bewystegnieke wat in hoofstuk 7 behandel is, behoort geskik te wees vir implementering op graad 11 vlak.

- Aangesien die akademiese opleiding van wiskundeonderwysers streng formele wiskunde behels, en die onderwysstudent deurgaans met strenge bewysvoering gekonfronteer word, word aanbeveel dat die wiskundesillabus van onderwysers-opleidingsinstansies soos SACTE 'n verpligte module oor formele logika sal insluit. Dit sal ongetwyfeld die voornemende wiskundeonderwyser 'n breër begrip en dieper insig in wiskunde gee.

  Sodoende sal bekwamer wiskundeonderwysers aan die praktyk gelewer word wat tot voordeel van die onderwys in die algemeen, en wiskundeonderrig in die besonder sal wees.

8.4 Verdere navorsing en ontwikkeling

Uit hierdie studie volg dat verdere navorsing en ontwikkeling noodsaaklik is om die volgende probleme aan te spreek:

- Die gebruik van klein aksiomatiese stelsels in die onderrig van wiskunde.

Aangesien hierdie studie uitgewys het dat die onderrig van logika aan onderwysstudente in wiskunde by SACTE gebrekkig en ontoereikend is, is dit noodsaaklik om hierdie leemte dringend aan te spreek.

Die gebruik van klein aksiomatiese stelsels in die onderrig van logika, soos dit in afdeling 2.11 bespreek is, regverdig 'n grondige studie en navorsing.

- Logika en die probleemgesentreerde benadering in wiskundeonderwys.

Die probleemgesentreerde benadering tot die onderrig van wiskunde berus daarop dat leerlinge

- wiskunde kan leer deur probleme op te los,
- kan besin oor die metodes van oplossing, en
- kennis neem van ander denkpatrone by die oplos van probleme.

Die leerkrag gee geen onderrig in die tradisionele sin van die woord nie. Die leerling ontvang ook nie demonstrasies, verduidelikings, voorskrifte en wenke nie. Die leerling is dus geheel en al afhanklik daarvan om uit die oplos van probleme en sosiale interaksie met mekaar te leer.

In die probleemgesentreerde benadering het die leerling die vryheid om primitiewe metodes te gebruik om probleme op te los, byvoorbeeld tekeninge, tel, probeer-en-verbeter. Hierdie vryheid help die leerling om die struktuur van 'n nuwe tipe probleem te verstaan, en op die probleem te fokus. Die *oorhaastige keuse* van 'n bewerking en oplossing van 'n probleem deur 'n elegante metode gee dikwels daartoe aanleiding dat die leerling nie op die probleem self konsentreer nie. In so 'n geval kan die doel of die logika van die betrokke metode nie altyd begryp word nie.

Die leerling behoort egter in staat te wees om die logika van die metodes wat hulle gebruik het, sistematies en met korrekte gebruik van notasies skriftelik uiteen te sit.

Dit is egter nodig dat daar intensiewe navorsing onderneem sal word oor logika as metode van onderrig in die probleemgesentreerde benadering. In hierdie verband word verwys na afdeling 2.11.

8.5 Opmerking

Met hierdie studie word vertrou dat die samestellers van wiskundekurrikula aandag sal skenk aan die rol van logika in die hedendaagse beoefening van wiskunde. Alhoewel daar 'n wêreldwye neiging is om wiskunde op skoolvlak minder formeel te maak, kan dit nie ontken word dat logiese argumente op sekondêre skoolvlak onontbeerlik is nie. Die logiese ontwikkeling is selfs op voorgraadse vlak nie na wense nie. Derhalwe verdien die logiese opbou van die vak deur middel van bewyse ernstige aandag by die samestelling van 'n wiskundekurrikulum.

B Y L A A G A

DEPARTEMENT VAN ONDERWYS

TUSSENTYDSE KERNSILLABUS

VIR

WISKUNDE

HOëR GRAAD

STANDERDS 8 – 10

IMPLEMENTERINGSDATUM: STANDERD 8: JANUARIE 1995
STANDERD 9: JANUARIE 1996
STANDERD 10: JANUARIE 1997

1 OPMERKINGS

1.1 Die rangskikking van die inhoud van die sillabus en van die onderafdelings daarvan is nie noodwendig 'n aanduiding van die volgorde waarin die werk behandel moet word nie.

1.2 Nie-programmeerbare sakrekenaars mag waar nodig en toepaslik gebruik word om wiskundige begrippe te ontwikkel en vir berekeninge. Basiese onderrig in die praktiese gebruik van sakrekenaars moet verskaf word.

1.3 Die afbakening van Sts. 9 en 10 word aanbeveel maar is nie voorskriftelik nie.

2 DOELSTELLINGS

2.1 Samelewingsdoelstellings

Hierdie sillabus is daarop gemik om die volgende samelewingsdoelstellings te ontwikkel en te bevorder:

2.1.1 om 'n positiewe bydrae te maak tot die heropbou en ontwikkeling van die Suid-Afrikaanse samelewing en die bemagtiging van sy mense;

2.1.2 om gelyke geleenthede en keusemoontlikhede te ontwikkel;

2.1.3 om 'n bydrae te maak tot 'n wye ontwikkeling van die samelewing se kulture;

2.1.4 om 'n demokratiese, nie-rassige en nie-seksistiese onderrigpraktyk te bevorder; en

2.1.5 om 'n bewuswording van, en 'n verantwoordelikheid vir die bewaring van die totale omgewing te skep.

2.2 Algemene onderrig- en leerdoelstellings

Hierdie sillabus het ten doel om die volgende onderrig- en leerdoelstellings te bevorder:

2.2.1 om burgers te ontwikkel wat onafhanklik, self-ondersoekend en met selfvertroue kan optree;

2.2.2 om kritiese en ontledende redeneervermoë te ontwikkel;

2.2.3 om persoonlike kreatiwiteit en probleemoplossingsvaardighede te ontwikkel;

2.2.4 om bedrewendheid in kommunikatiewe en taalvaardighede, naamlik lees, skryf, luister en praat, te ontwikkel;

2.2.5 om 'n koöperatiewe leeromgewing te bevorder;

2.2.6 om die nodige begrip, waardes en vaardighede vir volgehoue individuele en sosiale ontwikkeling, te bevorder;

2.2.7 om die begrip te ontwikkel dat kennis 'n terrein van betwiste idees is; en

2.2.8 om die onderrig en leergebeure sodanig binne konteks te plaas dat dit by die ervaringsveld van die leerder aanpas.

2.3 Spesifieke doelstellings vir wiskunde-onderwys

Hierdie sillabus het ten doel om die volgende spesifieke doelstellings vir Wiskunde-onderwys te ontwikkel en te bevorder:

2.3.1 om leerlinge in staat te stel om wiskundige kennis en vaardigheid te verkry;

2.3.2 om leerlinge in staat te stel om Wiskunde in ander vakgebiede en in sy/haar leefwêreld toe te pas;

2.3.3 om insig en ruimtelike verwantskappe en meting te ontwikkel;

2.3.4 om leerlinge in staat te stel om wiskundige begrippe en verwantskappe te ontdek deur eksperimentering en spekulasie;

2.3.5 om getalbegrip en rekenvaardighede te ontwikkel asook om die waarskynlikheid van antwoorde deur skatting te bepaal;

2.3.6 om die vermoë te ontwikkel om logies te redeneer, te veralgemeen, te verbesonder, te organiseer, analogieë te trek en te bewys;

2.3.7 om leerlinge in staat te stel om 'n situasie in die werklikheid wat wiskundig voorgestel kan word, te herken, 'n toepaslike wiskundige model daarvoor te formuleer, die wiskundige oplossing daarvoor te kry, en die resultaat terug te interpreteer in terme van die werklike situasie;

2.3.8 om die vermoë te ontwikkel om wiskundige taal te verstaan, te interpreteer, te lees en te skryf;

2.3.9 om 'n ondersoekende houding teenoor Wiskunde te ontwikkel;

2.3.10 om 'n waardering vir die plek van Wiskunde en sy wydlopende toepassing in die samelewing, te ontwikkel;

2.3.11 om basiese wiskundige voorbereiding vir verdere studie en beroepe te voorsien;

2.3.12 om 'n bewuswording van, en 'n waardering vir die bydraes van alle nasies van die wêreld tot die ontwikkeling van Wiskunde, te ontwikkel.

3 EVALUERING EN EKSAMINERING

3.1 Evaluering is 'n integrale deel van die leerproses.

3.2 Evaluering is 'n middel tot 'n doel. Dit is 'n proses wat ten nouste verweef is met elke aspek van die totale program van die leerling se ontwikkeling. Die uiteindelike doel met evaluering is die verbetering van die effektiwiteit van die

Wiskunde program asook die leerlinge se wiskundige bevoegdheid in ooreenstemming met hul vermoë, aanleg en behoefte.

3.3 Dit is van die uiterste belang dat die evalueringsprogram die breë benadering tot die onderrig en leer van Wiskunde in die skool sal weerspieël.

3.4 Goedgekeurde sakrekenaars mag gedurende skriftelike toetse en eksamens gebruik word.

3.5 Die sillabus vir Standerds 8 en 9 behoort intern deur elke skool ge-eksamineer te word.

3.6 Die eksterne seniorsertifikaat-eksamen in Standerd 10 sal hoofsaaklik op die sillabusse van Standerd 9 en 10 gebaseer wees, maar die lineêre aard van Wiskunde is sodanig dat die werk wat in Standerd 8 en vroeër gedoen is, nie uitgesluit word nie.

3.7 Die eksaminering in Standerd 10 sal deur middel van twee drie uur vraestelle van gelyke waarde geskied. Die punteverdeling is soos volg:

3.7.1 Eerste Vraestel

- Algebra: 75% (± 5%)
- Differensiaalrekening: 25% (± 5%)

3.7.2 Tweede Vraestel

- Een algemene vraag van gemengde aard wat twee of meer afdelings dek, kan gevra word: 5%–10%
- Euklidiese Meetkunde: 30% (± 5%)
- Analitiese Meetkunde: 25% (± 5%)
- Trigonometrie: 40% (± 5%).

ONDERRIGAANBIEDING	:	WISKUNDE HG
KODE	:	162108508
ONDERRIGPROGRAM	:	STANDERD 8
KODE	:	608

SILLABUS

1 PRODUKTE

Die volgende tipes deur inspeksie

1.1 $(a \pm b)\ (c \pm d)$

1.2 $(ax \pm b)\ (cx \pm d)$ en $(ax \pm by)\ (cx \pm dy)$

1.3 $(ax \pm b)^2$ en $(ax \pm by)^2$

1.4 $(ax + b)\ (ax - b)$ en $(ax + by)\ (ax - by)$

1.5 $(ax + b)\ (a^2x^2 - abx + b^2)$ en $(ax + by)\ (a^2x^2 - abxy + b^2y^2)$

1.6 $(ax - b)\ (a^2x^2 - abx + b^2)$ en $(ax - by)\ (a^2x^2 + abxy + b^2y^2)$

2 FAKTORE

Ontbinding in faktore van die volgende tipes:

2.1 Vierterme deur groepering

2.2 Kwadratiese drieterme

2.3 Verskil van vierkante

2.4 Som en verskil van derdemagte

2.5 Voorgaande tipes met insluiting van 'n gemeenskaplike faktor

3 ALGEBRAïESE BREUKE

3.1 Vereenvoudiging

3.2 Hoofbewerkings

4 VERGELYKINGS EN ONGELYKHEDE IN EEN ONBEKENDE

4.1 Oplos van lineêre vergelykings met syfer- en letter-koëffisiënte.

4.2 Oplos van lineêre ongelykhede met syfer-koëffisiënte.

4.3 Oplos van probleme met behulp van lineêre vergelykings.

4.4 Oplos van kwadratiese vergelykings met behulp van faktore waarin alleen heelgetalle as koeffisiënte voorkom

5 FORMULES

5.1 Opstel van formules vir oppervlakte en volume van reghoekige prismas en silinders.

5.2 Substitusie in formules

5.3 Verandering van die onderwerp van formules.

6 FUNKSIES

6.1 Funksiebegrip, funksienotasie en funksiewaardes.

6.2 Definisie- en waardeversameling van 'n funksie.

6.3 Grafiese voorstelling van die funksies (en afleiding van elkeen se kenmerke uit sy vergelyking en grafiese voorstelling) gedefinieer deur:

6.3.1 $ax + by + c = 0$

6.3.2 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (r rasionaal en $r \neq 0$)

6.3.3 $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (r rasionaal en $r \neq 0$)

6.3.4 $xy = k$ (k 'n heelgetal en $k \neq 0$)

6.3.5 $y = ax^2 + c$ (a en c rasionale getalle).

7 STELSELS LINEêRE VERGELYKINGS IN TWEE ONBEKENDES

7.1 Oplos van stelsels lineêre vergelykings – grafies en algebraïes.

7.2 Oplos van probleme met behulp van stelsels lineêre vergelykings.

8 EKSPONENTE (Sakrekenaars mag nie gebruik word nie)

8.1 Die betekenis van a^{-m}, a^0 en $a^{\frac{m}{n}}$, $a \neq 0$ (m, n natuurlike getalle), maar gevalle wat lei tot nie-reële getalle uitgesluit.

8.2 Intuïtiewe uitbreiding van die eksponentwette om heeltallige en rasionale eksponente in te sluit.

9 EUKLIDIESE MEETKUNDE

(i) Onderstaande moet behandel word binne die raamwerk van 'n wiskundige stelsel. Gevolglik mag slegs aksiomas in die logika en definisies, aksiomas en stellings wat in hierdie lys of in die lys vir standerd 7 voorkom gebruik word as redes vir bewerings in die bewyse van probleme.

(ii) Alhoewel alle stellings bewys moet word, word vir eksamendoeleindes slegs bewyse verlang van die stellings (en van hul omgekeerdes, waar gemeld) wat met 'n asterisk aangedui is.

(iii) Toepassings kan oor enige aksioma of stelling in hierdie lys of in die lys van standerd 7 gevra word (Geen konstruksies word vir eksamendoeleindes vereis nie.)

(iv) Nie meer as drie-tiendes van die punte vir Meetkunde sal in die eksamen vir "boekwerk" toegeken word nie.

(v) 'n Logiese volgorde van die volgende moet gehandhaaf word.

*9.1 Die teenoorstaande sye en hoeke van 'n parallelogram is gelyk en omgekeerd, as die teenoorstaande sye of hoeke van 'n vierhoek gelyk is, is die vierhoek 'n parallelogram. (Stelling)

*9.2 Die hoeklyne van 'n parallelogram halveer mekaar en omgekeerd, as die hoeklyne van 'n vierhoek mekaar halveer, is die vierhoek 'n parallelogram. (Stelling)

*9.3 As twee teenoorstaande sye van 'n vierhoek gelyk en ewewydig is, is die vierhoek 'n parallelogram. (Stelling)

9.4 Die hoeklyne van 'n reghoek is gelyk. (Stelling)

9.5 Die hoeklyne van 'n ruit halveer mekaar reghoekig en halveer die hoeke van die ruit. (Stelling)

*9.6 'n Hoeklyn van 'n parallelogram halveer die oppervlakte van die parallelogram. (Stelling)

*9.7 'n Parallelogram en 'n reghoek op dieselfde basis en tussen dieselfde ewewydige lyne, het gelyke oppervlaktes. (Stelling)

9.8 Driehoeke (parallelogramme) op dieselfde basis (of gelyke basisse) en aan dieselfde kant daarvan, is gelyk in oppervlakte as hulle tussen dieselfde ewewydige lyne lê en omgekeerd, as driehoeke (parallelogramme) wat op dieselfde basis (of gelyke basisse) en aan dieselfde kant daarvan lê, gelyke oppervlaktes het, lê hulle tussen dieselfde ewewydige lyne. (Stelling)

*9.9 Die lynstuk wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die derde sy en gelyk aan die helfte van die derde sy. (Stelling)

*9.10 Die lyn deur die middelpunt van een sy van 'n driehoek, ewewydig aan 'n tweede sy, halveer die derde sy. (Stelling)

9.11 As drie of meer ewewydige lyne gelyke lynstukke van een snylyn afsny, sny hulle gelyke lynstukke van enige ander snylyn af. (Stelling)

10 TRIGONOMETRIE

10.1 Definisies van die drie trigonometriese funksies sin θ, cos θ en tan θ vir 'n hoek $\theta \in [0°;\ 360°)$

10.2 Toepassings van die drie trigonometriese verhoudings in 'n reghoekige driehoek

10.3 Praktiese toepassings.

$=$	:	is gelyk aan
$\neq$	:	is nie gelyk aan
$\approx$	:	is benaderd gelyk aan
$>$	:	is groter as
$<$	:	is kleiner as
$\not>$	:	is nie groter as
$\not<$	:	is nie kleiner as
$\geq$	:	is groter as of gelyk aan
$\leq$	:	is kleiner as of gelyk aan
$\equiv$	:	is kongruent aan; is identies aan
$\|\|\|$	:	is gelykvormig aan
$\parallel$	:	is ewewydig aan
$\perp$	:	is loodreg op
$\therefore$	:	dus
$\because$	:	omdat
$\Rightarrow$	:	impliseer
$\Leftrightarrow$	:	impliseer en word geïmpliseer deur
$\|x\|$	:	absolute waarde van x
$\in$	:	is 'n element van
$\notin$	:	is nie 'n element van
$\subset$	:	is 'n deelversameling van
$\supset$	:	omvat
ϕ	:	die leë versameling
$\approx$ of $\sim$	:	is ekwivalent aan
$\not\subset$	:	is nie 'n deelversameling van
$A \cap B$	:	die snyding van A en B
$A \cup B$	:	die vereniging van A en B
A^1	:	die komplement van A
n(A)	:	die kardinaalgetal van A
{x| .....}	:	die versameling van alle x, sodanig dat ...
A X B	:	A kruis B; die kruisproduk (Cartesiese produk) van A en B
f^{-1}	:	inverse van f

U	:	omvattende versameling
$f:x \rightarrow 2x + 1$	:	die funksie f wat x afbeeld op $2x + 1$
f(x)	:	die beeld van x
$f : A \rightarrow B$	:	die funksie f van A na B
$2, \dot{3}$	:	2 komma 3 repeterend
$[-360°;\ 360°]$	:	geslote interval
$(-360°;\ 360°)$	:	oop interval
$(-360°;\ 360°]$	:	oop-geslote interval
$[360°;\ 360°)$	:	geslote-oop interval
$\sum^{n}$	:	som tot n terme
$\sum^{\infty}$	:	som tot oneindig
N	:	die versameling natuurlike getalle
N_o	:	die versameling telgetalle
Z	:	die versameling heelgetalle
R	:	die versameling reële getalle
Q	:	die versameling rasionale getalle
$A\hat{B}C$	:	hoek ABC
Δ	:	driehoek
//m	:	parallelogram
$\odot$	:	sirkel
(a; b)	:	geordende paar

ONDERRIGAANBIEDING	:	WISKUNDE HG
KODE	:	162108609
ONDERRIGPROGRAM	:	STANDERD 9
KODE	:	609

S I L L A B U S

1 ALGEBRA

1.1 'n Kort intuïtiewe oorsig oor die reële getalle.

1.2 Absolute waarde

1.2.1 Definisie

1.2.2 Algebraïese oplossing van $|x - a| \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} b$.

1.3 Funksies

(Geen punt-vir-punt stipping van grafieke word vir eksamendoeleindes, vereis nie.)

1.3.1 Grafiese voorstelling van die funksies gedefinieer deur:

(a) $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

(b) $y = |x|$, $y = |x - a|$ en $y = |x| + a$, a 'n rasionale getal.

1.3.2 Afleiding van die eienskappe van die funksies in 1.3.1 uit hul vergelykings en grafiese voorstellings.

1.3.3 Grafiese voorstelling van gelyktydige gelykhede ten opsigte van funksies in 1.3.1 insluitend hul snyding met $ax + by + c = 0$.

1.3.4 Die inverses van die funksies gedefinieer deur $y = mx + c$; $y = ax^2$; $xy = k$; $y = |x|$.

1.4 Lineêre programmering

1.4.1 Grafiese voorstelling van $ax + by + c \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0$.

1.4.2 Toepassing in lineêre programmering (slegs grafies).

1.5 Kwadratiese vergelykings en ongelykhede

1.5.1 Die wortels van $ax^2 + bx + c = 0$ waar a, b en c rasionaal is ($a \neq 0$).

(a) Die oplossing van $ax^2 + bx + c = 0$.

(b) Voorwaardes vir oplosbaarheid in die versameling reële getalle.

(c) Gelyke en ongelyke wortels; rasionale en irrasionale wortels; reële en nie-reële wortels.

1.5.2 Die oplossing van: $ax^2 + bx + c \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0$.

1.5.3 Probleme wat tot kwadratiese vergelykings lei.

1.6 Die res- en faktorstelling

1.6.1 Toepassings insluitend oplos van derdegraads-vergelykings.

1.7 Stelsels vergelykings

1.7.1 Oplos van gelyktydige vergelykings in twee onbekendes waarvan een lineêr en die ander kwadraties is.

1.7.2 Probleme wat lei tot vergelykings soos in 1.7.1.

1.8 Eksponente

1.8.1 Oplos van vergelykings van die vorm

$ax^{\frac{m}{n}} - b = 0$ waar m en n heelgetalle is, $n \neq 0$.

1.8.2 Verband tussen wortelvorme en eksponente en notasies vir die ooreenstemmende basiese eienskappe waar a en b positief is en m en n positiewe heelgetalle is:

(a) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

(c) $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$

(d) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(a, b \neq 0)$

1.8.3 Oplos van eenvoudige eksponensiale vergelykings in een veranderlike.

2 TRIGONOMETRIE

2.1 Uitbreiding van die definisies van die ses trigonometriese funksies vir enige hoek in terme van koördinate ten opsigte van 'n reghoekige assekruis.

2.2 Funksiewaardes vir $(90° - \theta)$; $(180° \pm \theta)$; $(360° + \theta)$ uitgedruk in funksiewaardes vir θ, waar $\theta \in [0°;\ 90°]$.

2.3 Grafieke van $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ en $y = \tan \theta$.

2.4 Funksiewaardes vir 0°, 30°, 45° en hul veelvoude, sonder gebruik van die sakrekenaar.

2.5 Identiteite

2.5.1 Die onderlinge verband tussen die trigonometriese funksies.

2.5.2 (a) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(b) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

(c) $\cot^2\theta + 1 = \text{cosec}^2\theta$.

2.6 Formules

2.6.1 die sinus-formule;

2.6.2 die kosinus-formule;

2.6.3 oppervlakte van 'n driehoek ABC = $\frac{1}{2}$ ab sin C;

2.6.4 toepassing van bostaande formules by die oplossing van

(a) driehoeke;

(b) probleme in twee en drie dimensies.

3 EUKLIDIESE MEETKUNDE

(i) Onderstaande moet behandel word binne die raamwerk van 'n wiskundige stelsel. Gevolglik mag slegs aksiomas in die logika en definisies, aksiomas en stellings wat in hierdie lys of in die lys van standerds 7 en 8 voorkom gebruik word as redes vir bewerings in die bewyse van probleme.

(ii) Alhoewel alle stellings bewys moet word, word vir eksamendoeleindes slegs bewyse verlang van die stellings (en van hul omgekeerdes, waar gemeld) wat met 'n asterisk aangedui is.

(iii) Toepassings kan oor enige aksioma of stelling in hierdie lys of in die lyste vir standerds 7 en 8 gevra word. (Geen konstruksies word vir eksamendoeleindes vereis nie).

(iv) Nie meer as drie-tiendes van die punte vir Meetkunde sal in die eksamen vir "boekwerk" toegeken word nie.

(v) 'n Logiese volgorde van die volgende moet gehandhaaf word.

3.1 Die stelling van Pythagoras (sonder bewyse)

*3.2 Die verbindingslyn van die middelpunt van 'n sirkel en die middelpunt van 'n koord is loodreg op die koord, en omgekeerd, die loodlyn uit die middelpunt van 'n sirkel na 'n koord, halveer die koord. (Stelling)

3.2.1 Afleiding: Die middelloodlyn van 'n koord gaan deur die middelpunt van die sirkel.

3.2.2 'n Unieke sirkel kan getrek word deur enige drie punte wat nie in 'n reguit lyn lê nie.

*3.3 Die hoek wat 'n boog van 'n sirkel by die middelpunt onderspan is dubbel die hoek wat dit by 'n punt op die omtrek onderspan. (Stelling)

3.4 Die omtrekshoek wat deur 'n middellyn onderspan word is 'n regte hoek en omgekeerd, as 'n koord van 'n sirkel 'n regte hoek op die omtrek onderspan, is die koord 'n middellyn van die sirkel. (Stelling)

3.5 Omtrekshoeke in dieselfde sirkelsegment is gelyk, en omgekeerd, as 'n lynstuk wat twee punte verbind gelyke hoeke onderspan by twee ander punte aan dieselfde kant van die lynstuk, dan lê hierdie vier punte op die omtrek van 'n sirkel. (Stelling)

3.5.1 Omtrekshoeke in gelyke segmente van 'n sirkel of van gelyke sirkels is gelyk. (Stelling)

*3.6 Die oorstaande hoeke van 'n koordevierhoek is supplementêr, en omgekeerd, as 'n paar oorstaande hoeke van 'n vierhoek supplementêr is, is die vierhoek 'n koordevierhoek. (Stelling)

3.7 'n Buitehoek van 'n koordevierhoek is gelyk aan sy teenoorstaande binnehoek, en omgekeerd, as 'n buitehoek van 'n vierhoek gelyk is aan die teenoorstaande binnehoek, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek. (Stelling)

3.8 'n Raaklyn aan 'n sirkel is loodreg op die radius by die raakpunt, en omgekeerd, 'n lyn deur enige punt op die sirkel, loodreg op die radius, is 'n raaklyn aan die sirkel. (Stelling)

3.9 As deur 'n punt twee raaklyne aan 'n sirkel getrek word, is die afstande tussen dié punt en die raakpunte gelyk. (Stelling)

*3.10 Die hoek wat gevorm word deur 'n raaklyn aan 'n sirkel en 'n koord wat vanuit die raakpunt getrek word, is gelyk aan 'n hoek in die oorstaande segment, en omgekeerd, as 'n lyn deur die eindpunt van 'n koord 'n hoek met die koord vorm wat gelyk is aan die hoek in die oorstaande segment, dan is die lyn 'n raaklyn aan die sirkel. (Stelling)

3.11 Die volgende stellings:

3.11.1 Die halveerlyne van die hoeke van 'n driehoek sny in een punt.
3.11.2 Die middelloodlyne van die sye van 'n driehoek sny in een punt..
3.11.3 Die mediane (swaartelyne) van 'n driehoek sny in een punt.
3.11.4 Die hoogtelyne van 'n driehoek sny in een punt.

4 SIMBOLE EN NOTASIE

$=$: is gelyk aan
$\neq$: is nie gelyk aan
$\approx$: is benaderd gelyk aan

$>$	:	is groter as
$<$	:	is kleiner as
$\not>$	:	is nie groter as
$\not<$	:	is nie kleiner as
$\geq$	:	is groter as of gelyk aan
$\leq$	:	is kleiner as of gelyk aan
$\equiv$	:	is kongruent aan; is identies aan
$\|\|\|$	:	is gelykvormig aan
$\|\|$	:	is ewewydig aan
$\perp$	:	is loodreg op
$\therefore$	:	dus
$\because$	:	omdat
$\Rightarrow$	:	impliseer
$\Leftrightarrow$	:	impliseer en word geïmpliseer deur
$\|x\|$	:	absolute waarde van x
$\in$	:	is 'n element van
$\notin$	:	is nie 'n element van
$\subset$	:	is 'n deelversameling van
$\supset$	:	omvat
ϕ	:	die leë versameling
$\approx$ of $\sim$	:	is ekwivalent aan
$\not\subset$	:	is nie 'n deelversameling van
$A \cap B$	:	die snyding van A en B
$A \cup B$	:	die vereniging van A en B
A^1	:	die komplement van A
$n(A)$	:	die kardinaalgetal van A
$\{x \mid .....\}$	:	die versameling van alle x, sodanig dat ...
$A \times B$	:	A kruis B; die kruisproduk (Cartesiese produk) van A en B
f^{-1}	:	inverse van f
U	:	omvattende versameling
$f:x \rightarrow 2x + 1$	:	die funksie f wat x afbeeld op 2x + 1
f(x)	:	die beeld van x
$f : A \rightarrow B$	:	die funksie f van A na B
$2, \dot{3}$	:	2 komma 3 repeterend

$[-360°;\ 360°]$: geslote interval

$(-360°;\ 360°)$: oop interval

$(-360°;\ 360°]$: oop-geslote interval

$[360°;\ 360°)$: geslote-oop interval

$\sum^{n}$: som tot n terme

$\sum^{\infty}$: som tot oneindig

N : die versameling natuurlike getalle

N_o : die versameling telgetalle

Z : die versameling heelgetalle

R : die versameling reële getalle

Q : die versameling rasionale getalle

$A\hat{B}C$: hoek ABC

Δ : driehoek

//m : parallelogram

$\odot$: sirkel

(a; b) : geordende paar

ONDERRIGAANBIEDING	:	WISKUNDE HG
KODE	:	162108710
ONDERRIGPROGRAM	:	STANDERD 10
KODE	:	610

S I L L A B U S

1 ALGEBRA

1.1 Logaritmes

1.1.1 Die magsfunksie $y = a^x$, $a > 0$; sy grafiek en afleidings uit die grafiek.

1.1.2 Die logaritmiese funksie $y = \log_a x$, $a > 0$ en $a \neq 1$; sy grafiek en afleidings uit die grafiek.

1.1.3 Die basiese eienskappe van logaritmes.

1.1.4 Verandering van die grondtal van 'n logaritme.

1.1.5 Eenvoudige logaritmiese vergelykings en ongelykhede.

1.2 Rye en reekse

1.2.1 Kenmerke en die algemene terme van rekenkundige en meetkundige rye.

1.2.2 Die $\sum$-notasie.

1.2.3 Berekeninge in verband met die som tot n terme van rekenkundige en meetkundige reekse.

1.2.4 Konvergensie van 'n meetkundige reeks en sy som tot oneindig.

1.2.5 Oplos van eenvoudige probleme met behulp van bostaande.

2 DIFFERENSIAALREKENING

2.1 Gemiddelde helling van 'n kromme tussen twee punte; gemiddelde spoed.

2.2 Limiete

2.2.1 Intuïtiewe benadering tot die limietbegrip

2.2.2 Bepaling van $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ waar f gekies moet word uit: k; ax;

$ax + b$; ax^2; $ax^2 + bx + c$ en ax^3

2.2.3 die afgeleide van 'n funksie; die notasies:

D_x; $\frac{d}{dx}$; $f^1(x)$

2.2.4 Die helling van 'n kromme by enige punt op die kromme.

2.3 $D_x [x^n] = nx^{n-1}$; n reëel (sonder bewys)

2.4 Differensiasiereëls

2.4.1 $D_x [f(x) \pm g(x)] = D_x [f(x)] \pm D_x [g(x)]$

2.4.2 $D_x [k.\ f(x)] = k.\ D_x [f(x)]$.

2.5 Toepassings

2.5.1 Die vergelykings van raaklyne aan krommes.

2.5.2 Draaipunte en sketse van polinome van hoogstens die derde graad.

2.5.3 Eenvoudige praktiese probleme oor maksima en minima en veranderingstempo.

3 TRIGONOMETRIE

3.1 Funksiewaardes vir $-\theta$ en $(\theta + 360°.n)$ vir n 'n heelgetal, uitgedruk in funksiewaardes vir θ, waar $\theta \in [0°;\ 90°]$.

3.2 Die sinus-, kosinus- en tangensfunksies.

3.2.1 Beskrywing van definisie- en waardeversameling.

3.2.2 Grootste en kleinste funksiewaardes en periode.

3.2.3 Sketse van krommes van die volgende tipes:
(waar a 'n heelgetal of 'n breuk van die vorm $\frac{1}{n}$ is; n 'n heelgetal)

(a) $y = a \sin \theta$, $y = a \cos \theta$, $y = a \tan \theta$

(b) $y = \sin a\theta$, $y = \cos a\theta$, $y = \tan a\theta$

(c) $y = a + \sin \theta$, $y = a + \cos \theta$, $y = a + \tan \theta$

(d) $y = \sin (\alpha + \theta)$, $y = \cos (\alpha + \theta)$

3.3 $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$, en identiteite vir

3.3.1 $\cos (A + B)$

3.3.2 $\sin (A \pm B)$

3.3.3 $\tan (A \pm B)$

3.3.4 $\sin 2\theta$

3.3.5 $\cos 2\theta$

3.3.6 $\tan 2\theta$

3.4 Algemene en spesifieke oplossings van eenvoudige trigonometriese vergelykings. (Vergelykings van die tipe $a \sin x + b \cos x = c$ met $c \neq 0$ uitgesluit.)

4 EUKLIDIESE MEETKUNDE

(i) Onderstaande moet behandel word binne die raamwerk van 'n wiskundige stelsel. Gevolglik mag slegs aksiomas in die logika en definisies, aksiomas en stellings wat

in hierdie lys of in die lys van standerds 7, 8 en 9 voorkom gebruik word as redes vir bewerings in die bewyse van probleme.

(ii) Alhoewel alle stellings bewys moet word, word vir eksamendoeleindes slegs bewyse verlang van die stellings (en van hul omgekeerdes waar gemeld) wat met 'n asterisk aangedui is.

(iii) Toepassings kan oor enige aksioma of stelling in hierdie lys of in die lys van standerds 7, 8 en 9 gevra word. (Geen konstruksies word vir eksamendoeleindes vereis nie.)

(iv) Nie meer as drie-tiendes van die punte van Meetkunde sal in die eksamen vir "boekwerk" toegeken word nie.

(v) 'n Logiese volgorde van die volgende moet gehandhaaf word.

*4.1 'n Lyn ewewydig aan een sy van 'n driehoek, verdeel die ander twee sye in eweredige dele, en omgekeerd, as 'n lyn twee sye van 'n driehoek eweredig verdeel, is die lyn ewewydig aan die derde sy. (Stelling)

4.2 Definisie van gelykvormige figure.

*4.3 As twee driehoeke gelykhoekig is, is die ooreenstemmende sye eweredig, en omgekeerd, as die ooreenstemmende sye van twee driehoeke eweredig is, is die twee driehoeke gelykhoekig. (Stelling)

4.4 Gelykhoekige driehoeke is gelykvormig en as die ooreenstemmende sye van twee driehoeke eweredig is, is die driehoeke gelykvormig. (Afleidings)

*4.5 Die loodlyn vanuit die regtehoekpunt van 'n reghoekige driehoek op die skuinssy, verdeel die driehoek in twee driehoeke wat gelykvormig aan mekaar en gelykvormig aan die oorspronklike driehoek is. (Stelling)

4.6 Die stelling van Pythagoras en sy omgekeerde. (Stelling)

5 ANALITIESE MEETKUNDE IN DIE PLATVLAK

5.1 Die afstand tussen twee punte.

5.2 Die middelpunt van 'n lynstuk.

5.3 Helling van 'n lyn.

5.4 Vergelyking van 'n lyn en sy skets.

5.5 Loodregte en ewewydige lyne (geen bewyse).

5.6 Saamlynige (ko-lineêre) punte en snydende lyne.

5.7 Afsnitte wat 'n lyn met die asse maak.

5.8 Vergelykings van sirkels met enige gegewe middelpunt en gegewe radius.

5.9 Snypunte van lyne en sirkels.

5.10 Vergelyking van die raaklyne aan 'n sirkel by 'n gegewe punt op die sirkel.

5.11 Ander lokusse met betrekking tot reguit lyne en sirkels.

6 SIMBOLE EN NOTASIE

$=$	:	is gelyk aan
$\neq$	:	is nie gelyk aan
$\approx$	:	is benaderd gelyk aan
$>$	:	is groter as
$<$	:	is kleiner as
$\not>$	:	is nie groter as
$\not<$	:	is nie kleiner as
$\geq$	:	is groter as of gelyk aan
$\leq$	:	is kleiner as of gelyk aan
$\equiv$	:	is kongruent aan; is identies aan
$\|\|\|$	:	is gelykvormig aan
$\parallel$	:	is ewewydig aan
$\perp$	:	is loodreg op
$\therefore$	:	dus
$\because$	:	omdat
$\Rightarrow$	:	impliseer
$\Leftrightarrow$	:	impliseer en word geïmpliseer deur
$\|x\|$	:	absolute waarde van x

$\in$: is 'n element van

$\notin$: is nie 'n element van

$\subset$: is 'n deelversameling van

$\supset$: omvat

ϕ : die leë versameling

$\approx$ of $\sim$: is ekwivalent aan

$\not\subset$: is nie 'n deelversameling van

$A \cap B$: die snyding van A en B

$A \cup B$: die vereniging van A en B

A^1 : die komplement van A

n(A) : die kardinaalgetal van A

{x| .....} : die versameling van alle x, sodanig dat ...

A X B : A kruis B; die kruisproduk (Cartesiese produk) van A en B

f^{-1} : inverse van f

U : omvattende versameling

$f:x \rightarrow 2x + 1$: die funksie f wat x afbeeld op 2x + 1

f(x) : die beeld van x

$f : A \rightarrow B$: die funksie f van A na B

$2, \dot{3}$: 2 komma 3 repeterend

[−360°; 360°] : geslote interval

(−360°; 360°) : oop interval

(−360°; 360°] : oop-geslote interval

[360°; 360°) : geslote-oop interval

$\sum^{n}$: som tot n terme

$\sum^{\infty}$: som tot oneindig

N : die versameling natuurlike getalle

N_o : die versameling telgetalle

Z : die versameling heelgetalle

R : die versameling reële getalle

Q : die versameling rasionale getalle

$A\hat{B}C$	:	hoek ABC
Δ	:	driehoek
//m	:	parallelogram
$\odot$	:	sirkel
(a; b)	:	geordende paar

BYLAAG B

SILLABUS

WISKUNDE I

MAT111

Een twee-uur vraestel

Eienskappe van reële getalle

Versamelings

Relasies en funksies

Goniometriese funksies

Inverse goniometriese funksies

Komplekse getalle

Ongelykhede

Absolute waarde

Resstelling

Kwadratiese funksies

Derdegraadse funksies

Rasionale funksies. Draaipunt met die diskriminant

Limiete

Kontinuïteit

Differensiasie

MAT112

Een twee-uur vraestel

Eksponente en logaritmes

Rekenkundige en Meetkundige rye en reekse

Permutasies en kombinasies

Die binomiaalstelling

Wiskundige induksie

Vektore en die reguitlyn in die platvlak

MAT113

Een twee-uur vraestel

Grafieke van rasionale funksies (Buigpunte)

Differensiasie van goniometriese funksies

Maksima en minima

Trigonometriese reekse

Anti-afgeleides

WISKUNDE II

MAT121

Een twee-uur vraestel

Die onbepaalde integraal

Die bepaalde integraal

Integrasie tegnieke

Logaritmiese funksie

Eksponensiële funksie

Oneindige rye en reekse

Taylor en Maclaurin reekse

Rolle se stelling

Middelwaardestellings

Reël van L' Hôpital

Parsiële differensiasie

Hiperboliese funksies

MAT122

Een twee-uur vraestel

Stelsels lineêre vergelykings

Lineêre variëteite

Homogene vergelykings

Vektore

Lineêre afhanklikheid en onafhanklikheid

Basisse

Lineêre deelruimtes

Homomorfismes

Determinante

MAT123

Een twee-uur vraestel

Analitiese meetkunde

Inleiding

Afstande

Verdeling van 'n lyn

Stelsels van reguitlyne

Lokusse

Sirkel: snylyne en raaklyne

Parabool

Ellips

Hiperbool

Lineêre programmering

Grafiese oplossing

Simplekse metode

Kunsmatige veranderlikes

BIBLIOGRAFIE

ANTON, H. 1984. *Elementary Linear Algebra.* Fourth edition. John Wiley & Sons, New York.

ARTHUR, E. 1974. *Logic in Mathematics. An Elementary Approach.* Macmillan Publishing Co., Inc., New York.

BANKS, H.J. **et al.** 1972. *Geometry. Its Elements and Structure.* McGraw-Hill, New York.

BARBEAU, E. 1985. *Creativity in Mathematics.* Interchange, vol. 16, no. 1, pp. 62-69.

BARNARD, J.J. 1993. *Creativity in the Mathematics Classroom.* Referaat gelewer te Pretoria op 10 Junie 1993 voor die Streekkongres oor Wiskundeonderwys.

BARSHAY, J. 1969. *Topics in Ring Theory.* W.A. Benjamin, Inc., New York.

BERARD, A.D. (Jr.) 1992. *The Use of Small Axiom Systems to Teach Reasoning to First-year Students.* Primus, vol. 2, no. 3, pp. 265-277.

BLUM W. & KIRSCH A. 1991. *Preformal Proving: Examples and Reflections.* Educational Studies in Mathematics, vol. 22, no. 2, pp 183-203.

BORASI, R. 1985. *Intuition and Rigor in the Evaluation of Infinite Expressions.* Focus on Learning Problems in Mathematics, vol. 7, no. 3-4, pp. 65-75.

BOSMAN, D.B. **et al.** 1982. *Tweetalige Woordeboek.* Sewende verbeterde uitgawe. Tafelberg-uitgewers, Kaapstad.

BROERE, I. 1980. *Inleiding tot Grafiekteorie.* Publikasiereeks van die Randse Afrikaanse Universiteit, Johannesburg.

BYERS, V. & ERLWANGER, S. 1984. *Content and Form in Mathematics.* Educational Studies in Mathematics, vol. 15, no. 3, pp. 259-275.

CERUTTI, E. & DAVIS, P.J. 1969. *Formac meets Pappus.* American Mathematical Monthly, vol LXXVI, pp. 895-905.

COWEN, C.C. 1991. *Teaching and Testing Mathematics Reading.* American Mathematical Monthly, vol. 98, no. 1, pp. 50-53.

DAVIS, P.J. & HERSH, R. 1981. *The Mathematical Experience.* Birkhäuser, Boston.

DEMETRIOU, A. & EFKLIDES, A. 1994. *Intelligence, Mind, and Reasoning. Structure and Development.* North-Holland, Amsterdam.

DETLEFSEN, M. 1992. *Proof, Logic and Formalization.* Routledge and Kegan, London.

DETLEFSEN, M. & LUKER, M. 1980. *The Four – Color Theorem and Mathematical Proof.* The Journal of Philosophy, vol. LXXVII, pp. 803–820.

DIEUDONNé, J.A. 1970. *The Work of Nicholas Bourbaki.* American Mathematical Monthly, vol. 77, pp. 134-145.

DIEUDONNé, J.A. 1973. *Should We Teach "Modern" Mathematics?* American Scientist, vol 61, pp. 16-19.

DUBINSKY, E. 1987. *Anatomy of a Question.* Journal of Mathematical Behavior, vol. 6, no. 3, pp. 363-365.

ENGELBRECHT, J.C. **et al**. 1979. *Analise I. Differensiaal- en Integraalrekening.* Mathematicae-uitgewers, Pretoria.

ERNEST, P. 1984. *Mathematical Induction. A Pedagogical Discussion.* Educational Studies in Mathematics, vol. 15, no. 2, pp. 173-189.

EVANS, J. St. B.T. 1982. "*The Psychology of Deductive Reasoning.*" Routledge & Kegan Paul, London.

EVES, H. & NEWSON, C.V. 1965. *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* Revised edition. Holt, Rinehart and Winston, New York.

EVES, H. 1976. *An Introduction to the History of Mathematics.* Fourth edition. Holt, Rinehart and Winston, New York.

FISHER, A. 1988. "*The Logic of Real Arguments.*" Cambridge University Press, Cambridge.

FREUDENTHAL, H. 1973. *Mathematics as an Educational Task.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland.

GALTON, A. 1990. *Logic for Information Technology.* John Wiley & Sons, Chichester.

GOODMAN, N.D. 1979. *Mathematics as an Objective Science.* American Mathematical Monthly, vol. 86, pp. 540-551.

GRABINER, J.V. 1974. *Is Mathematical Truth Time – Dependent?* American Mathematical Monthly, vol. 81, pp. 354-365.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1980. *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910.* Gerald Duckworth & Co. Ltd., London.

GROZA, V.S. 1968. *A Survey of Mathematics. Elementary Concepts and Their Historical Development.* Holt, Rinehart and Winston, New York.

HAMILTON, A.G. 1990. *"Logic for Mathematicians."* Revised edition. Cambridge University Press, Cambridge.

HAMMING, R.W. 1980. *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics.* American Mathematical Monthly, vol. 87, pp. 81-90.

HANNA, G. 1983. *"Rigorous Proof in Mathematics Education."* The Ontario Institute for Studies in Education, Ontario.

HANNA, G. 1989. *More than Formal Proof.* For the Learning of Mathematics, vol. 9, no. 1, pp. 20-23.

HEIDEMA, J. 1969. *Geskiedenis, Beginsels en Metodes van die Intuïsionistiese Wiskunde.* Referaat gelewer te Pretoria op 14 Augustus 1965 voor die Transvaalse tak van die Suid-Afrikaanse Wiskundevereniging. Tydskrif vir Natuurwetenskappe, jaargang 9 no. 1.

HEIDEMA, J. 1971. *Aspekte van die Modelteorie.* Referaat voorgedra aan die Suid-Afrikaanse Wiskundevereniging op 26 Oktober 1971.

JAFFE, A. & QUINN, F. 1993. *"Theoretical Mathematics": Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics."* Bulletin (new series) of the American Mathematical Society, vol. 29, no. 1, pp. 1-13.

KEEPORTS, D. 1991. *Map – coloring Algorithm.* Mathematics Teacher, vol. 84, no. 9, pp. 759-763.

KITCHER, P. 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford University Press, London.

KLINE, M. 1970. *Logic versus Pedagogy.* American Mathematical Monthly, vol. 77, pp. 264-282.

KLINE, M. 1972. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times.* Oxford University Press, London.

KOLATA, G.B. 1976. *Mathematical Proofs: The Genesis of Reasonable Doubt.* Science, vol. 192, pp. 989-990.

KRIEL, D.J. 1990. *"Die Verskillende Fasette van Wiskunde as Determinant vir Kurrikulumontwerp."* D.Ed-Proefskrif, Universiteit van Port Elizabeth, Port Elizabeth.

LABUSCHAGNE, W.A. 1977. *"Aksiomatiese Versamelingsleer."* Unisa – publikasie, Universiteit van Suid-Afrika, Pretoria.

LARIDON, P.E.J.M. **et al.** 1986. *Wiskunde vir die Klaskamer St. 10.* McGraw-Hill, Johannesburg.

LERMAN, S. 1989. *Constructivism, Mathematics and Mathematics Education.* Educational Studies in Mathematics, vol. 20, pp. 211-223.

LERON, U. 1985. *Heuristic Presentations: the Role of Structuring.* For the Learning of Mathematics, vol. 5, no. 3, pp. 7-13.

LOLLI, G. 1983. "*Logic in the 20th Century.*" Scientia, Universita di Torino.

LOWENTHAL, F. & EISENBERG, T. 1992. *Mathematical Induction in School: An Illusion of Rigor?* School Science and Mathematics, vol. 92, no. 5, pp. 233-238.

MACLANE, S. 1956. *The Impact of Modern Mathematics on Secondary Schools.* The Mathematics Teacher, vol. 66, pp. 66-69.

MAOR, E. 1987. *To Infinity and Beyond.* Birhäuser, Boston.

MARTIN, W.G. and HAREL, G. 1989. *Proof Frames of Preservice Elementary Teachers.* Journal for Research in Mathematics Education, vol. 20, no. 1, pp. 41-51.

MASON, J.H. 1988. *Learning and doing Mathematics.* Macmillan Education Ltd., Hong Kong.

MOORE G.H. 1992. "*Reflections on the Interplay between Mathematics and Logic.*" Mathematical Reports, Mc Master University.

MORASH, R.P. 1987. *Bridge to Abstract Mathematics. Mathematical Proof and Structures.* Random House, Inc., New York.

NEUBRAND, M. 1989. *Remarks on the Acceptance of Proofs: The case of some Recently Tackled Major Theorems.* For the Learning of Mathematics, vol. 9, no. 3, pp. 2-6.

NEWELL, A. & SIMON, H.A. 1972. *Human problem Solving.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

ODENDAL, F.F. **et al.** 1994. *Verklarende Handwoordeboek van die Afrikaanse Taal.* Derde hersiene uitgebreide uitgawe. Perskor Uitgewery, Midrand.

PEARD, R. 1984. *Prove It! Induction and Deduction in Secondary Mathematics.* The Australian Mathematics Teacher, vol. 40, no. 4, pp. 10-13.

PLUMPTON, C. **et al.** 1984. *Proof.* Macmillan Education Limited, London.

POHLERS, W. 1989. *Proof Theory, an Introduction.* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

PORTEOUS, K. 1990. *What Do Children Really Believe?* Educational Studies in Mathematics, vol. 21, no. 6, pp. 589-598.

REISEL, R.B. 1982. *How To Construct and Analyze Proofs – A Seminar Course.* American Mathematical Monthly, vol. 89, no. 7, pp. 490-492.

RETZER, K.A. 1984. *Inferential Logic in Geometry.* School Science and Mathematics, vol. 84, no. 5, pp. 277-284.

ROBERTI, J.V. 1987. *The Indirect Method.* Mathematics Teacher, vol. 80, no. 1, pp. 41-43.

ROSS, K.A. & Wright, C.R.B. 1985. *Discrete Mathematics.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.

RUBIN, J.E. 1990. *Mathematical Logic: Applications and Theory.* Saunders College Publishing, Philadelphia.

SCHMITTAU, J. 1991. *Mathematics Education in the 1990s: Can it Afford to Ignore its Historical and Philosophical Foundations?* Educational Theory, vol. 41, no. 2, pp. 121-133.

SCHUTTE, H.J. 1989. *"Logika en Wiskunde."* Spectrum 27_4, pp. 63-64.

SENK, S.L. 1985. *How Well Do Students Write Geometry Proofs?* Mathematics Teacher, vol. 78, no. 6, pp. 448-456.

SHANKER, S.G. 1987. *Wittgenstein and the Turning-point in the Philosophy of Mathematics.* Croom Helm, London & Sydney.

SIMON , H.A. 1944. *Decision-making and Administrative Organization.* Public Administration Review, vol. 4, no. 1, pp. 16-30.

SNAPPER, E. 1979. *What is Mathematics?* American Mathematical Monthly, vol. 86, pp. 551-557.

SOIFER, A. 1987. *Mathematics as Problem Solving.* Center for Excellence in Mathematical Education, Colorado Springs.

SOLOW, D. 1981. *How to Read and do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Process.* Department of Operations Research, Case Western Reserve University, Cleveland.

TARSKI, A. 1969. *Truth and Proof.* Scientific American, vol. 6, pp. 63-77.

TELLER, P. 1980. *Computer Proof.* The Journal of Philosophy, vol. LXXVI, no. 2, pp. 797-803.

THOM, R. 1971. *"Modern" Mathematics: An Educational and Philosophic Error?* American Scientist, vol. 59, pp. 695-699.

TRAGESSER, R.S. 1984. *Husserl and Realism in Logic and Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge.

TROELSTRA, A.S. & VAN DALEN, D. 1988. *Constructivism in Mathematics. An Introduction.* Vol 1, Elsevier Science Publishers, North-Holland, Amsterdam.

TYMOCZKO, T. 1986. *Making Room for the Mathematicians in the Philosophy of Mathematics.* The Mathematical Intelligencer, vol. 8, no. 3, pp. 44-50.

URI, L. 1983. *Structuring Mathematical Proofs.* American mathematical Monthly, vol. 90, no. 3, pp. 174-185.

USISKIN, Z. 1980. *What Should Not be in the Algebra and geometry Curricula of Average College-Bound Students?* Mathematics Teacher, vol. 73, pp. 413-424.

VAN DALEN, D. 1994. *Logic and Structure.* Third Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

VANDEN EYNDEN, C. 1989. *Fermat's Last Theorem: 1637-1988.* Mathematics Teacher, vol. 82, no. 8, pp. 637-640.

VAN DER MARK, J. 1988. *Oor die "nuwe" Kernsillabus vir Wiskunde Hoër Graad sts 8, 9, en 10.* Spectrum 26_4, pp. 34-40.

VAN DER MARK, J. 1990. *Analise vir Eerstejaarstudente.* Lexicon uitgewers, Johannesburg.

VAN RENSBURG, C.J.J. & LANDMAN, W.A. 1984. *Fundamenteel-Pedagogiese Begripsverklaringe – 'n Inleidende Oriëntering.* N.G. Kerkboekhandel Transvaal, Pretoria.

VAN STADEN, P.S. 1988. *Wiskunde Die Maklike Manier.* NASOU Beperk, Goodwood.

WIENER, N. 1953. *EX-PRODIGY.* Simon & Shuster, New York.

WILDER, R.L. 1967. *The Role of the Axiomatic Method.* American Mathematical Monthly, vol. 74, pp. 115-127.

WILDER, R.L. 1972. *History in the Mathematics Curriculum: Its Status, Quality, and Function.* American Mathematical Monthly, vol. 79, pp. 479-495.

WITTENBERG, A. 1963. *Sampling a Mathematical Sample Text.* American Mathematical Monthly, vol. 70, pp. 452-459.

ZEITLER, H. 1990. *Axiomatics of Geometry in School and in Science.* For the Learning of Mathematics, vol. 10, no. 2, pp. 17-24.

ZIETSMAN, P.J. & VAN DER MERWE, H.J. 1987. *Wiskundewoordeboek, Mathematics Dictionary, English-Afrikaans.* Tweede, hersiene en uitgebreide uitgawe. Tafelberg-uitgewers, Kaapstad.

ZWIER, P.J. & NYHOFF, L.R. 1969. *Essentials of College Mathematics.* Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.